مکانیک برداری برای مهندسان

استاتیک

فردیناند پی.بی یر

ای.راسل جانسون

ارائه:میثم برزگر

فهرست :

1

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.SC.

مفاهیم پایه

Meysam4366@yahoo.com

استاتیک یا ایستایی شاخه‌ای از مکانیک و علوم مهندسی است که به بحث و مطالعه دربارهٔ سامانه‌های فیزیکی در حال تعادل ایستا (یا تعادل استاتیکی) می‌پردازد. تعادل ایستا حالتی است که در آن، مکان نسبی زیرسامانه‌ها نسبت به یک‌دیگر تغییر نکند یا آن‌که اجزا و سازه‌ها در اثر اعمال نیروهای خارجی، در حال ایستا و سکون باقی بمانند. در حالت تعادل ایستا، سامانهٔ مورد نظر یا در حال سکون است یا مرکز جرم (گرانیگاه) آن با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

با استفاده از قانون دوم نیوتون به این نتیجه می‌رسیم که در یک سامانهٔ در حال تعادل ایستا، نیروی خالص و نیز گشتاور خالص وارد بر هر یک از جرم‌های درون سامانه برابر با صفر است، و این بدان معناست که در ازای هر نیرویی که بر یک جزء یا مؤلفه از سامانه وارد می‌شود، نیرویی به همان اندازه ولی در جهت مخالف به آن جزء اعمال می‌گردد. این‌که نیروی خالص وارد بر سامانه برابر با صفر باشد، به عنوان شرط اول تعادل شناخته می‌شود. این شرط که گشتاور خالص وارد بر سامانه برابر با صفر باشد، به شرط دوم تعادل موسوم است.

ایستایی‌شناسی از جمله مباحثی است که در تجزیه و تحلیل سازه‌ها، مثلاً در مهندسی سازه یا معماری، و نیز به هنگام مطالعات سیالات در حالت سکون مثل پایداری سدها تحت فشارهای عظیم هیدرو استاتیکی آب کاربرد بسیار دارد. مقاومت مصالح (مکانیک ماده‌ها) شاخه‌ای مرتبط از علم مکانیک است که مبحث تعادل ایستا در آن بسیار به کار می‌رود. استاتیک پایه ای‌ترین و اصلی‌ترین درس در رشته مهندسی مکانیک و عمران محسوب میشود.

علم مکانیک چیست؟

- شاخه ای از علم فیزیک که شرایط اجسام ساکن یا درحال حرکت را تحت اثر نیروها بررسی و پیش بینی می کند.

- طبقه بندی علم مکانیک :
  1) اجسام صلب
     I. استاتیک
     II. دینامیک
  2) اجسام تغییر شکل پذیر
  3) سیالات

- مکانیک یک علم کاربردی است و درهسته مرکزی بیشتر تحلیل های مهندسی جای دارد.

- مکانیک پایه ی بسیاری از علوم مهندسی است ودرحقیقت هیچ علمی درمهندسی مهمتر از مکانیک نیست.

مفاهیم اساسی

- *"Space"* فضا مکان هندسی نقاطی است که درآن میدانی سه بعدی برای نقاط بکاربرده می شود.

- *"Time"* زمان مشخصه ای که وقوع جسم را اطلاع میدهد.(شاخص توالی رویدادها)

- *"Mass"* جرم خاصیتی از هر جسم است که بصورت مقدار جاذبه گرانشی ظاهر می شود.

- *"Force"* عمل یک جسم روی جسم دیگر را نشان می دهد.یک نیرومشخصه ایست که با نقطه اثر، بزرگی و جهت تعیین می شود.(کمیت برداری)

درمکانیک نیوتنی مفاهیم زمان- جرم - فضا مطلق و مستقل از هم می باشند.اما نیرو مستقل نبوده وبه جرم وآهنگ تغییر سرعت در زمان (شتاب) وابسته است.

اصول بنیادی

- قانون اول نیوتن :وقتی برایند نیروها روی یک ذره صفر است جسم درحالت سکون یا حرکت ثابت خود خواهد ماند.

(Newton's First Law)

- قانون دوم نیوتن : نیرو متناسب است با جرم و شتاب جسم.

$$F = ma$$

(Newton's Second Law)

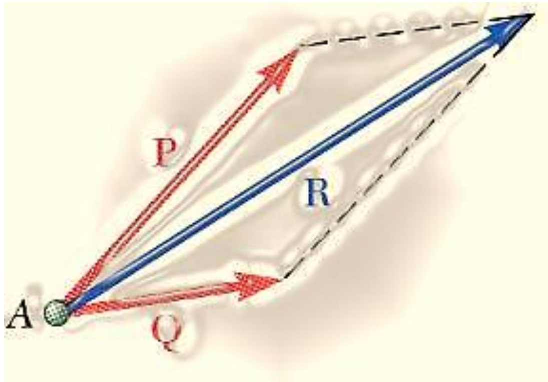
- قانون سوم نیوتن :برای هر عملی عکس العملی وجود دارد برابر ولی با جهت مخالف.

(Newton's Third Law)

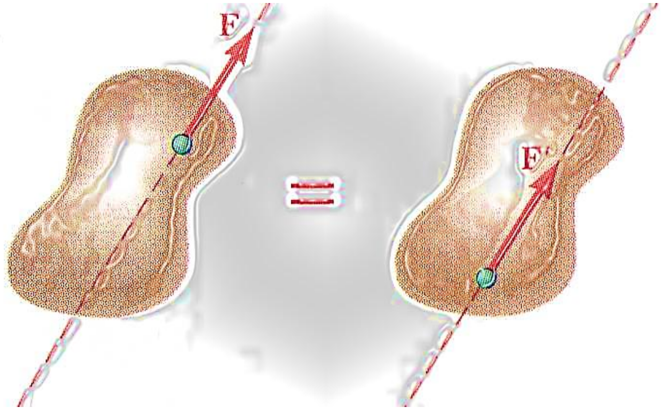
- قانون گرانش نیوتن: دو ذره در راستای خط واصل خود با نیرویی به سمت یکدیگر جذب می شوند که با حاصلضرب جرمشان نسبت مستقیم و با فاصله شان نسبت عکس دارد.

(Newton's Law of Gravitation)

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad W = mg, \quad g = \frac{GM}{R^2}$$



- قانون متوازی الاضلاع



- اصل قابلیت انتقال

سیستم های اندازه گیری

- International System of Units (SI):
سیستم بین المللی واحدها

واحدهای اصلی،طول – زمان – جرم هستند برای سنجش این خاصیتها ازلحاظ کمی: متر(m) ثانیه (s) و کیلوگرم (kg) رابکار می بریم.

$1_{ft} = 12_{in} = 0.305_{m}$

$1_{lb} = 0.454_{kg}$

- U.S. Customary Units
واحدهای مرسوم آمریکایی

واحدهای اصلی،طول – زمان – جرم هستند برای سنجش این خاصیتها ازلحاظ کمی: فوت(ft) ثانیه (s) و پوند (lb) رابکار می بریم.

$$F = ma$$

$$1\,\mathrm{N} = (1\,kg)\left(1\frac{m}{s^2}\right)$$

- درهردوسیستم کمیتهای فرعی برحسب کمیتهای اصلی تعریف می شوند.

$$\boxed{1_{\text{slug}} = \frac{1\ lb}{1\ ft/s^2}}$$

نیرو در SI: نیوتن N و در US با اسلاگ slug تعیین می شود.

