مقاومت مصالح (۱) کارشناسی

مدرس: محمد جواد شعبانی

جزوه تا پایان فصل دوم (میان‌ترم)

مقاومت مصالح

فهرست:

فصل ۱- مقدمه - مفهوم تنش

فصل ۲- تنش و کرنش - بارگذاری محوری

فصل ۳- پیچش

فصل ۴- خمش

فصل ۵- برش

فصل ۶- تغییر شکل تیرها

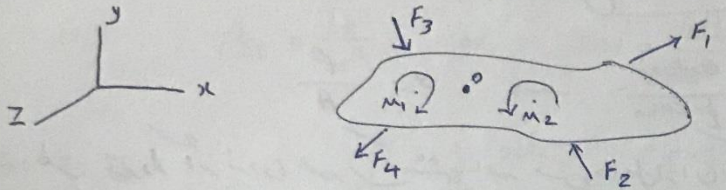
منابع:

مقاومت مصالح فردیناند پی بیر - ای راسل جانستون - جان تی دی ولف

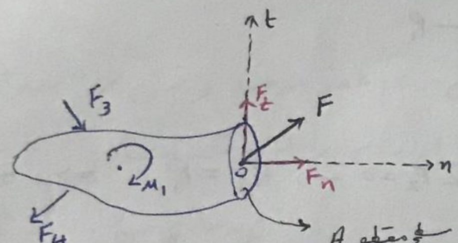
مقاومت مصالح ایگور پوپوف

فصل اول : مقدمه - مفهوم تنش

مقدمه : هرگاه جسمی مطابق شکل زیر تحت انواع بارگذاریها قرار گیرد، نیروهای داخلی در جسم به وجود آمده که این نیروها می‌توانند در جسم تنش را ایجاد نمایند:



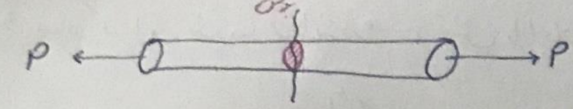
حال اگر از نقطه o و به موازات صفحه yz برش ایجاد شود و قسمت چپ جسم جدا گردد در این راستا برای حفظ تعادل در سطح برش جزء نیروی داخلی به وجود خواهد آمد که این نیرو بر سطح A که از نقطه o می‌گذرد وارد خواهد شد. این نیرو را می‌توان با دو مولفه عمود بر سطح (F_n) و مماس بر سطح (F_t) تجزیه نمود.



از تقسیم F_n بر مساحت سطح مقطع (A) کمیتی به دست می‌آید که به آن تنش قائم (σ) و از تقسیم F_t بر مساحت سطح مقطع (A) نوع دیگری از تنش به دست می‌آید که به آن تنش برشی (τ) می‌گویند.

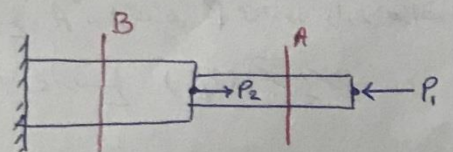
مفهوم تنش:

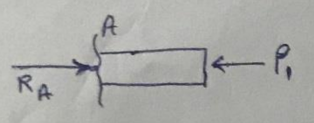
تنش محوری (قائم): نیرو بر واحد سطح در سطح مقطع دلخواه را تنش محوری گویند.



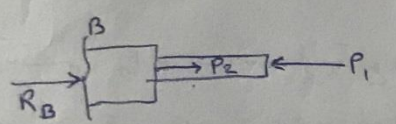
$$\text{تنش محوری} = \frac{\text{نیروی محوری}}{\text{مساحت سطح مقطع}} \longrightarrow \sigma = \frac{P}{A}$$

نکته: طبق قرارداد اگر نیروی محوری کششی باشد تنش حاصل از آن را کششی و با علامت مثبت (+) نشان می دهند. همچنین اگر نیروی محوری فشاری باشد تنش حاصل از آن را فشاری و با علامت منفی (−) نمایش می دهند.



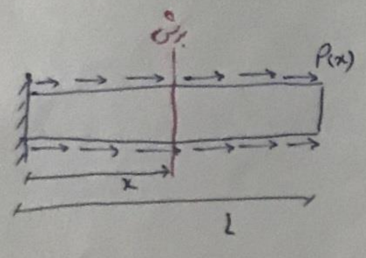


$$\sum F_x = 0 \longrightarrow R_A = P_1 \Rightarrow \sigma_A = \frac{R_A}{\text{سطح مقطع در } A}$$

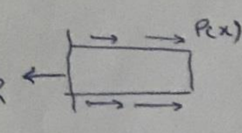


$$\sum F_x = 0 \longrightarrow R_B = P_1 - P_2 \rightarrow \sigma_B = \frac{P_1 - P_2}{\text{سطح مقطع در } B}$$

نکته: اگر میله تحت بار گسترده محوری قرار گیرد آنگاه برای محاسبه نیروی داخلی از رابطه انتگرالی زیر استفاده می شود:



$\Leftrightarrow$



$$\sum F_x = 0$$

$$\rightarrow R = \int_x^l P_{(x)}\, dx$$

نکته: واحد تنش در سیستم متریک نیوتن بر متر مربع ($\frac{N}{m^2}$) یا پاسکال و در سیستم اینچی U.S پوند بر اینچ مربع ($\frac{Lb}{in^2}$) یا Psi است.

متریک: $\frac{kg}{cm^2}$ or $Pa = \frac{N}{m^2}$ or $kPa = \frac{kN}{m^2}$ or $MPa = \frac{N}{mm^2}$

U.S : $Psi = \frac{Lb}{in^2}$ or $ksi = \frac{kLb}{in^2} = 10^3\ Psi$

نکته: در طراحی ها باید شرایط زیر مورد توجه قرار گیرد

① کنترل: باید تنش موجود در عضو از تنش مجاز که براساس آیین نامه تعیین می شود کمتر باشد.

$$\sigma_{\text{موجود}} = \frac{P_{\text{موجود}}}{A_{\text{موجود}}} \leqslant \sigma_{\text{مجاز}}$$

② ظرفیت باربری: چنانچه سطح مقطع عضو موجود و تنش مجاز معلوم باشد می توان ظرفیت باربری مجاز را براساس رابطه زیر تعیین نمود.

$$P_{\text{مجاز}} = \sigma_{\text{مجاز}} \times A_{\text{موجود}}$$

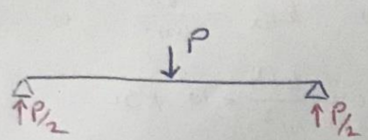
③ طراحی: چنانچه بار اعمالی به عضو موجود باشد و تنش مجاز معلوم باشد (طبق آیین نامه) در این صورت می توان سطح مقطع مجاز را براساس رابطه زیر تعیین نمود:

$$A_{\text{حداقل مجاز}} = \frac{P_{\text{موجود}}}{\sigma_{\text{مجاز}}}$$

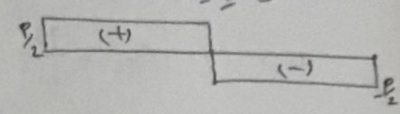
تنش برشی: هرگاه نیروی وارد شده به سطح مقطع جسم، مماس باشد تنش بوجود آمده در عضو را تنش برشی گویند.

$$\tau = \frac{F}{A}$$

نکته: مدل تیر زیر در اثر ازدیاد بار در وسط برش می‌خورد

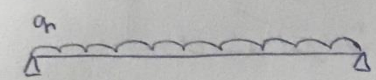


نمودار نیروی برشی ⟶

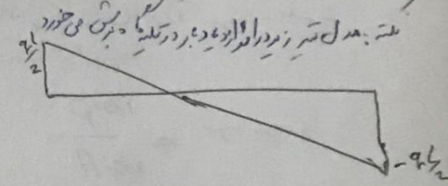


$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{P/2}{A} = \frac{P}{2A} < \tau_{\text{مجاز}}$$

نکته: مدل تیر زیر در اثر ازدیاد بار در تکیه‌گاه برش می‌خورد



نمودار نیروی برشی ⟶



نکته: در طراحی‌ها باید به موارد زیر توجه شود:

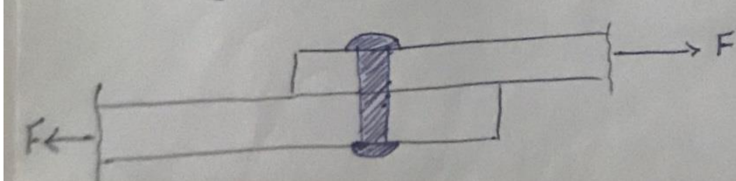
(۱) $\tau_{\text{موجود}} = \frac{V}{A} < \tau_{\text{مجاز}}$

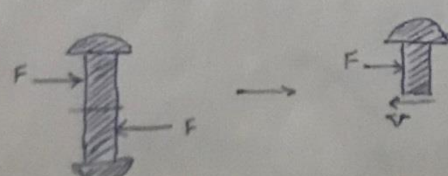
(۲) $V_{\text{مجاز}} = \tau_{\text{مجاز}} \times A_{\text{موجود}}$

(۳) $A_{\text{حداقل لازم}} = \frac{V_{\text{موجود}}}{\tau_{\text{مجاز}}}$

نکته: محاسبه تنش برشی معمولاً در اجزا اتصال دهنده مانند پیچ‌ها، پرچ‌ها، چسب و جوش‌ها حائز اهمیت است. در ادامه تنش برشی در پیچ و پرچ ارائه شده است.

به عنوان نمونه دو ورق که توسط یک پرچ به هم متصل شده‌اند را در نظر بگیرید. در صورتی که نیروی وارده به هر صفحه از یک حد مشخص فراتر رود ممکن است پرچ دیگر قادر به تحمل آن نبوده و بریده شود. علت آن است که تنش برشی ایجاد شده در پرچ از حد تحمل آن بیشتر شده است. به این حالت از برش در پرچ، برش ساده یا منفرد گفته می‌شود.

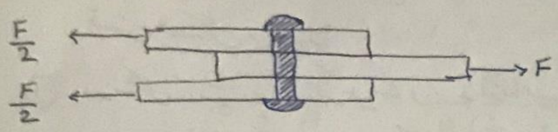


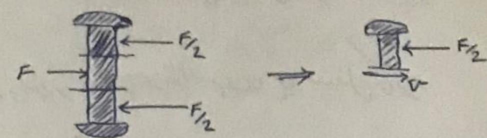


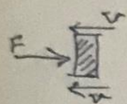
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = V$$

$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{F}{A}$$

حال چنانچه پرچ اتصال دهنده سه ورق باشد، آنگاه در حالت مجزا احتمال برش خوردن پرچ در دو سطح وجود دارد. در این حالت برشی به وجود آمده را برش مضاعف می‌گویند.







$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A}$$

نکته: چنانچه اتصال بین دو یا چند ورق توسط n پیچ یا پرچ انجام گیرد، آنگاه تنش برشی در پیچ و پرچ با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\tau = \frac{F}{n \cdot A} \xrightarrow{\text{در حالت اتصال ۲ ورق}}$$

- τ تنش برشی در پیچ
- F نیروی اعمالی به ورق
- A سطح مقطع پیچ
- n تعداد پیچ اتصالی

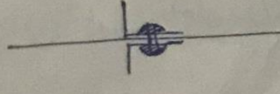
$$\tau = \frac{F}{n \cdot m \cdot A} \xrightarrow{\text{در حالت اتصال m ورق}}$$

- τ تنش برشی در پیچ
- F نیروی اعمالی به ورق یا پیچ
- A سطح مقطع پیچ
- n تعداد پیچ اتصالی
- m تعداد ورق

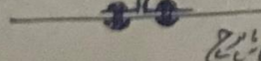
نکته: تنش برشی به وجود آمده در پیچ یا پرچ باید از تنش برشی مجاز پیچ یا پرچ کمتر باشد تا برش در آن به وجود نیاید.

نمونه‌ای از این اتصالات:

اتصال یک نبشی به صفحه فولادی
در این حالت یک صفحه برش داریم



اتصال دو نبشی به صفحه فولادی
در این حالت دو صفحه برش داریم



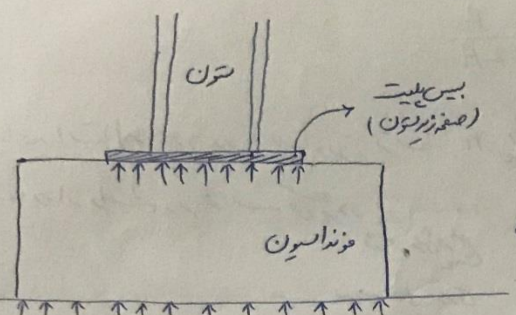
اتصال دو نبشی به یک صفحه فولادی
در این حالت یک صفحه برش وجود دارد، ۲ پیچ یا پرچ

تنش لهیدگی :

در سطوح تکیه‌گاهی یا سطوح تماس اعضایی که به یکدیگر فشار وارد می‌کنند تنش ایجاد می‌شود که آن را تنش لهیدگی می‌نامند.

