

تعریف: عملگر پسرو ∇ که به صورت زیر تعریف می کنیم: ∇ دلتا یلاس

$$\nabla^0 f_i = f_i$$

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \quad \nabla^{k+1} f_i = \nabla^k f_i - \nabla^k f_{i-1}$$

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
x_0	f_0			
x_1	f_1	∇f_1	$\nabla^2 f_1$	$\nabla^3 f_1$
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$	
x_3	f_3	∇f_3		

فرض کنید جمله ای درون باب بر حسب تفاضلات پسرو:

برای تعیین مقدار f_x وقتی x نزدیک به نقاط انتهایی جدول است، لازم است

که از تفاضلات پسرو که بر حسب مقادیر تابع در نقاط انتهایی جدول بیان می شود

استفاده کنیم. چند جمله ای درون باب f در نقاط مسدودی الفاصدی x_n تا x_{n+k}

و $x = x_n + \theta h$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$P(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \dots + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)\dots(\theta+n-1)}{n!} \nabla^n f_n$$

که فرض اول بالا را تفاضلات پسرو بنویس می نامیم.

مثال: جدول تفاضلات منتهی مربوط به تابع جدولی زیر را بدست آورده و چند جمله ای

درون یاب آن را با استفاده از تفاضلات پیرو محاسبه نمایید

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	-1	2	9

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$
$x_0 = -1$	0			
$x_1 = 0$	-1	$\nabla f_0 = -1$		
$x_2 = 1$	2	$\nabla f_1 = 2$	$\nabla^2 f_0 = 2$	
$x_3 = 2$	9	$\nabla f_2 = 7$	$\nabla^2 f_1 = 4$	$\nabla^3 f_0 = 0$

$n=3$

نکته: در تفاضلات پیرو n در f_n به n جدول بستنی دارد و برابر آن است.

$$P(x) = f_n + \theta \nabla f_n + \frac{\theta(\theta+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!} \nabla^3 f_n \quad \rightarrow n=3$$

$$\rightarrow P(x) = 9 + \theta(7) + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}(4) + 0 = 9\theta + 2\theta^2 + 9$$

$$x = x_n + \theta h \rightarrow x = x_3 + \theta(1) \rightarrow x - 2 = \theta$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2 + 9(x-2) + 9 \rightarrow P(x) = 2x^2 + x - 1 \quad \checkmark$$

* انستراکشن گیری عددی:

برای محاسبه انستراکشن $\int_a^b f(x) dx$ هرگاه تابع اولیه F موجود نباشد و

یا f را بصورت تابع جدولی داده شده باشد، از انستراکشن گیری عددی استفاده

می شود.

فرض می‌کنیم $[a, b]$ را به n قسمت مساوی بصورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$$[x_i, x_{i+1}] \quad n = 1000 \text{ و } i = 0, 1, \dots, n$$

$$x_{i+1} - x_i = h \quad h = \frac{b-a}{n}$$

* قاعده ذوزنقه‌ای (از روش‌های انتگرال‌گیری):

در $[x_i, x_{i+1}]$ تقریب زیر را به کار می‌بریم:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f_i + f_{i+1}]$$

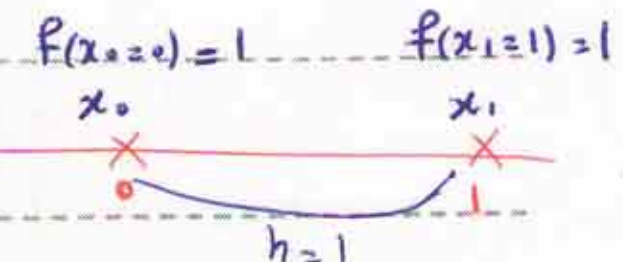
رابطه‌ی بالا مساحت ذوزنقه‌ای به قاعده‌های f_i و f_{i+1} و ارتفاع h می‌باشد.

$$\int_a^b f(x) dx \approx T(h) = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n]$$

T نماد قاعده‌ی ذوزنقه‌ای
فاصله‌ی بازه
فرض اول قاعده‌ی ذوزنقه‌ای


مثال تقریب از $\int_0^1 x^2 dx$ را به روش ذوزنقه‌ای به ازای $h = \frac{1}{2}$ و $h = \frac{1}{4}$

الف) $h = 1 \rightarrow h = \frac{b-a}{n} \rightarrow 1 = \frac{1-0}{n} \rightarrow \boxed{n=1}$



$$\int_0^1 x^2 dx \approx T(1) = \frac{h}{2} [f_0 + f_1] = \frac{1}{2} [0 + 1] = \frac{1}{2}$$

ب) $h = \frac{1}{4} \rightarrow n = \frac{1-0}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{n=4}$



$$\int_0^1 x^2 dx \approx T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4] = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{16} + 1\right] = \frac{3}{8}$$

ج) $h = \frac{1}{4} \rightarrow n = \frac{1-0}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{n=4}$

$\int_0^1 x^2 dx \approx T(\frac{1}{4}) = \frac{h}{2} [f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4] = \frac{1}{8} [\frac{0}{1} + \frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{2}{\frac{9}{4}} + 1] = \frac{1}{8} [\frac{22}{4}] = \frac{11}{16}$

مثالی به روش ذوزنقه ای

تقریب انتگرال $\int_0^1 f(x) dx$ را با استفاده از جدول مقادیر زیر بدست آورید:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	1/2	1/4	3/4	1/8	1
f_i	1	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255	2.7183

$\rightarrow h = 1/2, n = 5$

$\int_0^1 f(x) dx \approx T(1/2) = \frac{h}{2} [f_0 + 2[f_1 + f_2 + f_3 + f_4] + f_5] = 1.72$

ABADANOMRAN

* قاعده سیمپسون:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}]$$

این قاعده فقط برای n زوج برقرار است. یعنی تعداد نقاط فرد باشد.

فرمول قاعده سیمپسون

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(h) = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 4f_{n-1} + f_n]$$

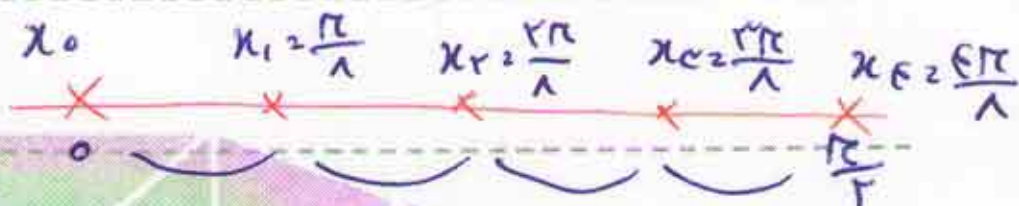
مثال تقریبی از $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx$ را با استفاده از قاعده سیمنسون و به ازای $h = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ محاسبه کنید:

$$h = \frac{\pi}{4} \Rightarrow n = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \boxed{n=1}$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx \approx S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + f_2] = \frac{\pi}{12} [1 + 4\sqrt{2} + 1]$$

$$h = \frac{\pi}{8} \rightarrow n = \frac{\frac{\pi}{8} - 0}{\frac{\pi}{8}} \Rightarrow \boxed{n=2}$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin x \, dx \approx S\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4]$$

$$= \frac{\pi}{24} [0 + 4(0.3827) + 2\sqrt{2} + 4(0.9239) + 1] = 0.32\pi$$