2

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

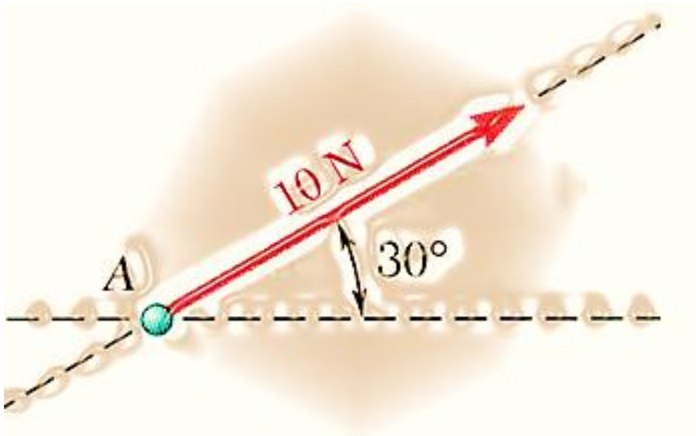
Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.SC.

استاتيك ذره ها

برآیند دو نیرو(R)

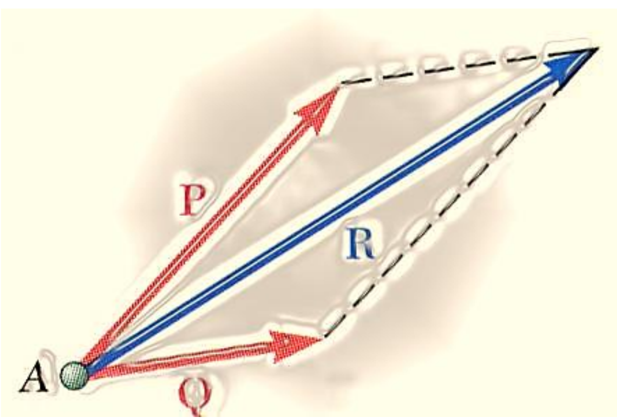
نیرو:عمل یا کنش یک جسم روي جسم دیگر است. نیرو کمیتی است برداري و کنش آن با مقدار، جهت و نقطه اثرش مشخص می شود.



قطری که از نقطه A میگذرد نشاندهنده جمع دو مولفه P و Q است.

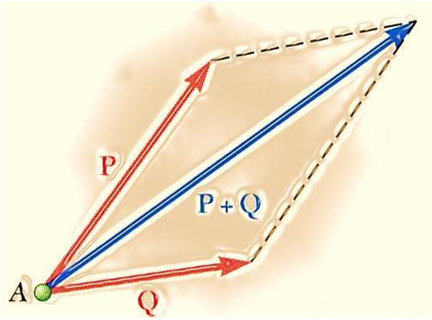
✓ قانون متوازی الاضلاع برای جمع بردارها:

دو نیروی (P و Q) اعمال شده بر یک ذره (A) را میتوان بایک نیروی منفرد که بر آیند آن دو نیرو نامیده میشود (R) جایگزین کرد. برآیند دو نیرو از طریق ترسیم قطر متوازی الاضلاعی که دو ضلع آن را دو خط مساوی با دو نیروی داده شده تشکیل می دهند، بدست می آید.

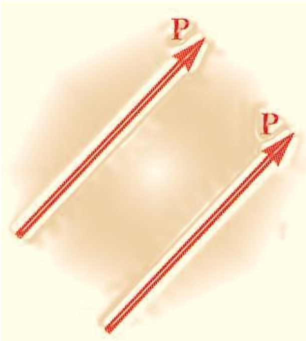


- نیرو کمیتی برداری است.

بردارها

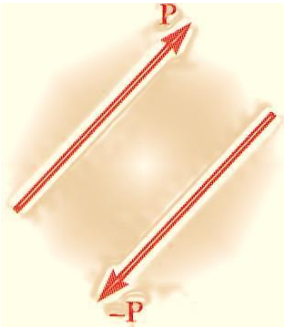


- بردار: کمیتی است که دارای اندازه و جهت است.
- اسکالر: کمیتهایی که فقط دارای مقدار هستند و طبق قوانین جبری باهم جمع و تفریق می شوند. مثلا:جرم – حجم - دما
- طبقه بندی بردارها:



i. بردارهای ثابت و مقید،که نقطه اثرآن کاملا معین شده است وفقط یک موقعیت خاص را درفضا اشغال می کنند(مثل اثر نیرو روی جسم غیر صلب).

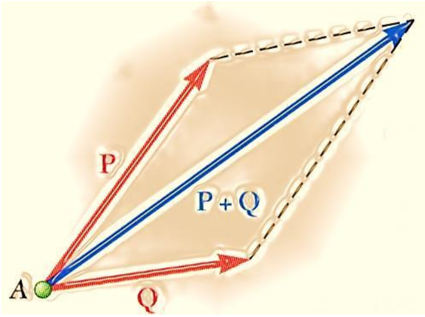
ii. بردارهای آزاد، که عمل آنها محدود به یک خط منحصربفرد درفضا نمی باشد(مثل بردارهای میدان جاذبه و مغناطیس).

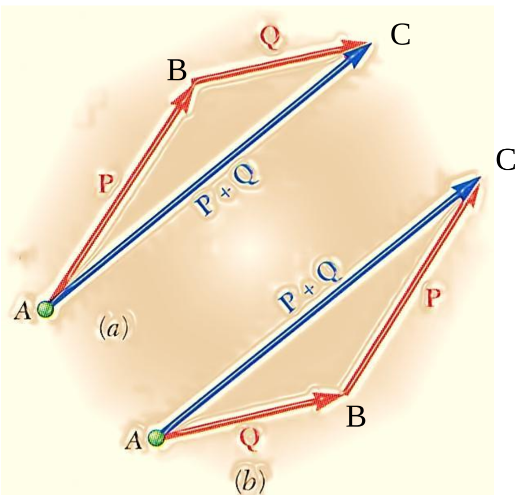


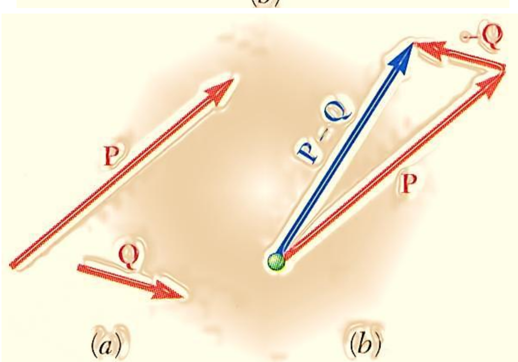
iii. بردارهای لغزان،که برای عمل آنها یک خط منحصربفرد وجود دارد و درآن امتداد اثر می کنند(مثل بردار نیروی خارجی روی یک جسم صلب).