① در شکل روبرو یک فشار کف ستون به فونداسیون اعمال می‌شود و فشار فونداسیون به پی منتقل می‌گردد

دو نوع تنش لهیدگی به وجود می‌آید، در این صورت خواهیم داشت:



الف - تنش لهیدگی بین صفحه زیرستون و فونداسیون

$$\text{تنش لهیدگی}\ \sigma_B = \frac{P_{1\,\text{موجود}}}{A_{1\,\text{موجود}}} \leq \sigma_{B\,\text{مجاز}}$$

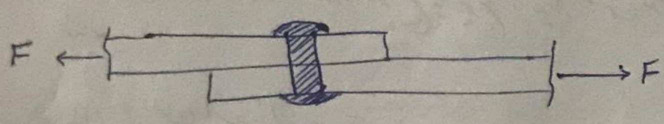
← مجاز مربوط به فونداسیون است تا گسیخته نگردد

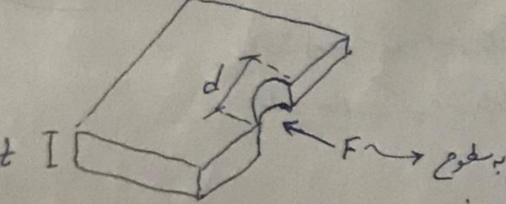
ب - تنش لهیدگی بین فونداسیون و پی

$$\text{تنش لهیدگی}\ \sigma_B = \frac{P_{2\,\text{موجود}}}{A_{2\,\text{موجود}}} \leq \sigma_{B\,\text{مجاز}}$$

← مربوط به پی است تا گسیخته نگردد

② چنانچه با استفاده از پیچ یا پرچ دو صفحه به یکدیگر متصل شوند و نیروی کششی یا فشاری به دو صفحه اعمال گردد آنگاه تنش لهیدگی از طرف پیچ به سطوح داخلی سوراخ اعمال می‌گردد که می‌توان با استفاده از رابطه زیر تعیین نمود:





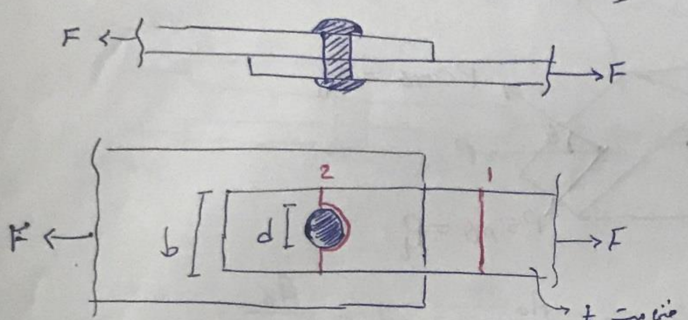
$$\sigma_B = \frac{F}{A} = \frac{F}{dt}$$

در رابطه بالا d قطر سوراخ و t ضخامت صفحه می‌باشد. در واقع dt مساحت یک مستطیل است که سطح تصویر یافته نیم استوانه بر صفحه قائم می‌باشد.

نکته: چنانچه دو ورق هم جنس توسط پیچ یا پرچ به یکدیگر متصل شوند پدیده لهیدگی در ورقی که ضخامت کمتری داشته باشد بیشتر قابل ملاحظه است. همچنین در چنین حالاتی اگر به جای یک پیچ یا پرچ از n پرچ استفاده شود باید مخرج کسر در n ضرب گردد

$$\sigma_B = \frac{F}{A} = \frac{F}{n\cdot(t_{min} \times d)}$$

نکته: در سازه هایی که با اتصالات پرچی به یکدیگر متصل می باشند، اگر نیروی عضو کششی باشد، برای محاسبه تنش حداکثر می توان به صورت زیر عمل نمود:



$$\text{عضو کششی} : \quad \sigma_{max} = max \begin{cases} \dfrac{F}{A} = \dfrac{F}{t \times b} & ① \\ \dfrac{F}{A_n} = \dfrac{F}{t(b-d)} & ② \end{cases}$$

همچنین در حالت ۲ چنانچه بیش از یک پرچ داشته باشیم (n پرچ) آنگاه تنش حداکثر برابر است با:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A_n} = \frac{F}{t(b-nd)}$$

در این روابط A_n مساحت خالص است.

به راحتی می توان تشخیص داد که حداکثر تنش در قسمتی از عضو که دارای سوراخ است به وجود خواهد آمد (یعنی حالت ۲).

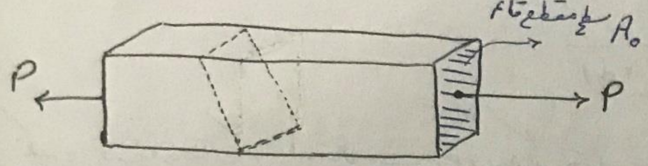
نکته: چنانچه دو عضو که با پرچ به یکدیگر متصل شده اند تحت نیروی فشاری قرار گیرند آنگاه برای محاسبه تنش می توان از رابطه ① استفاده نمود به این دلیل که باعث بسته شدن سوراخ می شوند و فشار منجر می شود تا سطوح مثبت سوراخ هم نیرو را تحمل نمایند.

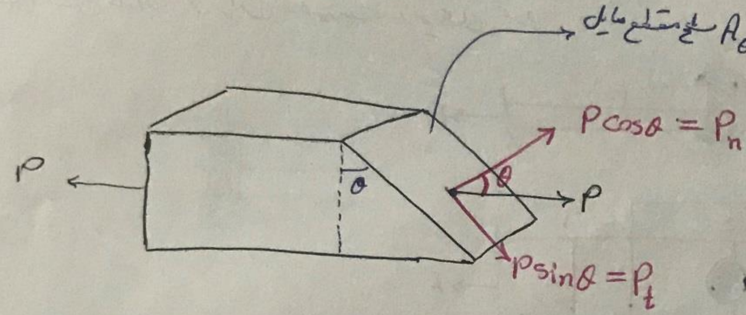
$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} = \frac{F}{t \times b}$$

نکته: بنابراین در مسئله اتصال دو عضو با پیچ یا پرچ ۲ مورد کنترل، ۲ مورد ظرفیت باربری و ۲ مورد طراحی وجود خواهد داشت.

تنش در مقاطع مورب :

چنانچه جسمی تحت بار محوری قرار گیرد، آنگاه نیروی محوری در صفحات مایل نه تنها ایجاد تنش قائم کرده بلکه تنش برشی نیز ایجاد می کند.





برای مساحت سطح ها : $\cos\theta = \frac{A_0}{A_\theta} \longrightarrow A_\theta = \frac{A_0}{\cos\theta}$

تنش قائم در صفحه مایل : $\sigma_\theta = \frac{P_n}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$

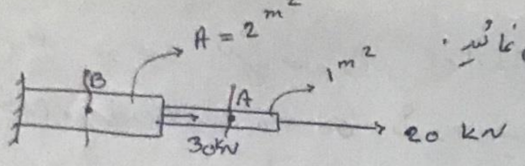
تنش برشی در صفحه مایل : $\tau_\theta = \frac{P_t}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cos\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta$

نکته : چنانچه $\theta=0$ باشد آنگاه $\sigma_\theta = \frac{P}{A_0}$ و $\tau_\theta = 0$

نکته : چنانچه $\theta=45$ باشد آنگاه $\sigma_\theta = \frac{P}{2A_0}$, $\tau_\theta = \frac{P}{2A_0}$

نکته : چنانچه $\theta=90$ باشد آنگاه $\sigma_\theta = 0$ و $\tau_\theta = 0$

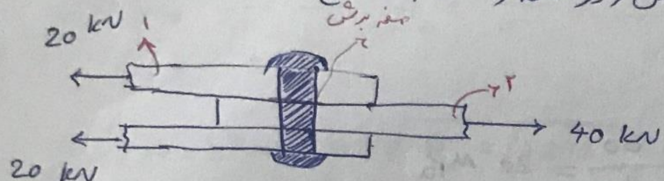
مثال ۱- تنش را در نقاط A و B تعیین نمائید.



A:
$$\sigma_A = \frac{P_1}{A_1} = \frac{20}{1} = 20\ \frac{kN}{m^2}$$

B:
$$\sigma_B = \frac{P_1 + P_2}{A_2} = \frac{20+30}{2} = 25\ \frac{kN}{m^2}$$

مثال ۲- مطابق شکل زیر مقدار تنش را در صفحه و مقطع برش پیچ بدست آورید.



"ضخامت صفحات $t = 1^{cm}$ می باشد"

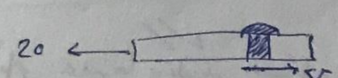
عرض صفحات $b = 30^{cm}$

پیچ دارای سطح مقطع 4^{cm^2} است

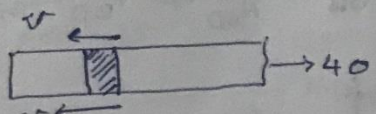
تنش در صفحه ها

$$\sigma_1 = \frac{40}{(1\times 30)\times 10^{-4}} = 13.3\ MPa = 13.3\times 10^6\ Pa$$

$$\sigma_2 = \frac{20}{(1\times 30)\times 10^{-4}} = 6.67\ MPa = 6.67\times 10^6\ Pa$$

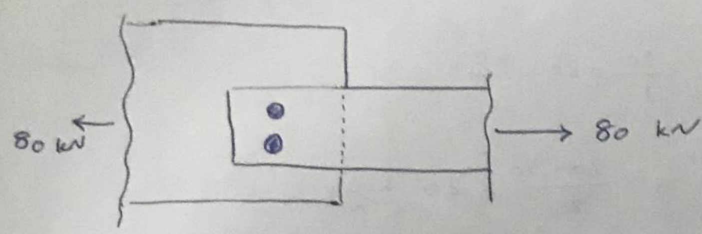


$$\tau = \frac{V}{A} = \frac{20}{4\times 10^{-4}} = 50\ MPa = 50\times 10^6\ Pa$$



$$2V = 40 \longrightarrow V = 20$$

مثال ۳- دو عدد پیچ و مهره فولادی برای اتصال دو قطعه به کار رفته است. چنانچه حداکثر تنش برشی مقاوم در فولاد به کار رفته 60 MPa باشد و ضریب اطمینان مورد نیاز 3 باشد، قطر پیچ را تعیین کنید.



$$\tau_{\text{مجاز}} = \frac{V}{A}$$

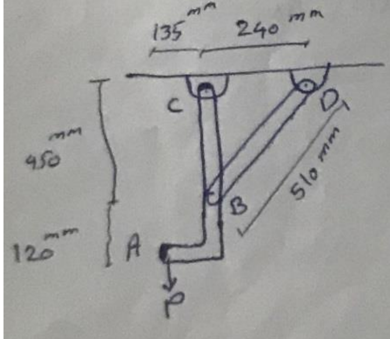
$$\tau_{\text{مجاز}} = \frac{\tau_{\text{آزمایشگاهی}}}{F.S_{\text{ضریب اطمینان}}} = \frac{60}{3} = 20\ MPa$$

$$V = 80\ kN$$

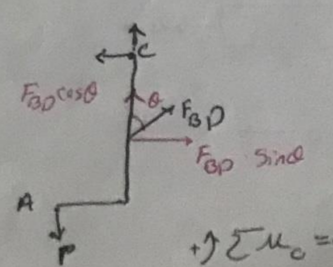
$$A = 2 \times \frac{\pi d^2}{4}$$

$$10^6 \times 20 = \frac{80 \times 10^3}{2 \times \frac{\pi d^2}{4}} \longrightarrow d = \sqrt{\frac{160 \times 10^3}{\pi \times 20 \times 10^6}} = 0.05\ m = 50\ mm$$

مثال ۴- با توجه به شکل عضوها به یکدیگر مفصل شده‌اند. چنانچه تنش عمودی در قسمت BD برابر 50 MPa باشد، مطلوب است تعیین P.
مساحت سطح مقطع عضو BD برابر $800 mm^2$.



$$\sigma_{BD} = \frac{F_{BD}}{A_{BD}} \Rightarrow F_{BD} = \sigma_{BD} \cdot A_{BD} = 50\ \frac{N}{mm^2} \times 800\ mm^2 = 40000\ N$$

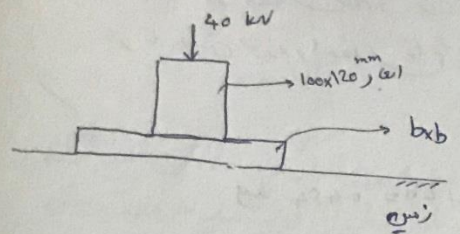


$$\longrightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{240}{450} = 28$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \longrightarrow P \times 135 + F_{BD}\sin\theta \times 450 = 0$$

$$\longrightarrow P = -\frac{F_{BD} \times \sin\theta \times 450}{135} = -62596\ N = -62.6\ kN$$

مثال ۵- بار محوری 40^{kN} بر ستون چوبی کوتاه که توسط پایه بتنی روی خاک نگهداری می‌شود وارد شده است. مطلوب است: الف- حداکثر تنش برشی روی پایه بتنی ب- اندازه پایه بتنی اگر تنش برشی حداکثر در خاک 145^{kPa} باشد.



الف-

$$A = 100\times120 \quad mm^2 = 12\times10^3 \; mm^2 = 12\times10^{-3} \; m^2$$

$$P = 40 \quad kN = 40\times10^3 \; N$$

تنش تکیه‌گاهی روی فونداسیون $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{40\times10^3}{12\times10^{-3}} = 3.33\times10^6 \; (\frac{N}{m^2}=Pa)$

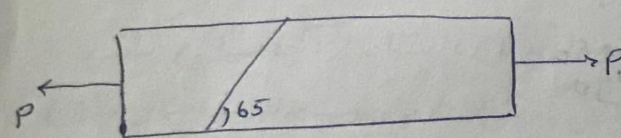
ب- باید طراحی انجام گردد

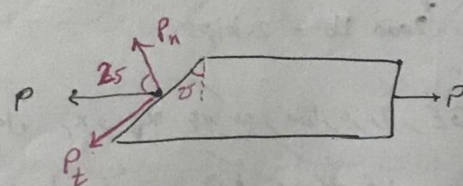
$$\sigma_{\text{مجاز}} = \frac{F_{\text{موجود}}}{A_b} \longrightarrow A_b = \frac{F}{\sigma} = \frac{40 \; kN}{145 \; kPa} = 0.276 \; m^2$$

مجهول A_b

$$A = b^2 \longrightarrow b = \sqrt{A} = \sqrt{0.276} = 0.525^{m} = 525^{mm}$$

مثال ۶- دو عضو چوبی با سطح مقطع مستطیلی 75×125^{mm} توسط چسب ساده متصل شده‌اند. نیروی محوری $P = 3.6 \; kN$ است. تنش برشی و محوری را در صفحه مایل بدست آورید. چنانچه مقاومت نهایی چسب در کشش 1.1^{MPa} و در برش 1.4^{MPa} باشد، ضریب اطمینان را در مقابل بار وارده تعیین کنید.





$$\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta = \frac{3.6}{0.075\times0.125}\times\cos^2 25 = 315.4 \; kPa < \sigma_{\text{مجاز}}$$

$$\tau = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta = \frac{3.6}{2\times(0.075\times0.125)}\sin(2\times25) = 147.1 \; kPa < \tau_{\text{مجاز}}$$

حال برای یافتن ضریب اطمینان کافی است نسبت $F.S = \frac{\text{مقدار مجاز}}{\text{مقدار موجود}}$ تعیین گردد:

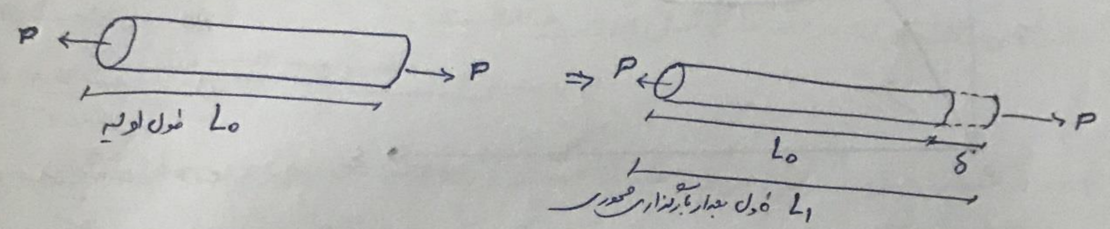
$$F.S = \frac{\sigma_{\text{مجاز}}}{\sigma_{\text{موجود}}} = \frac{1.1\times10^3 \; kPa}{315.4 \; kPa} = 3.5$$

$$F.S = \frac{\tau_{\text{مجاز}}}{\tau_{\text{موجود}}} = \frac{1.4\times10^3 \; kPa}{147.1 \; kPa} = 9.5$$

فصل دوم   تنش و کرنش - بارگذاری محوری

تنش: نیروی وارد بر واحد سطح را تنش گویند. $\sigma = \frac{P}{A}$

کرنش عمودی یا محوری: مطابق شکل چنانچه میله‌ای تحت بار محوری قرار گیرد و در آن تغییر طول ایجاد شده که مقدار آن را با δ نمایش می‌دهند. مقدار تغییر طول به طول اولیه میله معرف کرنش محوری است که با ε نمایش می‌دهند.



کرنش محوری $$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} = \frac{L_1 - L_0}{L_0}$$

ارتباط بین تنش و کرنش:

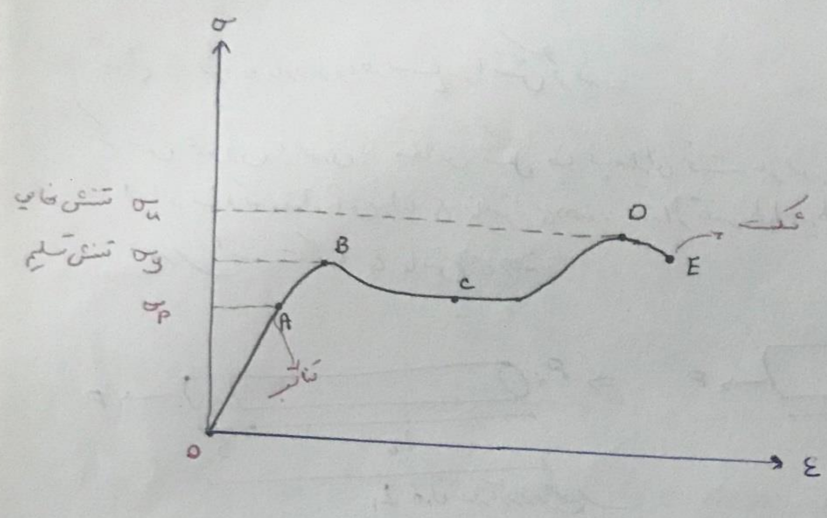
ارتباط بین تنش و کرنش برای مواد مختلف را می‌توان با استفاده از آزمایش‌های کشش یا فشار تعیین نمود. در شکل زیر منحنی تنش - کرنش محوری برای یک فولاد ساختمانی نشان داده شده است. لازم به ذکر است منحنی تنش - کرنش وابسته به جنس مصالح می‌باشد و ارتباطی به ابعاد جسم مورد آزمایش ندارد.

همان طور که مشاهده می‌گردد در ابتدا منحنی تنش - کرنش به صورت خطی می‌باشد. در این محدوده رفتار جسم به صورت الاستیک بوده است. به این معنی که جسم در اثر اعمال بارهای خارجی تغییر شکل داده و با حذف بار مانند یک فنر به وضعیت اولیه‌اش باز می‌گردد (نقطه A)

درصورتی که تنش ایجاد شده در جسم بیشتر از حد الاستیک شود جسم وارد مرحله پلاستیک شده و در نتیجه حتی با حذف بار مقداری از تغییر شکل دائمی در جسم باقی خواهد ماند.

در نقطه B که همان حد تسلیم فولاد است تغییر شکل ارتجاعی به تغییر شکل پلاستیک تبدیل می‌شود و در فاصله B تا C فولاد رفتاری خمیری داشته و در تنش نسبتاً ثابت، تغییر شکل قابل توجهی از خود نشان می‌دهد. اما در فاصله C تا D با ادامه تغییر شکل، مقاومت فولاد در برابر افزایش

تغییر شکل بیشتر شده که به آن اصطلاحاً سختی جدید گفته می‌شود. در فاصله D تا E نیز سطح مقطع نمونه به شدت کاهش یافته و در نهایت نمونه گسیخته می‌شود.



OA: الاستیک خطی

AB: الاستیک غیرخطی

BC: ناحیه پلاستیک یا جاری شدن

CD: ناحیه سخت شوندگی

DE: ناحیه نرم شوندگی مجدد یا گلویی شدن

نکته: فولاد ساختمانی در رده ST-37 مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\sigma_u = 3700\ \frac{kg}{cm^2} = 37\ \frac{kg}{m^2}$$

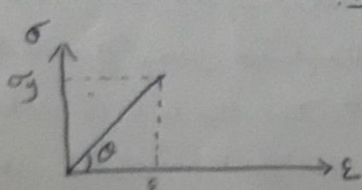
$$\sigma_y = 2400\ \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_p = 1900\ \frac{kg}{cm^2}$$

به طور معمول در طراحی‌ها از ناحیه الاستیک خطی استفاده می‌شود. از این رو در صورتی که به جسمی تا حد تناسب بارگذاری گردد ارتباط خطی بین تنش و کرنش وجود داشته که آن را می‌توان توسط قانون هوک بیان نمود.

$$\sigma = E\varepsilon$$

که در این رابطه σ تنش حد تناسب و ε کرنش در حالت تنش حد تناسب و E مدول الاستیسیته مصالح یا همان شیب قسمت خطی نمودار است.

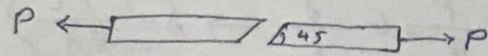


$$\tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

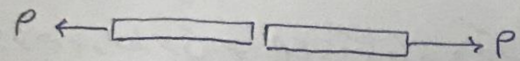
چنانچه $\sigma_y = 2400 \frac{kg}{cm^2}$ و $\varepsilon = 0.0012$ باشد آنگاه

$$E = \frac{2400}{0.0012} = 2.1 \times 10^3 \ \frac{kg}{cm^2}$$

نکته: مواد نرم نسبت به برش ضعیف هستند و زمانی که تحت بارهای محوری قرار می‌گیرند تحت زاویه 45 درجه می‌شکنند چون در این زاویه تنش برشی حداکثر مقدار خود را دارد.



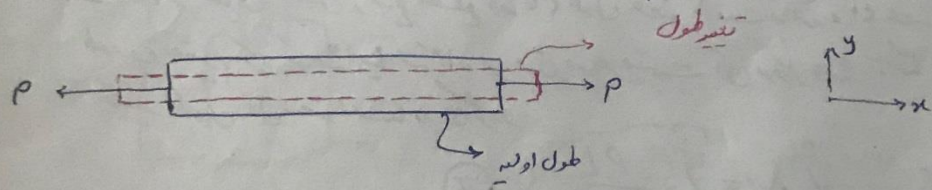
نکته: مواد ترد نسبت به کشش ضعیف هستند و هنگامی که تحت بارهای محوری قرار می‌گیرند به صورت عمودی می‌شکنند. چون در صفحه قائم تنش محوری حداکثر است.



نکته: در منحنی تنش - کرنش هرچه ناحیه پلاستیک بزرگتر باشد ماده نرم‌تر بوده به طوری که برای مواد ترد هیچ‌گونه ناحیه پلاستیکی در منحنی تنش - کرنش وجود ندارد.

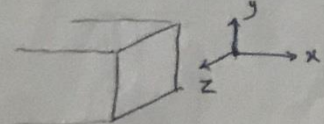
نسبت پواسون:

هرگاه یک میله‌ای تحت بارگذاری محوری قرار گیرد، تغییر طول آن همراه با انقباض یا انبساط جانبی همراه خواهد بود. نسبت تغییر ابعاد نسبی در راستای جانبی به راستای طولی را نسبت پواسون گویند.



$$\nu = - \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} = - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

یا در حالت سه بعدی



$$\nu = - \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} = - \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

بنابراین $\varepsilon_y = \varepsilon_z = - \nu \varepsilon_x$

تغییر طول اعضا تحت بارگذاری محوری :

هرگاه عضوی تحت بارگذاری محوری قرار گیرد آنگاه براساس قانون هوک خواهیم داشت :

← جنس همگن و دارای سطح مقطع ثابت

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \longrightarrow \frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \longrightarrow \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}} \quad (\mathrm{I})$$

چنانچه نیروی محوری کششی باشد آنگاه تغییر طول به صورت افزایشی است و چنانچه نیروی محوری فشاری باشد آنگاه تغییر طول به صورت کاهشی است .