- بردارهای برابر، دارای بزرگی و جهت یکسان اند.
- *بردارهای منفی، دارای بزرگی برابر اما جهت مخالفند.*

جمع بردارها







- قاعده متوازی الاضلاع برای جمع بردارها
- قاعده مثلث برای جمع بردارها
- قانون کسینوسها

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$R = P + Q$$

- قانون سینوسها

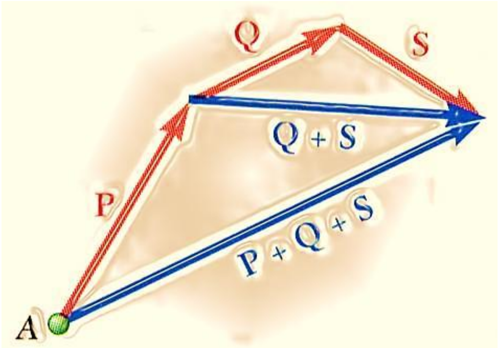
$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} = \frac{\sin C}{A}$$

- جمع بردارها دارای خاصیت جابجایی می باشد.

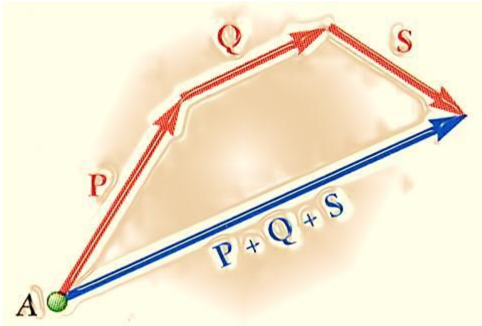
Q + P = P + Q

- تفریق بردارها

جمع بردارها



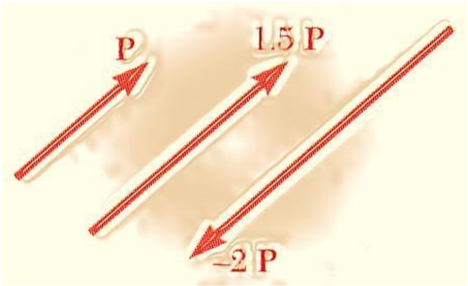
- جمع سه یا تعداد بیشتری بردار با قاعده مثلثی.



- قاعده چند ضلعی برای جمع سه یا تعداد بیشتری بردار.

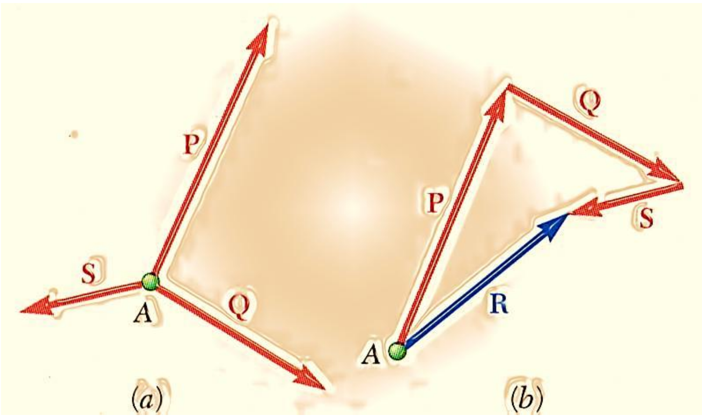
- جمع بردارها دارای خاصیت شرکت پذیری می باشد.

$$Q + P + S = (P + Q) + S = P + (Q + S)$$



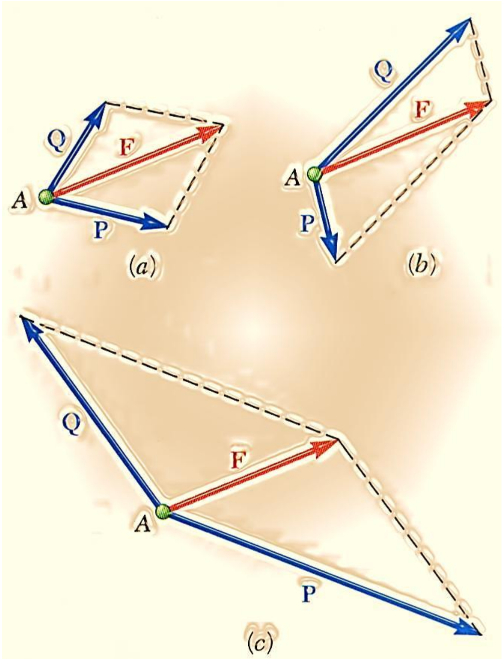
- ضرب یک عدد در بردار

برآیند چند نیروی همرو



- نیروهای همرو مجموعه ای از نیروها هستند که در یک نقطه مشترک وارد می شوند.

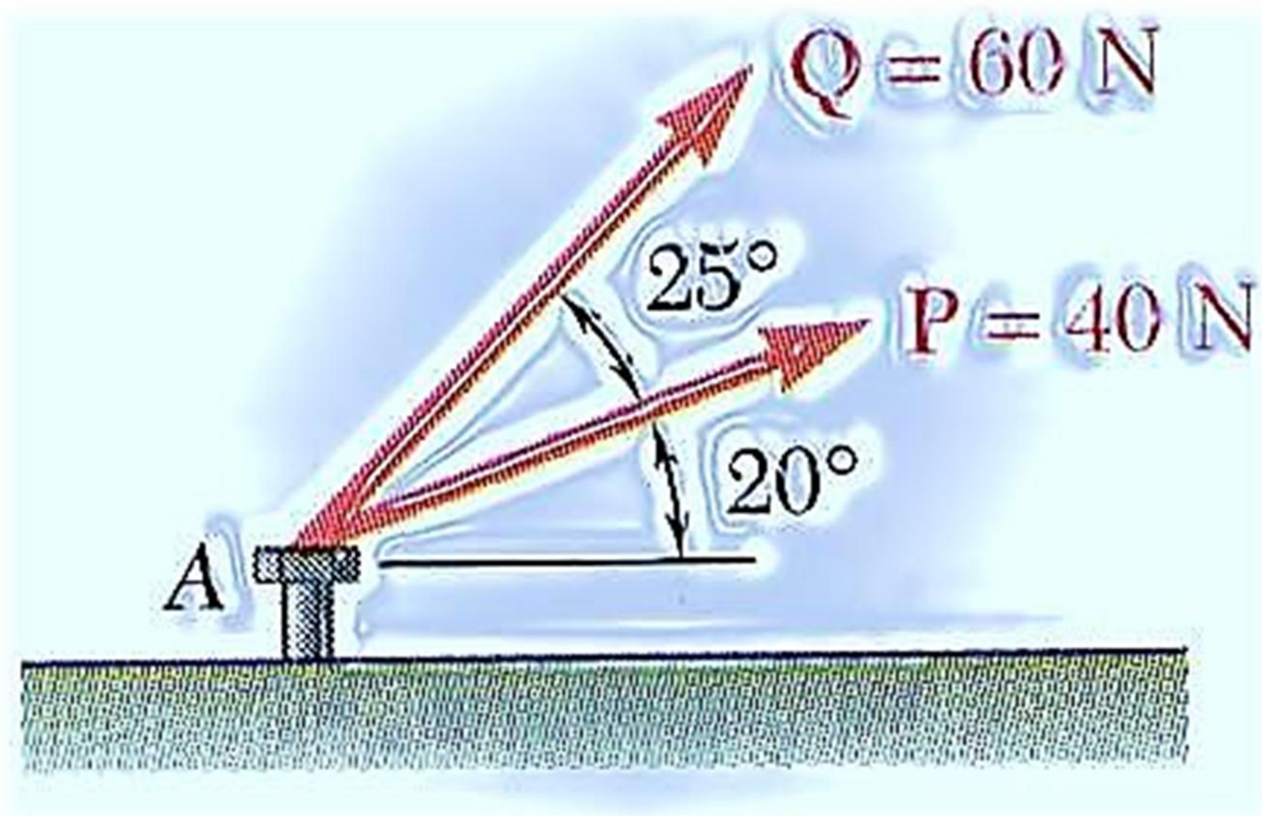
  یک مجموعه نیروی همرو که بریک ذره اثر می کنند ممکن است با برآیندشان جایگزین شوند.