با توجه به رابطه فوق به EA قرار گرفته در مخرج کسر صلبیت محوری گفته می شود .

برای استفاده از رابطه (I) باید شرایط زیر برای تمام طول L برابر باشد :

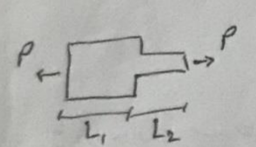
1. سطح مقطع عضو ثابت باشد (A ثابت)
2. عضو همگن باشد (E ثابت)
3. عضو دو نیرویی باشد (P ثابت باشد)

چنانچه شرایط فوق برقرار نباشد دو حالت خواهیم داشت :

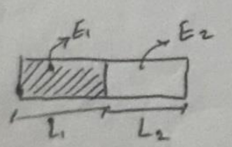
الف- اگر نیرو، جنس و سطح مقطع در تمام طول عضو ثابت نباشد ، اما عضو را بتوان به چند قسمت طوری تقسیم کرد که شرایط سه گانه فوق در هر قسمت آن برقرار باشد آنگاه ، از رابطه زیر برای تغییر طول کل عضو استفاده می گردد :

$$\delta_{Total} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{E_i A_i}} \quad (\mathrm{II})$$

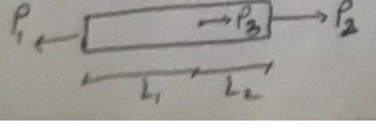
برای مثال :



$$\longrightarrow \delta = \frac{P}{E}\left(\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2}\right)$$

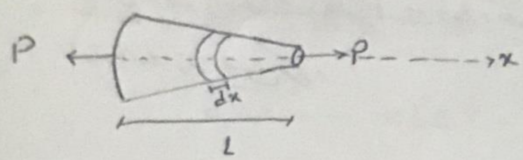


$$\longrightarrow \delta = \frac{P}{A}\left(\frac{L_1}{E_1} + \frac{L_2}{E_2}\right)$$



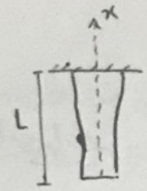
$$\longrightarrow \delta = \frac{1}{EA}\left(P_1 L_1 + P_2 L_2\right) \quad , \quad P_2 = P_1 - P_3$$

ب- اگر تغییرات P و E و A تدریجی باشد از رابطه زیر تغییر طول عضو بدست می‌آید:



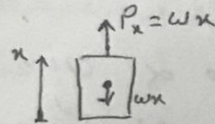
$$\delta=\int_0^L \frac{P_x \cdot dx}{E_x \cdot A_x}$$

برای مثال:



ω = وزن طول واحد

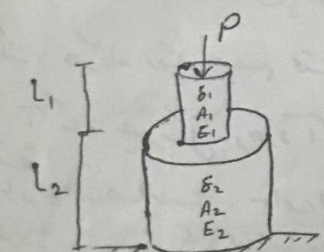
وزن کل میله = $W=\omega L$



$$\longrightarrow \delta=\int_0^L \frac{P_x \cdot dx}{EA}=\frac{1}{EA}\int_0^L \omega x\, dx=\frac{\omega}{EA}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^L=\frac{\omega L^2}{2EA}$$

$$\xrightarrow{\omega L = W} \delta=\frac{WL}{2EA}$$

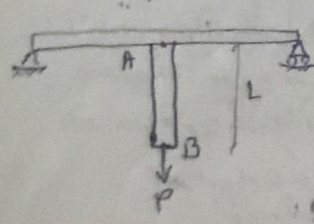
مثال: مقدار کاهش طول را بدست آورید (وزن را در نظر بگیرید):



$$\delta=\delta_1+\delta_2$$

$$\delta=\left(\frac{PL_1}{E_1A_1}+\frac{W_1L_1}{2E_1A_1}\right)+\left(\frac{(P+W_1)L_2}{E_2A_2}+\frac{W_2L_2}{2E_2A_2}\right)$$

نکته: در رابطه $\delta=\frac{PL}{EA}$ ، δ در واقع جابجایی یک مقطع نسبت به یک مقطع دیگر یا جابجایی نسبی است و به طور کلی به صورت زیر بیان می‌گردد:



$$\delta_{B/A}=\delta_B-\delta_A=\frac{PL}{EA}$$

چنانچه نقطه A ثابت باشد آنگاه $\frac{PL}{EA}$ جابجایی نقطه B را نشان می‌دهد.

اما چنانچه نقطه A دارای جابجایی δ باشد آنگاه جابجایی نقطه B برابر است با:

$$\delta_B-\delta_A=\frac{PL}{EA} \longrightarrow \delta_B=\delta_A+\frac{PL}{EA}=\delta+\frac{PL}{EA}$$

کرنش حرارتی:

چنانچه عضوی تحت تغییرات دما، تغییر طولی به میزان δ_T بدهد، کرنش حرارتی آن را می‌توان از رابطه زیر تعیین کرد:

$$\text{کرنش} = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$$

$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L}$$

که در این رابطه $\delta_T = \alpha L \Delta T$ می‌باشد. در نتیجه:

$$\varepsilon_T = \frac{\alpha L \Delta T}{L} = \alpha \Delta T$$

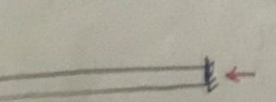
در روابط بالا α ضریب انبساط حرارتی $(\frac{1}{c^\circ})$ و ΔT تغییرات دما $(T_2 - T_1)$ برحسب درجه سانتیگراد (c°) است.

در روابط فوق α و L همیشه هم علامت هستند. ΔT می‌تواند مثبت و منفی شود. اگر جسم گرم شود منجر به ایجاد تنش فشاری کرده و علامت آن مثبت است و اگر جسم سرد شود باعث ایجاد تنش کششی در عضو شده و علامت آن منفی است.

نکته: هرگاه رفتار جسم تحت بارگذاری مرکب (نیروی خارجی و حرارت) در محدوده الاستیک خطی باشد آنگاه تغییر شکل به وجود آمده ناشی از بارگذاری مرکب برابر مجموع تغییر شکل‌های ایجاد شده ناشی از تک تک بارگذاری‌ها است. به این اصل روش جمع آثار قوا گفته می‌شود. با استفاده از این اصل می‌توان کرنش‌ها و تغییر شکل‌های یک سازه را تحت بارگذاری‌های مرکب به راحتی بدست آورد.

تنش حرارتی:

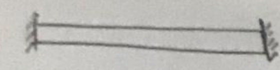
تنشی که بر اثر حرارت در عضوهای سازه به وجود می‌آید را تنش حرارتی گویند. اگر در عضو مورد بررسی قیدهایی که منجر به جلوگیری از تغییر مکان آزادانه آن می‌شود وجود داشته باشد، آنگاه در آن عضو تنش حرارتی به وجود خواهد آمد. در مقابل در سازه‌های معین استاتیکی در اثر تغییرات دما اجزای سازنده به طور آزادانه می‌توانند تغییر طول دهند و هیچ‌گونه تنشی در سازه ناشی از حرارت ایجاد نمی‌شود. در حالی که در سازه‌های نامعین استاتیکی به علت وجود قیدهای اضافه در سازه، موانعی در برابر تغییرات طول آزادانه میله‌ها وجود دارد و در چنین سازه‌هایی تنش حرارتی ایجاد می‌شود.

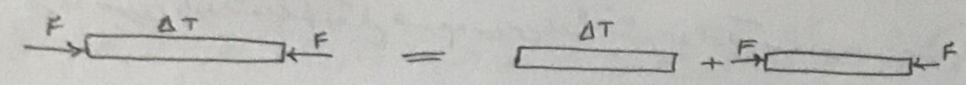


→ معین استاتیکی در اثر تغییر حرارت آزادانه تغییر شکل دارد و تنش در آن اتفاق نمی‌افتد

→ تیر نامعین استاتیکی که تکیه‌گاه‌ها مانع از جابجایی‌ها شده و منجر به ایجاد تنش در تیر می‌گردد

یک مثال: تعیین تنش در عضو دو سر گیردار:



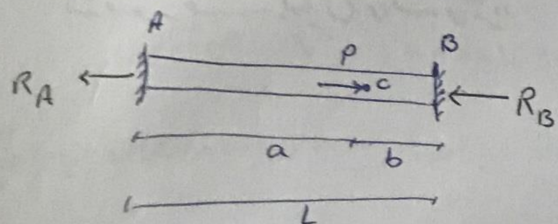


$$\delta=0 \longrightarrow \alpha L\Delta T-\frac{FL}{EA}=0 \longrightarrow \frac{F}{A}=(\alpha L\Delta T)\times\left(\frac{E}{L}\right)=E\alpha\Delta T$$

حل مسائل نامعین:

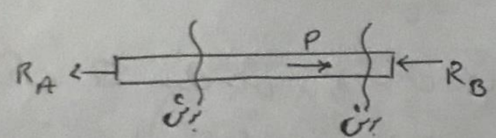
در سازه های معین می توان با استفاده از معادلات تعادل نیروها را تعیین نمود ولی در سازه های نامعین یافتن عکس العمل ها و نیروهای داخلی با استفاده از نمودارهای جسم آزاد و معادلات تعادل به تنهایی امکان پذیر نیست. از اینرو برای تحلیل این سازه ها علاوه بر معادلات تعادل از معادلات اضافی دیگری نیز استفاده می شود که به آن معادلات سازگاری گفته می شود. در معادلات سازگاری باید تغییر شکلهای سازه با شرایط تکیه گاهی سازگار باشد.

به عنوان مثال:



شرط تعادل: $\sum F_x=0 \longrightarrow R_A+R_B=P$ (I)

دیاگرام آزاد تیر:



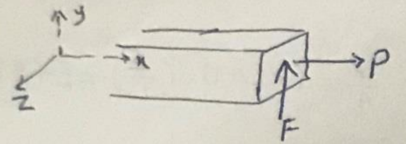
شرط سازگاری: $\delta_{AB}=\delta_{AC}+\delta_{CB}=0 \longrightarrow \frac{R_A a}{EA}-\frac{R_B\cdot b}{EA}=0$

$$\longrightarrow R_A a-R_B\cdot b=0 \quad (II)$$

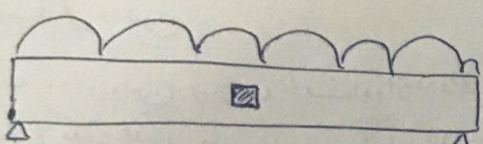
$$(I),(II) \longrightarrow \begin{cases} R_A=P\frac{b}{L} \\ R_B=P\frac{a}{L} \end{cases}$$

تنش برشی :

هرگاه نیرویی وارد شده بر سطح مقطع جسم، مماس باشد تنش به وجود آمده در عضو تنش برشی خواهد بود.

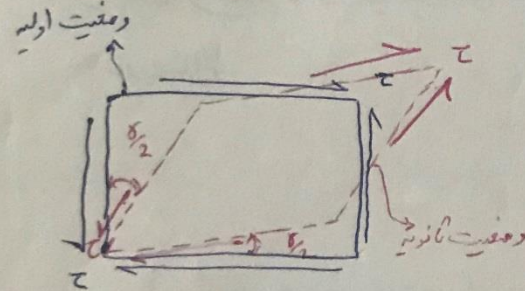


$$\tau = \frac{F}{A}$$



کرنش برشی :

مطابق شکل یک بار گسترده بر تیر اعمال می‌گردد چنانچه المانی از تیر را در نظر بگیرید که بر آن تنش برشی خالص اعمال شود تغییر طولی در ابعاد المان ایجاد نخواهد شد ولی زوایا دستخوش تغییرات می‌شوند. مقدار تغییر زاویه وجوه المان بیانگر کرنش برشی خواهد بود که با نماد γ بیان شده و بر حسب رادیان محاسبه می‌گردد:



طبق قانون هوک ارتباط بین تنش و کرنش برشی در محدوده الاستیک خطی به صورت زیر می‌باشد:

$$\tau = G\gamma$$

که در آن G مدول برشی و γ کرنش برشی می‌باشد.

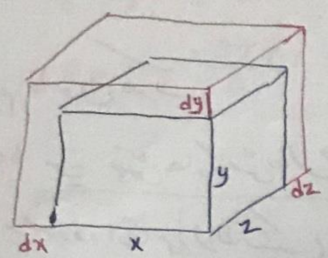
همچنین ارتباط بین مدول برشی و مدول الاستیسیته به صورت زیر بیان می‌گردد:

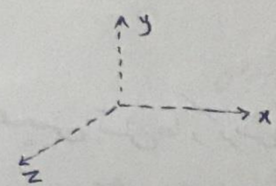
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

واحد مدول برشی مشابه مدول الاستیسیته است و به صورت kPa یا kg/cm^2 یا N/m^2 و مشابه این نشان داده می‌شود.

کرنش حجمی:

اگر جسم مکعبی تحت بارگذاری قرار گیرد ابعادش تغییر نموده و آن منجر به تغییر در حجم جسم می گردد.
با توجه به تعریف کرنش، نسبت تغییر حجم به حجم اولیه معرف کرنش حجمی می باشد.





حجم اولیه $V = xyz$

حجم ثانویه $V' = (x+dx)(y+dy)(z+dz) = xyz + yzdx + zxdy + xydz$

در رابطه V' به دلیل کوچک بودن dx و dy و dz، پارامترهای مضرب دو یا سه مورد از این جزءها حذف گردید.

$$V' = V + yzdx + zxdy + xydz = V + \Delta V$$

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{yzdx + zxdy + xydz}{xyz} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

بنابراین $\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

که به آن تغییر حجم نسبی گویند. حال با توجه به راستای بارگذاری هم می توان کرنش حجمی را بدست آورد.

الف - چنانچه جسم تحت یک نیروی محوری در راستای x باشد:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

داریم: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$

بنابراین: $\varepsilon_v = \varepsilon_x + (-\nu\varepsilon_x) + (-\nu\varepsilon_x) = \varepsilon_x(1-2\nu)$

$$\begin{cases} \text{اگر } \nu = 0 \longrightarrow \varepsilon_v = \varepsilon_x \\ \text{اگر } \nu = 1/2 \longrightarrow \varepsilon_v = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le \nu \le 0.5$$

ب - تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

در این حالت کرنش در راستای x و y و z برابر با $\alpha\Delta T$ است. از اینرو:

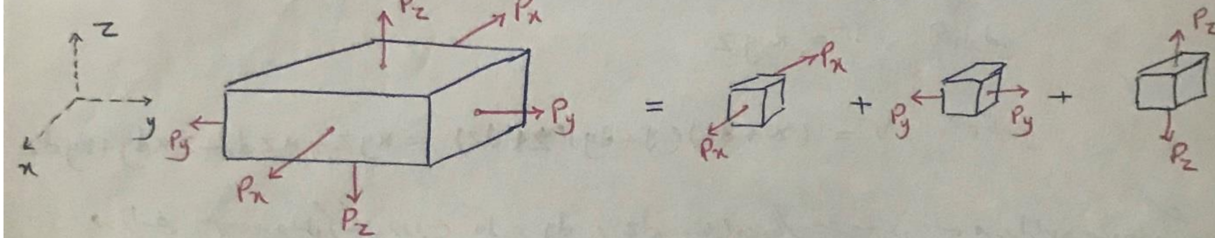
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_v = 3\varepsilon_x = 3\alpha\Delta T \rightarrow \underline{\underline{3\alpha}}$$ ضریب انبساط حجمی است

تعمیم قانون هوک:

ارتباط بین تنش‌ها و کرنش‌های محوری و همچنین تنش‌ها و کرنش‌های برشی در بارگذاری‌های مختلف و در محدوده ارتجاعی (الاستیک) خطی از قانون هوک مطابق زیر بدست می‌آید:

الف - تنش و کرنش محوری



قانون هوک: $\sigma = \varepsilon E \rightarrow \varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$

همچنین: $\varepsilon' = -\nu\varepsilon = -\nu\dfrac{\sigma}{E}$

$$\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} \longrightarrow \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\[2ex]
\varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} \longrightarrow \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \\[2ex]
\varepsilon_z = \underbrace{-\nu\dfrac{\sigma_x}{E}}_{\text{بارگذاری در جهت x}} \underbrace{- \nu\dfrac{\sigma_y}{E}}_{\text{بارگذاری در جهت y}} + \underbrace{\dfrac{\sigma_z}{E}}_{\text{بارگذاری در جهت z}} \longrightarrow \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))
\end{array}\right.$$

چنانچه کرنش‌های ناشی از بارگذاری حرارتی هم داشته باشیم آنگاه داریم:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z + \nu(\sigma_x + \sigma_y)) + \alpha\Delta T$$

با توجه به کرنش حجمی خواهیم داشت :

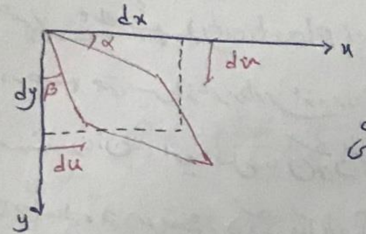
$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

چنانچه عضو تحت تنش هیدرواستاتیک قرار گیرد آنگاه خواهیم داشت:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma$$

$$\varepsilon_v = \frac{-3\sigma}{E}(1-2\nu)$$

ب - تنش و کرنش برشی:



کرنش برشی

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \alpha + \beta = \dfrac{dv}{dx} + \dfrac{du}{dy} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{du}{dz} + \dfrac{dw}{dx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = G\,\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} \\ \tau_{xz} = G\,\gamma_{xz} \end{cases} , \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \end{cases}$$

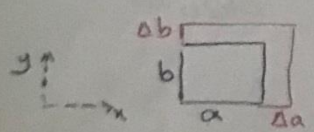
نکته : چنانچه جسمی تحت تنش همه جانبه σ قرار گیرد آنگاه نسبت تنش به کرنش حجمی برابر با مدول بالک (k) خواهد بود.

$$k = \frac{\sigma}{\varepsilon_v} = \frac{\sigma}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} = \frac{\sigma \cdot V}{\Delta V} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

نکته: مقدار تغییرات نسبی مساحت ورق یا کرنش سطحی تحت بارگذاری دو بعدی را می توان از رابطه زیر تعیین نمود.

بارگذاری در ۲ راستا.

$$\varepsilon_A = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\text{تغییر مساحت}}{\text{مساحت اولیه}}$$



$$\Longrightarrow A = ab \quad , \quad A' = (a+\Delta a)(b+\Delta b) = ab + \overbrace{b\Delta a + a\Delta b}^{\Delta A}$$

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

مثال ۱- قطعه ای به طول 250^{mm} و سطح مقطع 50×40^{mm} با بار فشاری P نگهداری می شود. ماده بکار رفته در این قطعه از برنز با $E=95\,GPa$ است. معین کنید بیشترین باری که بتوان بر آن وارد نمود، با دانستن اینکه تنش عمودی نباید از $80\,MPa$ تجاوز کند و کاهش در طول قطعه نباید 0.12 درصد طول اولیه بیشتر باشد.

طول قطعه $L = 250^{mm}$

سطح مقطع $A = 50\times 40\ mm = 2000\ mm^2 = 2\times 10^{-3}\ m^2$

$E = 95\ GPa = 95\times10^{3}\ MPa = 95\times 10^{6}\ kPa$

مجاز $\sigma = 80\ MPa = 80\times10^{3}\ kPa$

$\varepsilon = 0.12\ \% \longrightarrow \varepsilon = \frac{\delta}{L} \rightarrow \delta = \frac{0.12}{100}\times L$

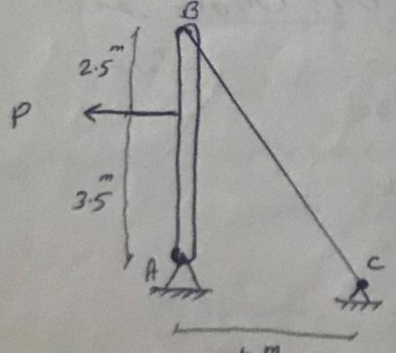
در این مسئله می توان ۲ بار P را تعیین نمود و هر کدام که بیشتر باشد به عنوان بار مجاز انتخاب می گردد.

(1) $\sigma = \frac{P}{A} \longrightarrow P = \sigma \cdot A = (80\times10^{3})\times(2\times10^{-3}) = 160\ kN$

(2) $\delta = \frac{PL}{EA} \longrightarrow P = EA\left(\frac{\delta}{L}\right) = (95\times10^{6})\times(2\times10^{-3})\times\left(\frac{0.12}{100}\right) = 228\ kN$

بنابراین کمترین بار $P=160\ kN$ انتخاب می گردد. به این دلیل که مقدار بار مجاز براساس تنش مجاز قطعه بدست آمده است و بارهای فراتر از آن منجر به گسیختگی در قطعه خواهد شد.

مثال ۲- قطر کابل BC برابر 4^{mm} و از فولادی با $E=200\ GPa$ ساخته شده است. تنش مجاز در کابل برابر $190\ MPa$ است و طول کابل نباید از 6^{mm} تجاوز کند. مطلوب است حداکثر بار P.



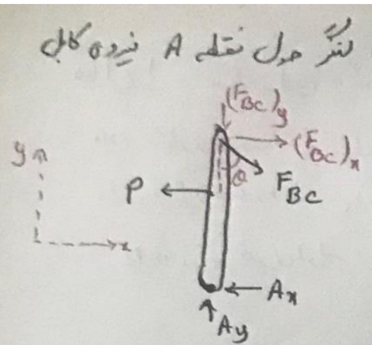
کابل $d = 4\ m \longrightarrow A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{1000}\right)^2 = 12.57\times10^{-6}\ m^2$

$E = 200\ GPa = 200\times10^{6}\ kPa$

مجاز کابل $\sigma = 190\ MPa = 190\times10^{3}\ kPa$

مجاز کابل $\delta = 6\ mm = 6\times10^{-3}\ m$

دیاگرام آزاد جسم به صورت مقابل است که می‌توان با گرفتن لنگر حول نقطه A نیروی کابل را براساس P بدست آورد.



$$\tan\theta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{طول کابل} \quad L_{BC} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7.2 \ m$$

$$\sin\theta = \frac{4}{7.2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{6}{7.2}$$

$$(F_{BC})_x = F_{BC} \cdot \sin\theta = \frac{4}{7.2} \cdot F_{BC}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \longrightarrow -\left(\frac{4}{7.2} F_{BC}\right) \times 6 + P \times 3.5 = 0 \longrightarrow F_{BC} = 1.05 P$$

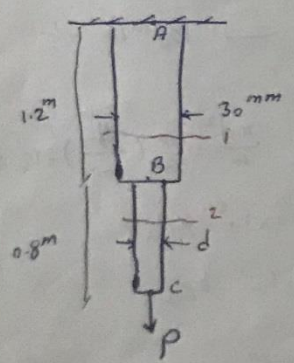
① تنش مجاز $\sigma = \dfrac{F_{BC}}{A} = \dfrac{1.05 P}{A} \longrightarrow P = \dfrac{\sigma \cdot A}{1.05} = \dfrac{(190\times10^3)(12.57\times10^{-6})}{1.05} = 2.27 \ kN$

② تغییر طول مجاز $\delta = \dfrac{F_{BC} \cdot L}{EA} = \dfrac{(1.05P)\times L}{EA} \longrightarrow P = \dfrac{EA}{1.05} \times \dfrac{\delta}{L}$

$$\longrightarrow P = \frac{(200\times10^6)(12.57\times10^{-6})}{1.05} \times \frac{(6\times10^{-3})}{7.2} = 1.99 \ kN$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌گردد مقدار بار کنترل کننده در حالت تغییر طول مجاز برابر $P = 1.99^{kN}$ بدست آمده است. چنانچه بیشتر از این مقدار بار اعمال گردد گسیختگی و پارگی در کابل ایجاد خواهد شد.

مثال ۳- بار محوری منفرد به مقدار $P = 58 \ kN$ در انتهای C از میله برنجی ABC وارد می‌شود. مدول الاستیسیته برنج برابر $E = 105 \ GPa$ است. مطلوب است قطر d بخش BC را به طوری که تغییر مکان نقطه C برابر 3^{mm} باشد.