- دو یا تعداد بیشتری بردار نیرو اثری مشابهِ بردار برآیند نیرو روی ذره دارند.

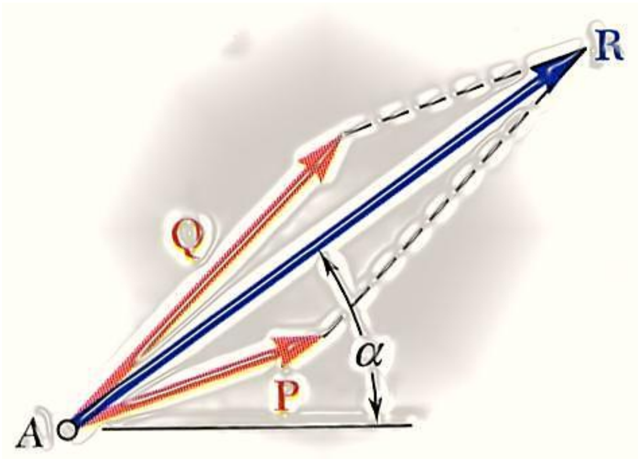
مثال ۱

- مطلوبست برآیند دو نیروی وارد بر پیچ A.



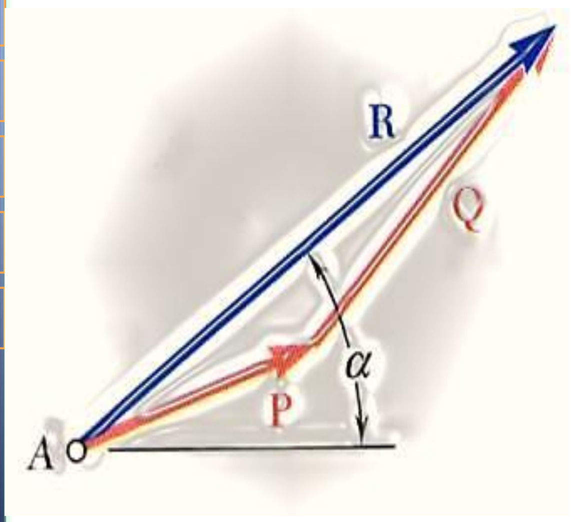
مثال ۱

- بزرگی برآیند باکمک قانون کسینوسها:

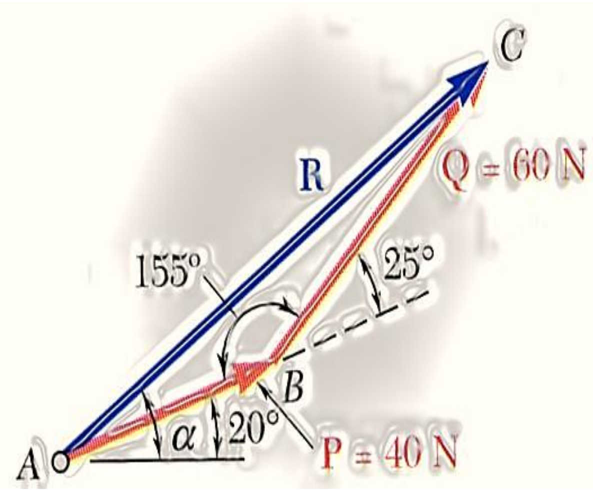


$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$= (40\,\mathrm{N})^2 + (60\,\mathrm{N})^2 - 2(40\,\mathrm{N})(60\,\mathrm{N})\cos 155°$$
$$\boxed{R = 97.73\,\mathrm{N}}$$

- زاویه برآیند باکمک قانون سینوسها:

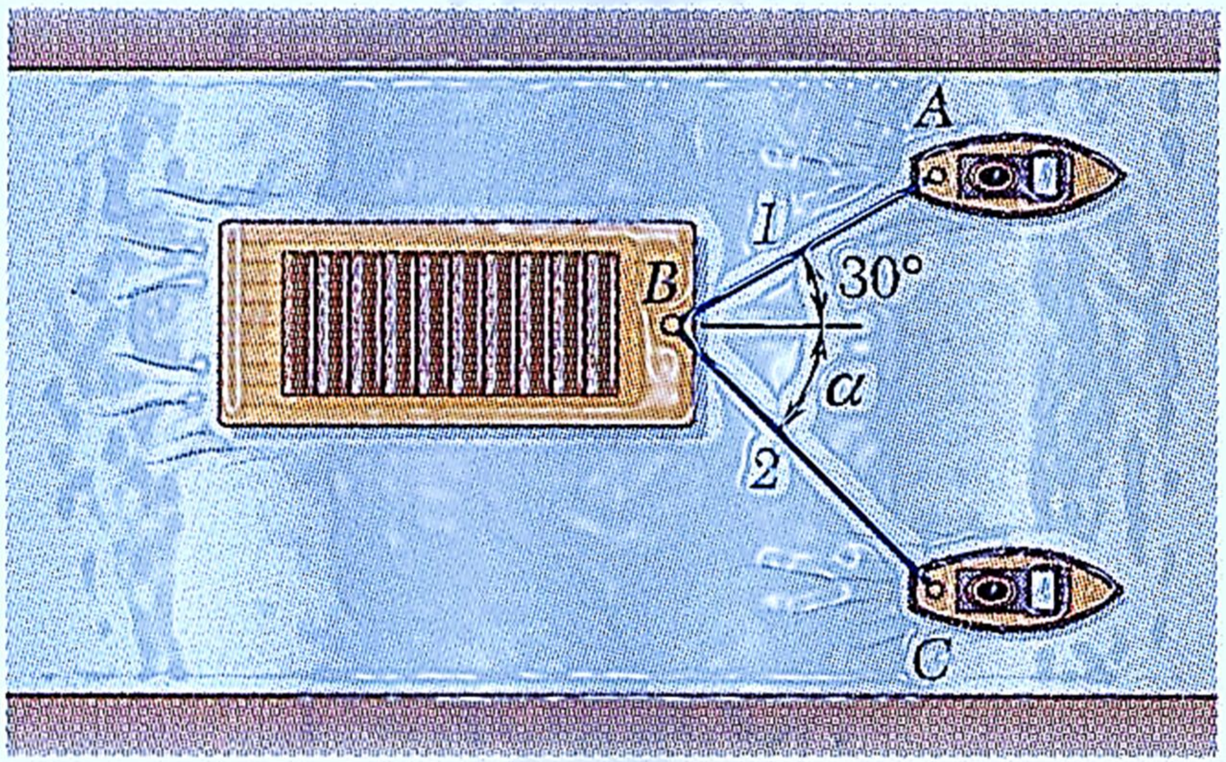


$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R}$$
$$\sin A = \sin B \frac{Q}{R}$$
$$= \sin 155° \frac{60\,\mathrm{N}}{97.73\,\mathrm{N}}$$
$$A = 15.04°$$
$$\alpha = 20° + A$$
$$\boxed{\alpha = 35.04°}$$