به طور جدا می‌توان ۲ برش زده و بار هر طول یک مقدار تغییر مکان بدست.

$$\delta_c = \delta_1 + \delta_2 = \delta_{AB} + \delta_{BC}$$

$$\longrightarrow \delta_c = \frac{P L_{AB}}{E A_{AB}} + \frac{P L_{BC}}{E A_{BC}}$$

$$\begin{cases} L_{AB} = 1.2 \\ A_{AB} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{30}{1000}\right)^2 = 0.707\times10^{-3} \\ L_{BC} = 0.8 \\ A_{BC} = \frac{\pi}{4} d^2 \end{cases}$$

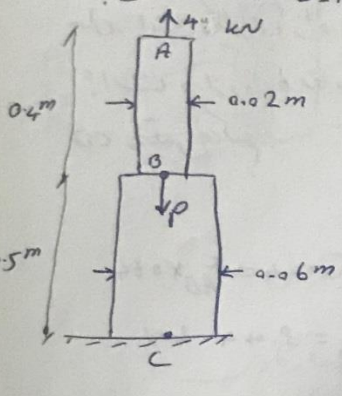
$\delta_c = 3^{mm} = \dfrac{3}{1000} \ m$

$E = 105 \ GPa = 105\times10^6 \ kPa$

$P = 58 \ kN$

$$0.003 = \frac{58 \times 1.2}{(105\times10^{6})(0.707\times10^{-3})} + \frac{58 \times 0.8}{(105\times10^{6})\times(\frac{\pi}{4}d^{2})} \longrightarrow d = 16.5\ mm = 0.0165\ m$$

مثال ۶- با توجه به شکل و نوع بارگذاری، مدول الاستیسیته برابر $E=70\ GPa$ است. مطلوب است:



الف- مقدار P به طوری که تغییر مکان در A صفر باشد.

ب- تغییر مکان متناظر B.

$$A_{AB} = \frac{\pi}{4}(0.02)^2 = 314.16\times10^{-6}\ m^2$$

$$A_{BC} = \frac{\pi}{4}(0.06)^2 = 2.83\times10^{-3}\ m^2$$

$$E = 70\ GPa = 70\times10^{6}\ kPa$$

الف- مقدار تغییر طول در عضو AB (حالت کششی) باید برابر با مقدار تغییر طول در عضو BC (حالت فشاری) باشد.

$$\delta_{AB} = \frac{4\ \times 0.4}{(70\times10^{6})(314.16\times10^{-6})} = 72.76\times10^{-6}\ m$$

مقدار نیرو در عضو BC برابر است با $(P-48)$:

$$\delta_{BC} = \frac{(P-4\ )\times 0.5}{(70\times10^{6})\times(2.83\times10^{-3})}$$

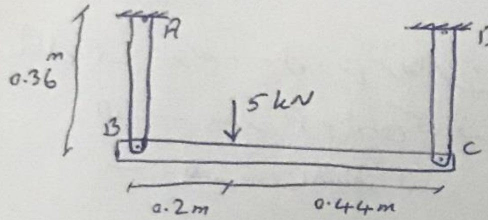
$$\delta_{AB} = \delta_{BC} \longrightarrow (P-4\ ) = 4\ \times(\frac{0.4}{0.5})\times\frac{2.83\times10^{-3}}{314.16\times10^{-6}} = 28.8\ kN$$

$$\longrightarrow P = 4\ + 28.8 = 32.8\ kN$$

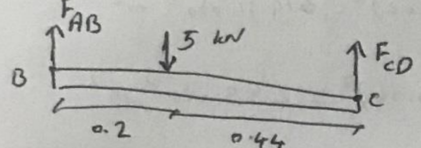
ب- تغییر مکان A به سمت بالا است و نیز برابر با تغییر مکان B به سمت پایین باشد تا با آن مقابله کند. در این صورت تغییر مکان A و B از نظر مقدار باهم برابر می باشند.

$$\delta_A = \delta_B = 72.76\times10^{-6}\ m$$

مثال ۵- هر یک از اتصالهای AB و CD از آلومینیوم $E=75\,GPa$ ساخته شده است و دارای مساحت سطح مقطع $125\ mm^2$ است. می‌دانیم آنها عضو صلب BC را نگه می‌دارند. مطلوب است تغییر مکان نقطه E.



حل: ابتدا دیاگرام آزاد جسم را رسم نموده و با استفاده از روابط تعادل نیروی اعضای AB و CD را تعیین می‌کنیم.



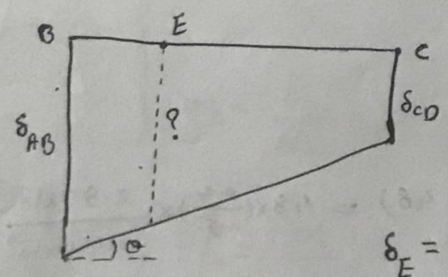
$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0 \rightarrow 5 \times 0.44 = F_{AB} \times 0.64$$

$$\rightarrow F_{AB} = 3.44\ kN$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AB} + F_{CD} = 5 \rightarrow F_{CD} = 5 - 3.44 = 1.56\ kN$$

حال می‌توان با استفاده از رابطه تغییر مکان محوری عضو، تغییر شکل اعضای AB و CD را تعیین نمود:

$$\delta = \frac{FL}{EA} \longrightarrow \begin{cases} \delta_{AB} = \dfrac{3.44 \times 0.36}{(75\times10^6)\times(125\times10^{-6})} = 132.0 \times 10^{-6}\ m \\[2ex] \delta_{CD} = \dfrac{1.56 \times 0.36}{(75\times10^6)\times(125\times10^{-6})} = 60 \times 10^{-6}\ m \end{cases}$$



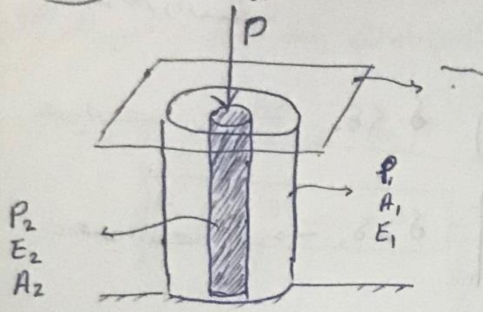
$$\theta = \frac{\delta_{AB} - \delta_{CD}}{0.64} = 112.5 \times 10^{-6}\ rad$$

$$\delta_E = \delta_{AB} - (0.2 \times \theta) = 109.5 \times 10^{-6}\ m$$

or

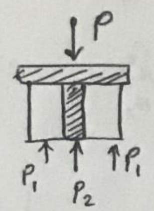
$$\delta_E = \delta_{CD} + (0.44 \times \theta) = 109.5 \times 10^{-6}\ m$$

مثال ۶- چنانچه یک میله داخل یک لوله قرار گیرد، مطابق شکل مطلوب است تعیین نیروی محوری به وجود آمده تحت بارگذاری نشان داده شده.



یک بار P بر روی صفحه صلب اعمال گردید.

دیاگرام آزاد:



رابطه تعادل: $\quad P_1 + P_2 = P \quad$ (I)

رابطه سازگاری: $\quad \delta_1 = \delta_2 \longrightarrow \dfrac{P_1 L_1}{E_1 A_1} = \dfrac{P_2 L_2}{E_2 A_2} \quad$ (II)

با استفاده از روابط (I) و (II):

$$\begin{cases} P_1 = P \dfrac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \\ P_2 = P \dfrac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \end{cases}$$

بنابراین هرچه صلبیت محوری عضوی بیشتر باشد آن عضو بار بیشتری را می تواند تحمل کند.

میزان تنش در عضوها

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{P_1}{A_1} = P \dfrac{E_1}{\Sigma EA} \\ \sigma_2 = \dfrac{P_2}{A_2} = P \dfrac{E_2}{\Sigma EA} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

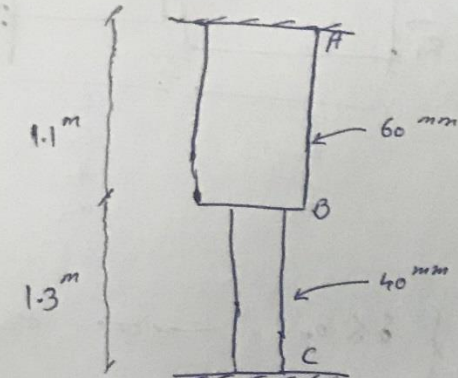
میزان کرنش در عضو

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E_2} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \end{cases}$$

میزان تغییر شکل در اعضا

$$\begin{cases} \delta_1 = \varepsilon_1 L = \dfrac{PL}{\Sigma EA} \\ \delta_2 = \varepsilon_2 L = \dfrac{PL}{\Sigma EA} \end{cases}$$

مثال ۱۲- میله‌ای شامل دو قسمت استوانه‌ای AB و BC در انتهای محدود نگه داشته شده است. قسمت AB از برنج و قسمت BC از آلومینیوم است. مطلوب است: الف) تنش‌های عمودی در قسمت AB و BC با ازدیاد دمای $42^{\circ}C$ و ب) تغییر مکان متناظر نقطه B



AB	BC
$E_b = 105\ GPa$	$E_a = 72\ GPa$
$\alpha_b = 20.9 \times 10^{-6}\ \frac{1}{^{\circ}C}$	$\alpha_a = 23.9 \times 10^{-6}\ \frac{1}{^{\circ}C}$

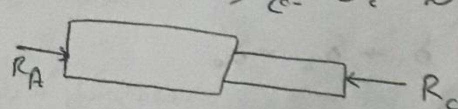
الف -

$$A_{AB} = \frac{\pi}{4}(60^2) = 2.83 \times 10^3\ mm^2 = 2.83 \times 10^{-3}\ m^2$$

$$A_{BC} = \frac{\pi}{4}(40)^2 = 1.26 \times 10^3\ mm^2 = 1.26 \times 10^{-3}\ m^2$$

* همان‌طور که ملاحظه می‌گردد تکیه‌گاه‌ها در A و C گیردار است. بنابراین افزایش حرارت منجر به ایجاد تغییر مکان می‌گردد که این تغییر مکان توسط تکیه‌گاه‌ها جذب شده و باعث به وجود آمدن عکس‌العمل تکیه‌گاهی خواهد شد. چون هیچ نیروی خارجی وجود ندارد پس:

$$R_A = R_C = R$$



افزایش تغییرمکان ناشی از حرارت
$$\delta_T = \alpha_b L_{AB} \Delta T + \alpha_a L_{BC} \Delta T = 2.27 \times 10^{-3}\ m$$

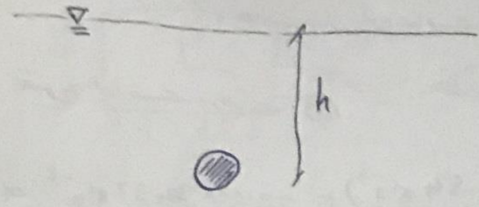
مقابله عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در مقابل تغییرمکان
$$\delta_R = \frac{R L_{AB}}{(EA)_{AB}} + \frac{R L_{BC}}{(EA)_{BC}} = 18.074 \times 10^{-9} R$$

رابطه سازگاری:
$$\delta_T = \delta_R \rightarrow 2.27 \times 10^{-3} = 18.074 \times 10^{-9} R \rightarrow R = 125.62 \times 10^3\ N$$

تنش‌ها
$$\begin{cases} \sigma_{AB} = -\frac{R}{A_{AB}} = -44.4 \times 10^6\ Pa \\ \sigma_{BC} = -\frac{R}{A_{BC}} = -100 \times 10^6\ Pa \end{cases}$$

ب -
$$\delta_B = \alpha_b L_{AB} \Delta T - \frac{R L_{AB}}{(EA)_{AB}} = 500 \times 10^{-6}\ m = 0.5\ mm$$

مثال ۱۳- تغییر حجم یک گوی در عمق h از سطح آب را تعیین کنید.



اگر یک گوی در عمق h از سطح آب قرار گرفته باشد آنگاه تنش وارده به گوی برابر است با

$$\sigma = \gamma . h$$

که در این رابطه γ وزن واحد حجم آب است.
بنابراین یک تنش همه جانبه به گوی وارد شده است.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(+\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right)$$

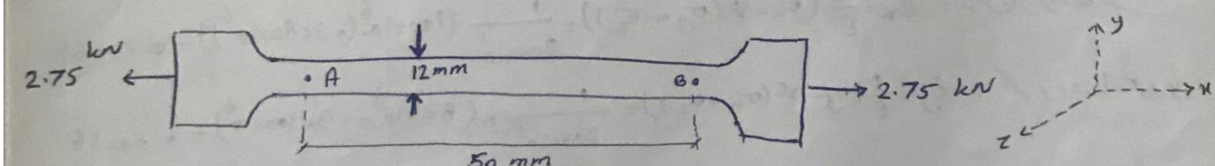
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\gamma h$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\gamma h}{E}(2\nu - 1)$$

کرنش حجمی $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon = \frac{3\gamma h}{E}(2\nu - 1)$

تغییر حجم : $\varepsilon_v = \frac{\Delta v}{v} \longrightarrow \Delta v = \varepsilon_v \cdot V$

مثال ۱۴- بار کششی 2.75 kN بر ورق مطابق شکل که دارای ضخامت 1.6^{mm} و $E = 200 \times 10^6$ kPa و $\nu = 0.3$ وارد شده است. مطلوب است تغییر در طول 50^{mm} میانه ورق، تغییر در عرض قسمت AB، تغییر در ضخامت قسمت AB و تغییر در مساحت قسمت AB.