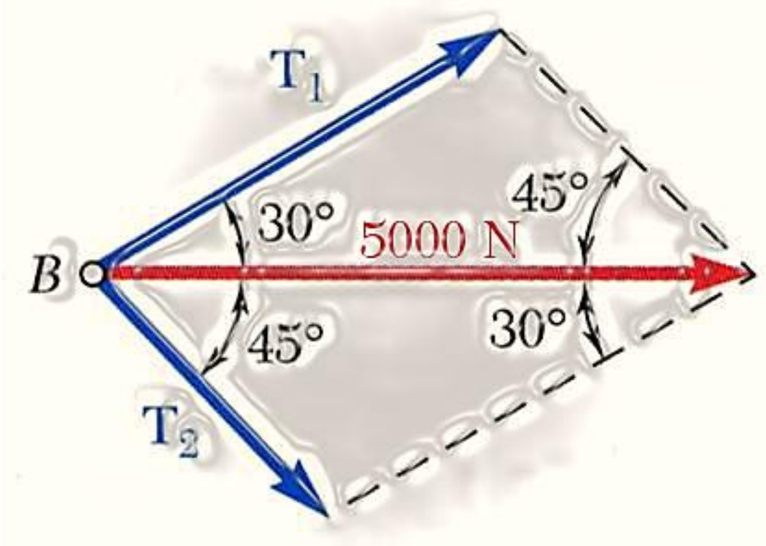
مثال۲

- مطلوبست نیروی وارد بر دوقایق کشندهٔ سکوی 5000N وقتی $\alpha=45^{o}$, $\alpha=60^{o}$.



مثال۲

- دیاگرام جسم آزاد:



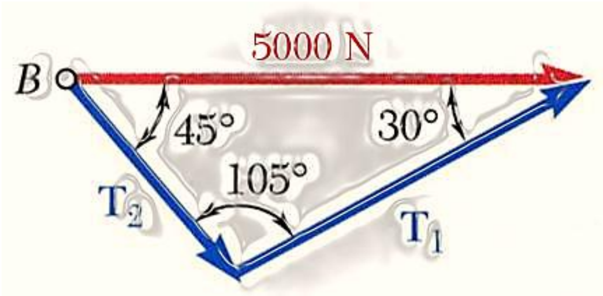
- باکمک قانون سینوسها خواهیم داشت:

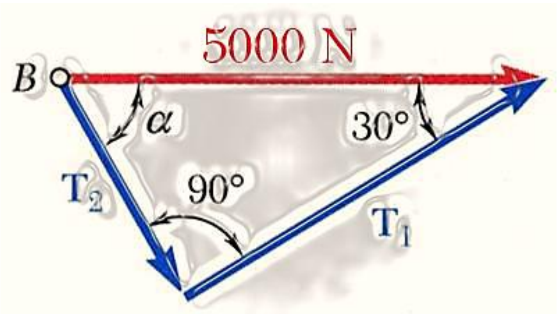
$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5000\ \text{N}}{\sin 105^\circ}$$

$$\boxed{T_1 = 3660\ \text{N} \quad T_2 = 2590\ \text{N}}$$

$$\frac{T_1}{\sin 60^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5000\text{N}}{\sin 90^\circ}$$

$$\boxed{T_1 = 4330\ \text{N}} \qquad \boxed{T_2 = 2500\ \text{N}}$$





مولفه های برداری عمودی (مستطیلی)- بردار های واحد

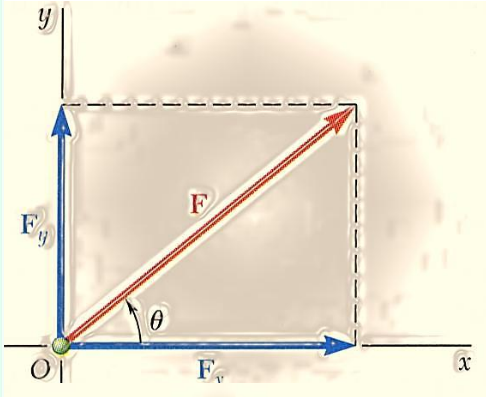
- عکس عمل جمع بردارها را تجزیه گویند.بردار F به دو مولفه عمود F_x درجهت Xها و F_y درجهت Yها، تجزیه می شود.هردو بردار در یک صفحه قرار دارند. (تجزیه دوبعدی)

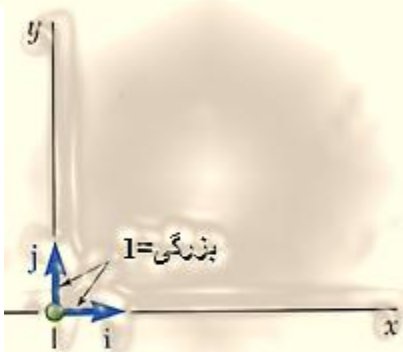
$$F = F_x + F_y$$

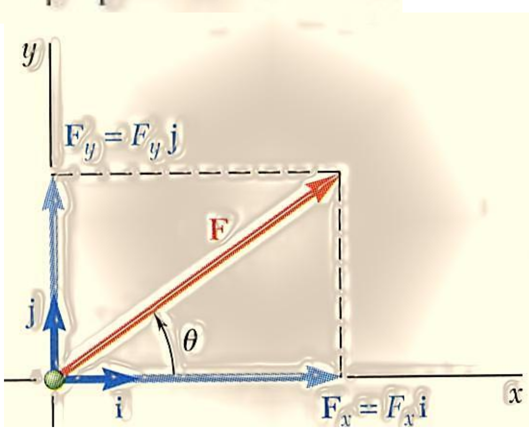
بردار واحد یا یکه: بردار واحد در راستاي يك بردار، برابر با بردار تقسيم بر بزرگي آن بردار مي باشد.
به عبارت ديگر, برداري كه داراي بزرگي واحد باشد بردار واحد ناميده مي شود.

- اجزا بردارها را برای بیان در مقیاس اسکالر در بردارهای واحد ضرب می کنند.

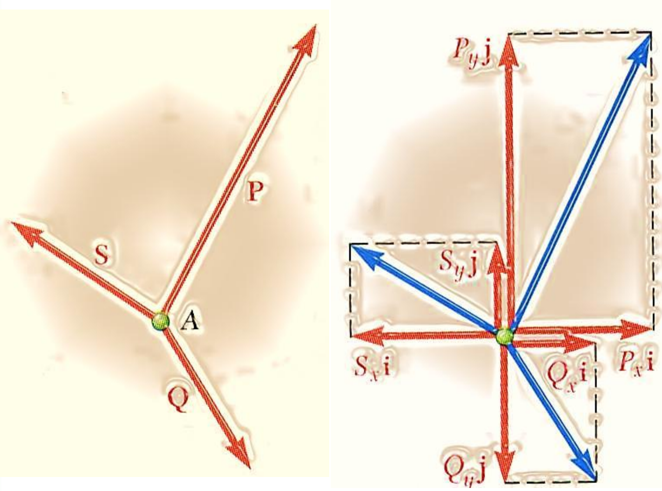
$$F = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$







عملیات جمع روی بردارها بوسیله تجزیه به مولفه ها



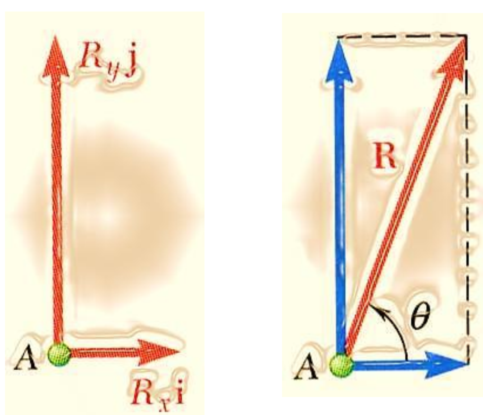
- روشی مطلوب برای تعیین برآیند سه یا تعداد بیشتر بردار تجزیه هر بردار به مولفه های قائم آن و جمع مولفه ها باهم

$$R = P + Q + S$$

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} =$$

$$(P_x+Q_x+S_x)\mathbf{i} + (P_y+Q_y+S_y)\mathbf{j}$$

- اجزا اسکالر برآیند در واقع از مجموع مولفه های عمودی بردارها بدست آمده اند.



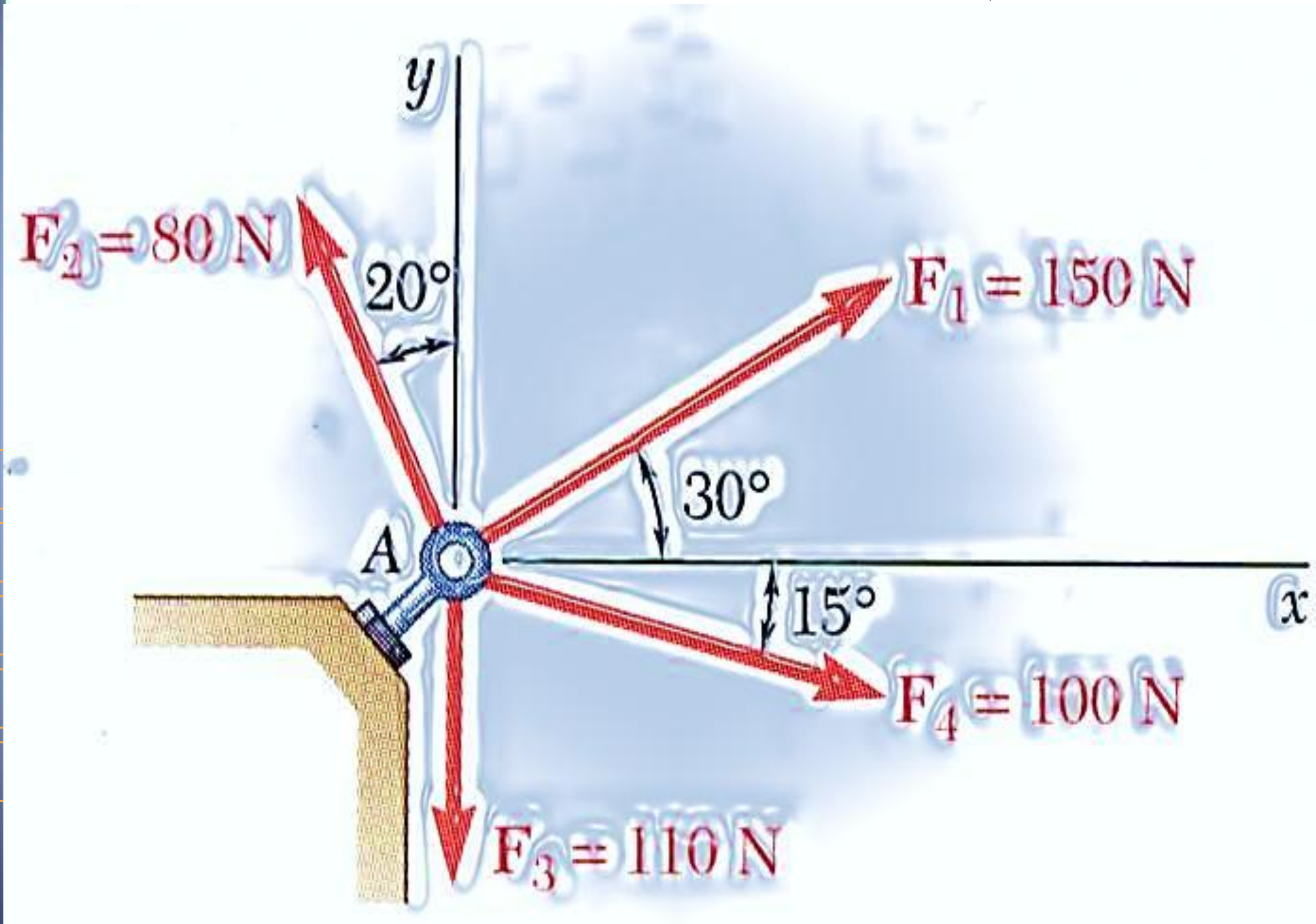
$$R_x = P_x + Q_x + S_x = \sum F_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y = \sum F_y$$

- برای پیدا کردن بزرگی بردار برآیند و نیز زاویه آن با افق:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