مساحت مقطع ورق در قسمت AB : $A = 12 \times 1.6 = 19.2 \ mm^2 = 19.2 \times 10^{-6} \ m^2$

تنش در جهت x : $\sigma_x = \frac{2.75}{19.2 \times 10^{-6}} = 143.23 \times 10^3 \ kPa$

کرنش در جهت x : $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x + \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right) = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{143.23 \times 10^3}{200 \times 10^6} = 716.15 \times 10^{-6}$

کرنش در جهت y و z : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -0.3 \times 716.15 \times 10^{-6} = -214.84 \times 10^{-6}$

محاسبه تغییر طول در قسمت AB:

$\delta_x = L_{AB} \cdot \varepsilon_x = 0.05 \times 716.15 \times 10^{-6} = 35.8 \times 10^{-6} \ m$ ← افزایش طول

تعیین عرض صفحه AB:

$$\delta_y = 0.012\times(-214.84\times10^{-6}) = -2.578\times10^{-6}$$

علامت منفی به این معناست که کاهش عرض وجود دارد.

تعیین ضخامت در صفحه AB:

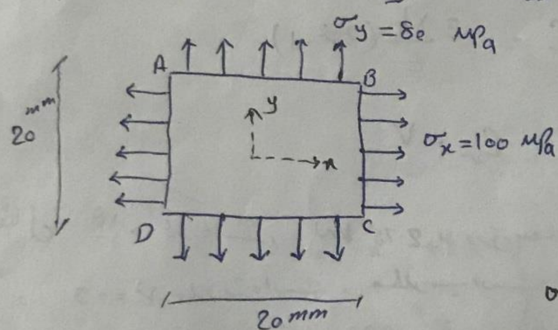
$$\delta_z = 0.0016\times\varepsilon_z = 0.0016\times(-214.84\times10^{-6}) = -0.0003437\times10^{-2}\ m$$

علامت منفی یعنی اینکه کاهش ضخامت وجود دارد.

تعیین تغییرات در سطح مقطع:

$$\Delta A = a\cdot b(\overbrace{\varepsilon_z+\varepsilon_y}^{2\varepsilon_y}) = 2\times0.012\times0.0016\times(-214.84\times10^{-6}) = -8.25\times10^{-9}\ m^2$$

مثال ۱۵- المان از یک مخزن تحت تنش در دو راستای x و y قرار گرفته است. این المان مربع و دارای بعد 20^{mm} است. مطلوب است تعیین درصد تغییرات شیب در قطر BD.



$E = 200\ GPa$, $G = 77.2\ GPa$

$\nu = 0.3$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

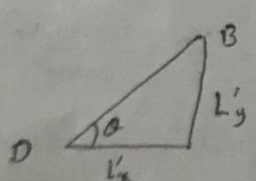
$\sigma_x = 100\times10^6\ Pa$, $\sigma_y = 80\times10^6\ Pa$, $\sigma_z = 0$

کرنش در راستای x: $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)) = \frac{1}{200\times10^9}(100\times10^6-(0.3\times80\times10^6)) = 0.00068$

کرنش در راستای y: $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)) = \frac{1}{200\times10^9}\times(80\times10^6-0.3\times100\times10^6) = 0.00016$

$\delta_x = L_x\cdot\varepsilon_x$, طول جدید $L'_x = L_x + L_x\varepsilon_x = L_x(1+\varepsilon_x)$

$\delta_y = L_y\cdot\varepsilon_y$, طول جدید $L'_y = L_y(1+\varepsilon_y)$



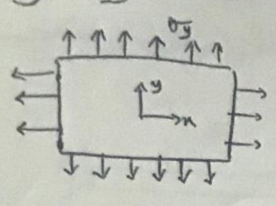
$\rightarrow \tan\theta' = \frac{L'_y}{L'_x} = \frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_x} = 0.99$

اولیه $\tan\theta = \frac{L_y}{L_x} = 1$

$\rightarrow$ تغییر شیب $\Delta\theta = 0.99-1 = -0.01$

علامت منفی یعنی اینکه کاهش شیب به وجود آمد.

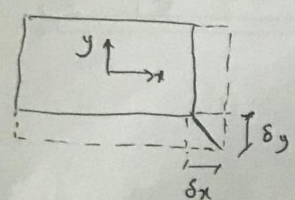
مثال ۱۶ - چنانچه المان تحت تنش در دو راستا قرار گیرد، مطلوب است تعیین σ_y تا تغییر ضخامت وجود نداشته باشیم.



برای اینکه تغییر ضخامت به وجود نیاید باید کرنش در راستای z برابر صفر شود:

$$\varepsilon_z = 0 \longrightarrow \frac{1}{E}\Big(\underbrace{\sigma_z}_{\text{صفر}} - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\Big) = 0 \longrightarrow \sigma_y = -\sigma_x$$

چنانچه $\sigma_y = \sigma_x$ باشد مطلوب است تعیین تغییرات قطر:



$$\delta'_{\text{تغییر قطر}} = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2}$$

$$\delta_x = L_x \cdot \varepsilon_x$$

$$\delta_y = L_y \cdot \varepsilon_y$$

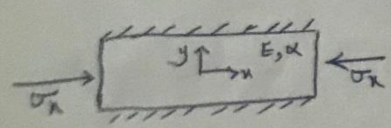
درصورتی که میزان تنش $\sigma_y \neq \sigma_x$ باشد باید به این روش عمل کرد.

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= \varepsilon_x L_x + L_x \\ L'_y &= \varepsilon_y L_y + L_y \end{aligned}\right\} \longrightarrow D' = \sqrt{L'^2_x + L'^2_y}$$

$$D = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$$

$$\text{تغییر قطر} \quad \Delta D = D' - D$$

مثال ۱۷- ورقی مطابق شکل در دو راستای y مقید شده است و در راستای x تحت تنش فشاری قرار دارد. درصورتیکه ورق حرارت داده شود مقدار افزایش دمای T_0 را به گونه‌ای بیابید که مساحت ورق هیچ گونه تغییری نکند.



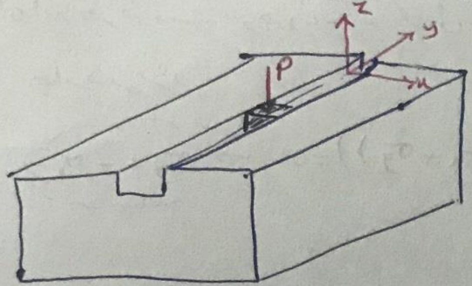
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = 0 \longrightarrow \sigma_y = -\nu\sigma_x \qquad \text{(I)}$$

$$\varepsilon_A = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + 2\alpha T_0 = 0 \qquad \text{(II)}$$

(I) را در (II) قرار دهیم $\longrightarrow \dfrac{1-\nu}{E}(-\sigma_x - \nu\sigma_x) + 2\alpha T_0 = 0 \longrightarrow T_0 = \dfrac{(1-\nu^2)\sigma_x}{2E\alpha}$

مثال ۱۸: قطعه ای در داخل یک شیار قرار داده شده که در راستای x مقید شده است. مطلوب است تعیین تنش ها و کرنشها در سه راستا. بر روی قطعه یک بار به میزان 60 kPa اعمال گردیده است.

$$E = 700 \times 10^6 \ kPa \quad , \quad \nu = 0.33$$



همانگونه که ملاحظه میگردد قطعه در راستای y و z می تواند تغییر طول دهد و در راستای x مقید شده است.

$$\varepsilon_x = 0$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

میزان تنش در راستای z برابر است با $\sigma_z = \frac{P}{A}$ و همچنین در راستای y تنش را تحمل نخواهد کرد.

$$\sigma_y = 0$$

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{60}{A} = 60 \ kPa$$

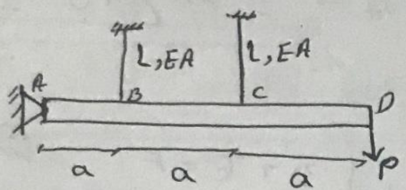
حال خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x = 0 = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \longrightarrow \sigma_x = \nu \sigma_z = 0.33 \times 60 = 20 \ kPa$$

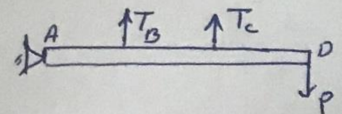
$$\varepsilon_y = \frac{1}{700 \times 10^6}(0 - 0.33(60 + 20)) =$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{700 \times 10^6}(60 - 0.33(20 + 0)) =$$

مثال ۱۹ - میله صلب AD با استفاده از ۲ کابل با قطر a و تکیه‌گاه مفصلی به صورت افقی قرار گرفته است. چنانچه نیروی P در D وارد گردد میزان کشش در کابل‌ها را تعیین کنید. میزان تغییر شکل قائم نقطه D را محاسبه نمائید.

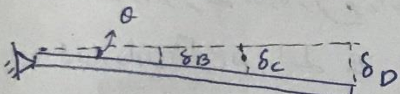


همان گونه که ملاحظه می‌گردد با تعیین نیروی کشش در دو کابل میزان کشش بدست خواهد آمد. از اینرو ۲ مجهول نیرویی در B و C وجود دارد که می‌توان با یک رابطه تعادل و یک رابطه سازگاری آنها را تعیین نمود.



$$\sum M_A = 0 \rightarrow 3Pa = 2T_C a + T_B a$$

$$\rightarrow 2T_C + T_B = 3P \quad \text{I}$$



$$\frac{\delta_B}{\delta_C} = \frac{a}{2a} \quad \text{or} \quad \theta = \frac{\delta_B}{a} = \frac{\delta_C}{2a}$$

$$\frac{\frac{T_B \cdot L}{EA}}{\frac{T_C \cdot L}{EA}} = \frac{a}{2a} \rightarrow \frac{T_B}{T_C} = \frac{1}{2} \rightarrow T_B = \frac{1}{2} T_C \quad \text{or} \quad T_C = 2T_B \quad \text{II}$$

II را در I قرار دهیم:

$$2(2T_B) + T_B = 3P \rightarrow 5T_B = 3P \rightarrow \boxed{T_B = \frac{3}{5}P}$$

و

$$\boxed{T_C = 2T_B = \frac{6}{5}P}$$

بنابراین:

$$\delta_C = \frac{\frac{6}{5}P \cdot L}{EA} \quad , \quad \delta_B = \frac{\frac{3}{5}PL}{EA}$$

میزان تغییر شکل در D:

$$\theta = \frac{\delta_D}{3a} \rightarrow \delta_D = 3a\theta = 3a\left(\frac{\delta_B}{a}\right) = 3\delta_B = \frac{\frac{9}{5}PL}{EA}$$

تبدیلات تنش و کرنش

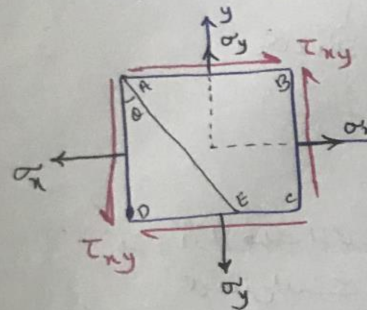
دایره مور

در این فصل مقادیر تنش و کرنش در هر نقطه از جسم در صفحات مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در ابتدا عمومی‌ترین حالت تنش دو بعدی (صفحه‌ای) در یک نقطه دلخواه از جسم در حالت تعادل مورد ارزیابی قرار داده می‌شود. یک المان بسیار کوچک به شکل روبرو در نظر گرفته می‌شود.

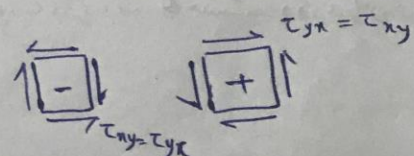
تنش‌های قائم σ_x و σ_y و تنش برشی τ_{xy} بر وجوه المان وارد می‌شود.