مثال۳

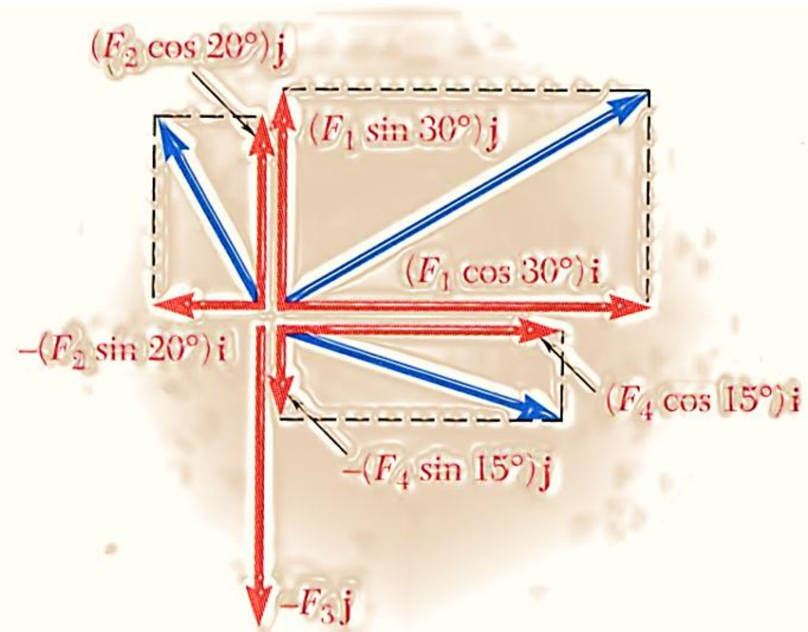
- برای گیره مقابل مقدار برآیند نهایی نیرو چه مقداراست؟



مثال۳

- با تجزیه هر بردار به مولفه های عمودی:
- نتیجه تجزیه:

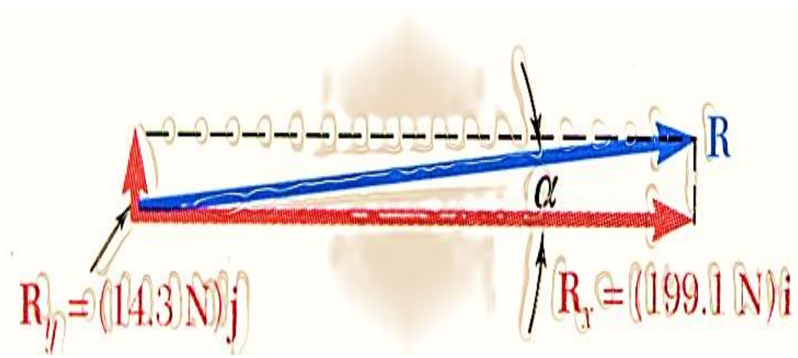
بردارنیرو	بزرگی	مولفهٔ x	مولفهٔ y
F_1	150	+129.9	+75
F_2	80	-27.4	+75.2
F_3	110	0	-110
F_4	100	+96.6	-25.9
R	---	+199.1	+14.3



- محاسبه بزرگی وجهت:

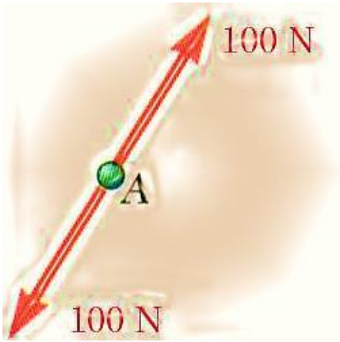
$$R = \sqrt{199.1^2 + 14.3^2} \qquad \boxed{R = 199.6\text{N}}$$

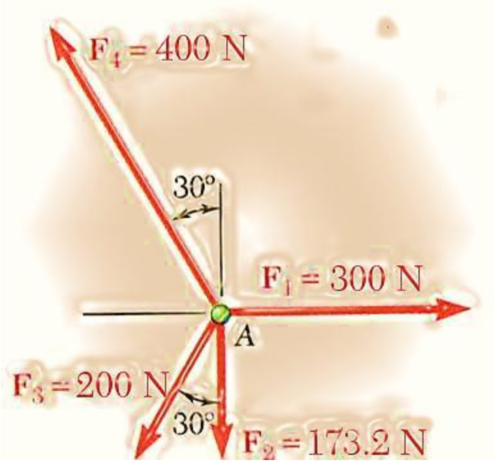
$$\tan\alpha = \frac{14.3\,\text{N}}{199.1\,\text{N}} \qquad \boxed{\alpha = 4.1°}$$

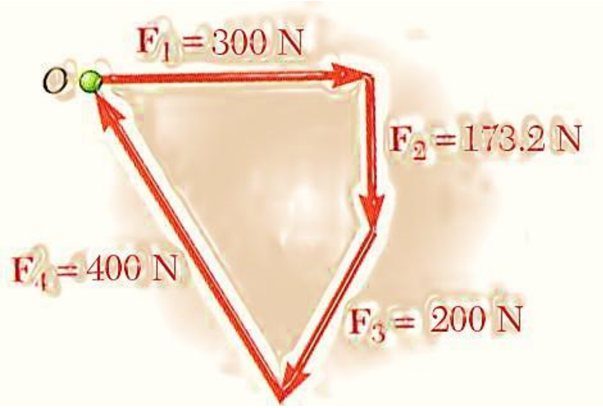


تعادل یک ذره

- وقتی برآیند نیروها برابر صفر است ذره در تعادل است.







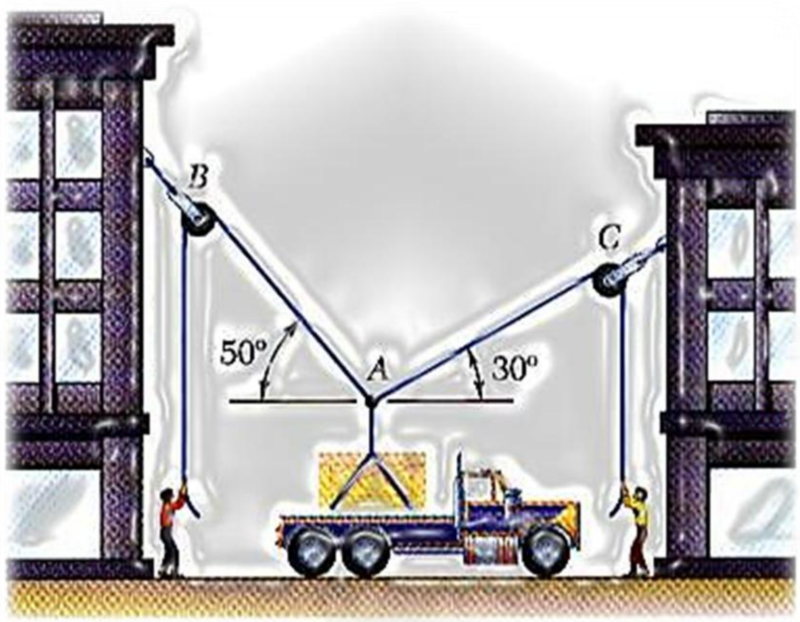
- ذره تحت اثر سه و یا تعداد بیشتری نیرو:
  - راه حل ترسیمی یک چند ضلعی بسته خواهد بود.
  - راه حل جبری(قوانین تعادل)

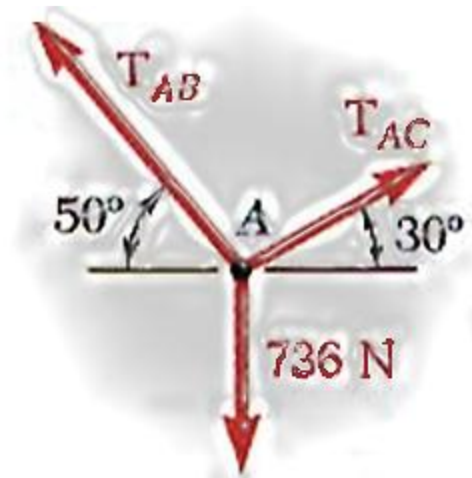
$$\vec{R} = \Sigma \vec{F} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