به دلیل کوچک بودن المان و حفظ تعادل تنش‌های قائم روبروی هم و تنش‌های برشی بر چهار وجه المان یکسان می‌باشند.

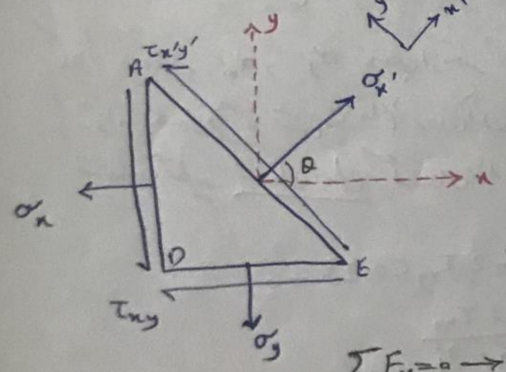


قانون: تنش قائم ← کششی ← مثبت

تنش برشی ← مطابق زیر مثبت و منفی



با توجه به مثلث ADE، تعیین تنش روی صفحه AE به صورت زیر و با نوشتن معادله تعادل بدست می‌آید:



اگر مساحت صفحه AE برابر A_0 باشد آنگاه مساحت صفحه AD برابر $A_0\cos\theta$ و مساحت صفحه DE برابر $A_0\sin\theta$ است.

$$\sum F_x=0 \longrightarrow \sigma_{x'}A_0\cos\theta-\tau_{x'y'}A_0\sin\theta-\tau_{xy}A_0\sin\theta-\sigma_x A_0\cos\theta=0$$

$$\sum F_y=0 \longrightarrow \sigma_{x'}A_0\sin\theta+\tau_{x'y'}A_0\cos\theta-\tau_{xy}A_0\cos\theta-\sigma_y A_0\sin\theta=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{x'} - \tau_{x'y'} \tan\theta = \tau_{xy} \tan\theta + \sigma_x \\ \sigma_{x'} + \tau_{x'y'} \cot\theta = \tau_{xy} \cot\theta + \sigma_y \end{cases}$$

با حل معادله فوق می توان تنش های اصلی روی صفحه مایل $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ و $\tau_{x'y'}$ را پیدا کرد.

نکته: برای تعیین $\sigma_{y'}$ کافی است در معادله $\sigma_{x'}$ زاویه θ را با $\theta+90$ تغییر داد.

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}, \quad 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \sigma_{y'} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

نکته: اگر از حرکت از محور x به x' حرکت پادساعتگرد باشد θ مثبت و در غیر این صورت θ منفی است.

نکته: مجموع تنش های متعامد:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

این رابطه نشان می دهد که مجموع تنش های متعامد اعمال شده بر وجوه المان تنش صفحه ای ثابت بوده و مستقل از زاویه θ است.

نکته: مقادیر $\sigma_{x'}$ و $\sigma_{y'}$ تابعی از متغیر θ بوده و به ازا زاویه مشخصی تنش های قائم اکسترمم می گردند. به زاویه صفحه ای که تنش های قائم بر روی آن دارای حداکثر و حداقل مقدار می شوند زوایای اصلی و به مقادیر تنش های نظیر تنش های اصلی گفته می شود.

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \longrightarrow -2 \times \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta_p + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

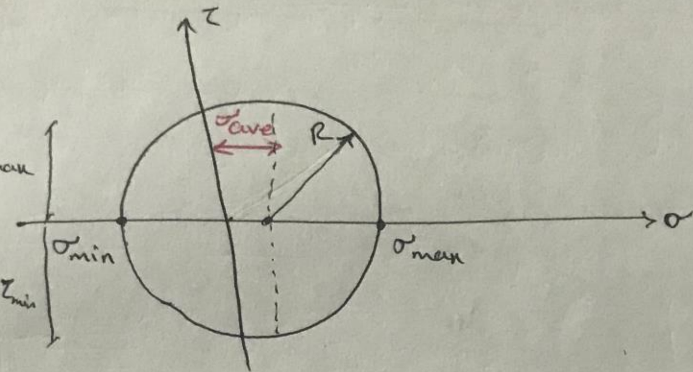
$$\longrightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

به θ_p زاویه صفحات اصلی گفته می شود.

از رابطه فوق دو مقدار $2\theta_p$ که ۱۸۰ درجه با هم اختلاف دارند و یا دو مقدار θ_p که ۹۰ درجه با هم اختلاف دارند بدست می آید. مقدار تنش های اصلی را می توان با قرار دادن زوایای اصلی در روابط فوق بدست آورد.

تنش‌های اصلی
$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_{ave} + R \\ \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R \end{cases}$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad , \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



دایره مور

از این دایره برای تعیین نمودن تنش در راستاهای مختلف در یک نقطه از جسم استفاده می‌شود. به عنوان مثال اگر σ_x و σ_y و τ_{xy} معین باشند می‌توان به جای استفاده از روابط بالا دایره مور تنش را رسم نموده و از آن برای تعیین مولفه‌ها تنش در راستاهای دیگر استفاده نمود:

از روابط بالا استفاده می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta\right)^2 \\ \tau_{x'y'}^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta\right)^2 \end{cases}$$

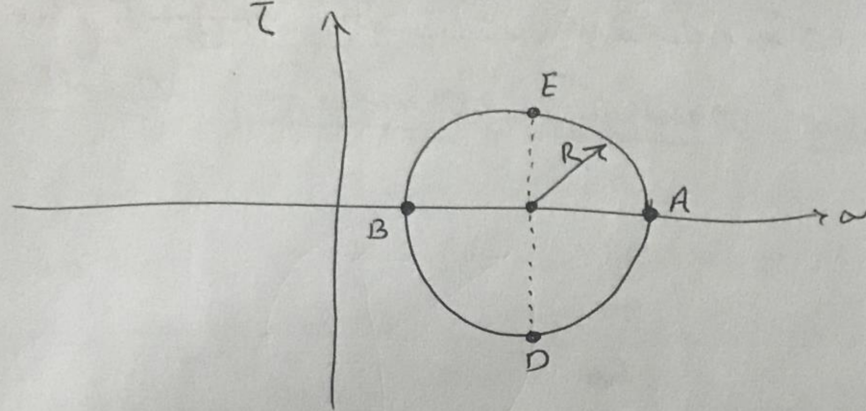
از جمع اینها داریم:

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\longrightarrow \quad (\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

این رابطه معادله یک دایره به مرکز $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$ و شعاع R است.

$$\begin{cases} \sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$



محور افقی بیانگر محور تنش قائم و محور عمودی نشان دهنده تنش برشی است. نقاط روی محیط دایره مقادیر تنش را در راستاهای مختلف در یک نقطه از جسم بیان می‌کند. نقاط A و B معرف حداکثر و حداقل تنش قائم (تنش‌های اصلی) هستند و نقاط E و D نیز معرف حداکثر تنش برشی است.

نکته: در صفحات اصلی هیچگونه تنش برشی وجود ندارد. مولفه تنش برشی در نقاط A و B مساوی صفر است

$$\theta = \theta_p \Rightarrow \sigma_x , \sigma_y = \sigma_{max} \text{ یا } \sigma_{min} , \tau_{xy} = 0$$

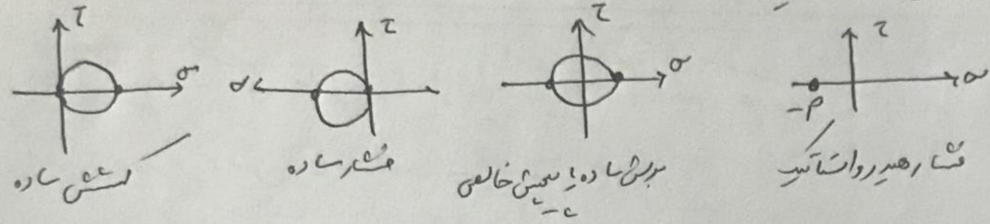
نکته: مقدار حداکثر تنش برشی مساوی شعاع دایره مور است $\tau_{max} = R$. تنش قائم نظیر تنش برشی حداکثر مساوی σ_{ave} خواهد بود.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

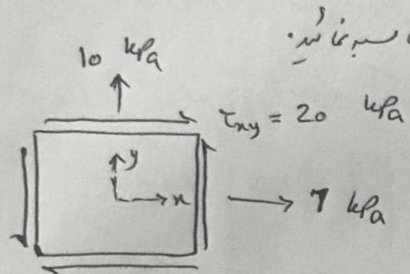
نکته: در صفحه زاویه بین حداکثر و حداقل تنش قائم برابر ۹۰ درجه است که این زاویه در حالت دایره مور 180 درجه است. همچنین زاویه حداکثر تنش برشی در دایره مور ۹۰ بوده که در حالت فیزیکی 45 درجه است.

نکته: به تنش‌های اصلی تنش‌های اکسترمم هم گفته می‌شود و معمولاً با σ_1 و σ_2 نمایش داده می‌شود و در این صورت هیچ گونه تنش برشی به همراه تنش اصلی روی المان ظاهر نمی‌شود.

نکته: انواع حالت دایره مور:



مثال: با توجه به المان زیر تنش‌های اصلی را محاسبه نمائید.

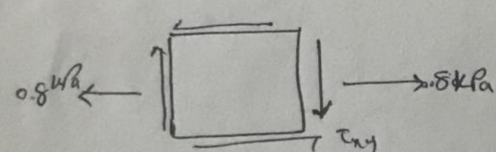


$$\sigma_1 = \sigma_{ave} + R \rightarrow \sigma_1 = \frac{10+7}{2} + \sqrt{\left(\frac{10-7}{2}\right)^2 + 20^2} =$$

$$\sigma_2 = \sigma_{ave} - R \rightarrow \sigma_2 = \frac{10+7}{2} - \sqrt{\left(\frac{10-7}{2}\right)^2 + 20^2}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

مثال: با توجه به تنش وارده بر یک نقطه از سازه، در صورتی که تنش اصلی برابر 1.2 kPa باشد مطلوب است تعیین تنش برشی حداکثر.

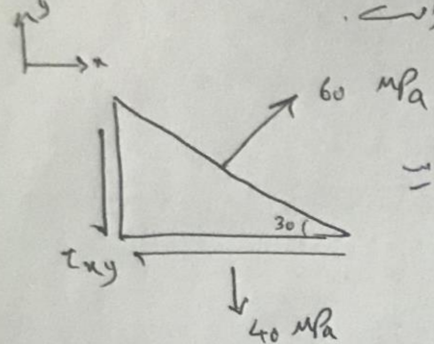


$$\sigma_1 = \sigma_{ave} + R \rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\rightarrow 1.2 = \frac{0.8+0}{2} + \underbrace{R}_{\tau_{max}} \rightarrow \boxed{R = 0.8 \text{ kPa}}$$

تنش برشی حداکثر برابر با شعاع دایره است.

مثال: تنش برشی اعمالی بر المان گوه‌ای شکل مقابل چقدر است.

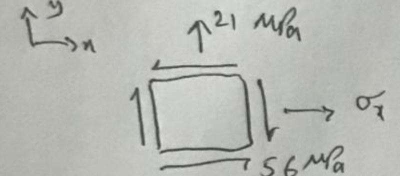


نکته: چون بر وجه مایل تنش برشی اعمال نشده بنابراین 60 MPa تنش اصلی است.

$$\sigma_1 = \sigma_{ave} + R = \frac{40+0}{2} + \sqrt{\left(\frac{40-0}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 60$$

$$\longrightarrow 40^2 = 20^2 + \tau_{xy}^2 \longrightarrow \tau_{xy} = 20\sqrt{3}\ \text{MPa}$$

مثال: اگر حداقل تنش اصلی برای المان نشان داده شده برابر 7 MPa باشد. مقدار تنش σ_x و زاویه محور اصلی تنش با محور x می‌سازد را بدست آورید:



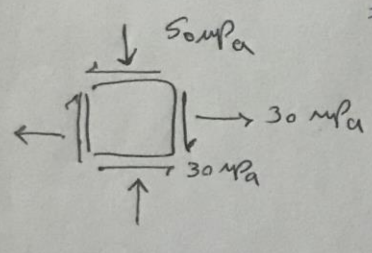
$$\sigma_2 = \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R \longrightarrow \sigma_x = 105\ \text{MPa}$$

با توجه به جهت τ_{xy} آنگاه:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\times(-56)}{105-21} = \frac{-4}{3} \rightarrow 2\theta_p = -53,$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_p = -26.6^\circ}$$

مثال: در المان شکل زیر حداکثر تنش برشی چقدر است؟



$$R = \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$