- ذره تحت اثر دو نیرو:
  - بزرگی برابر
  - خط اثر یکسان
  - جهت مخالف

دیاگرام جسم آزاد



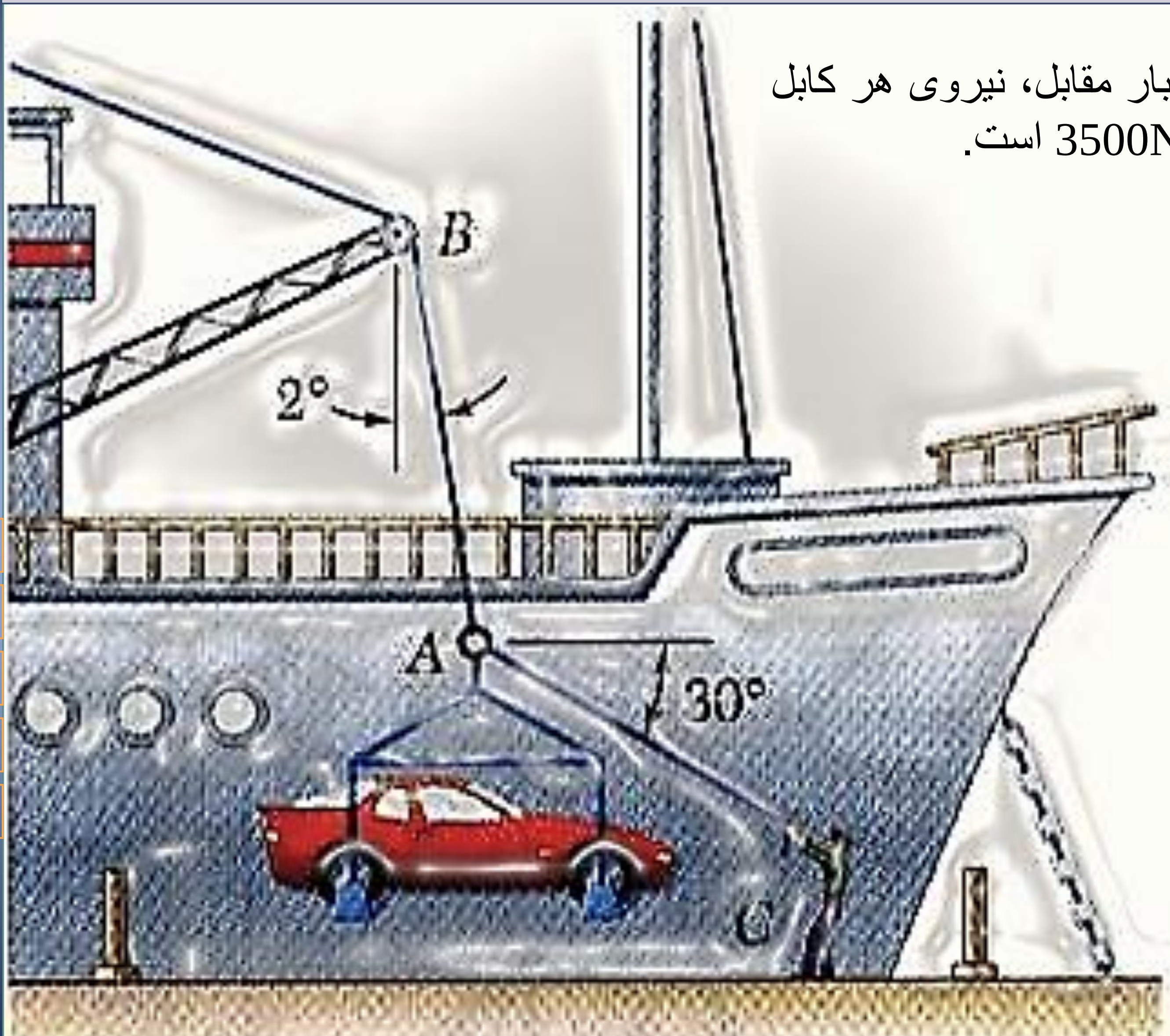


- دیاگرام جسم آزاد: نمایش طرحی ساده است که نیروهای وارد برذره رانشان می دهد.
- دیاگرام فضایی: نمایشی از یک طرح فیزیکی است که شرایط حاکم بر مسئله را نشان می دهد.

- توجه شود وقتی عضو درتعادل است تمام ذرات آن در تعادل خواهند بود.

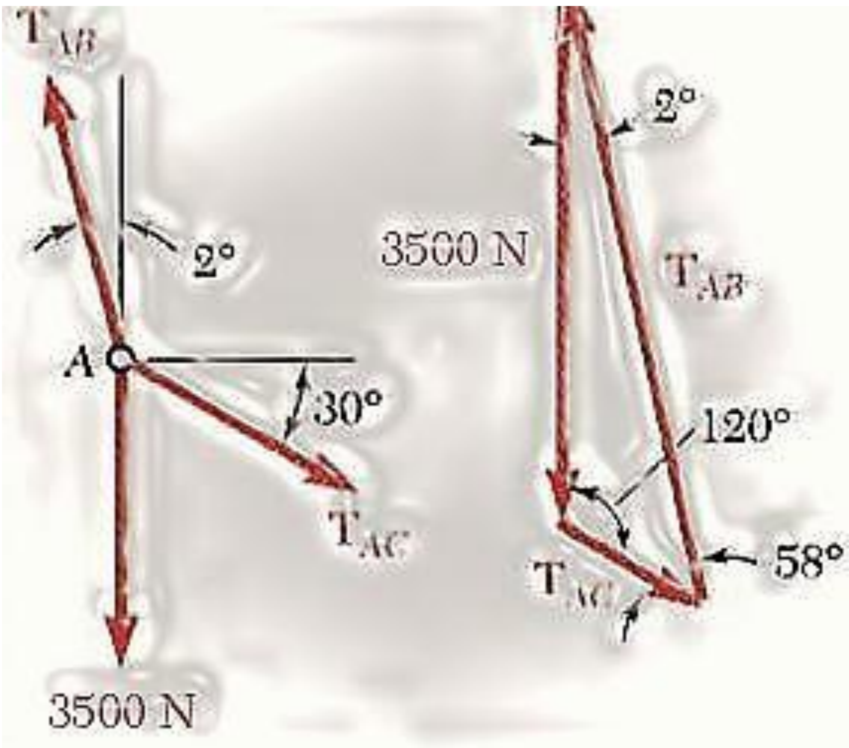
مثال ۴

- باتوجه به شرایط تخلیه بار مقابل، نیروی هر کابل را بیابید. وزن اتومبیل 3500N است.



مثال ۴

- بارسم دیاگرام جسم آزاد مسئله درنقطه A:
- بااستفاده از قانون سینوسها:



$$T_{AB} = 3570 \text{ N}$$

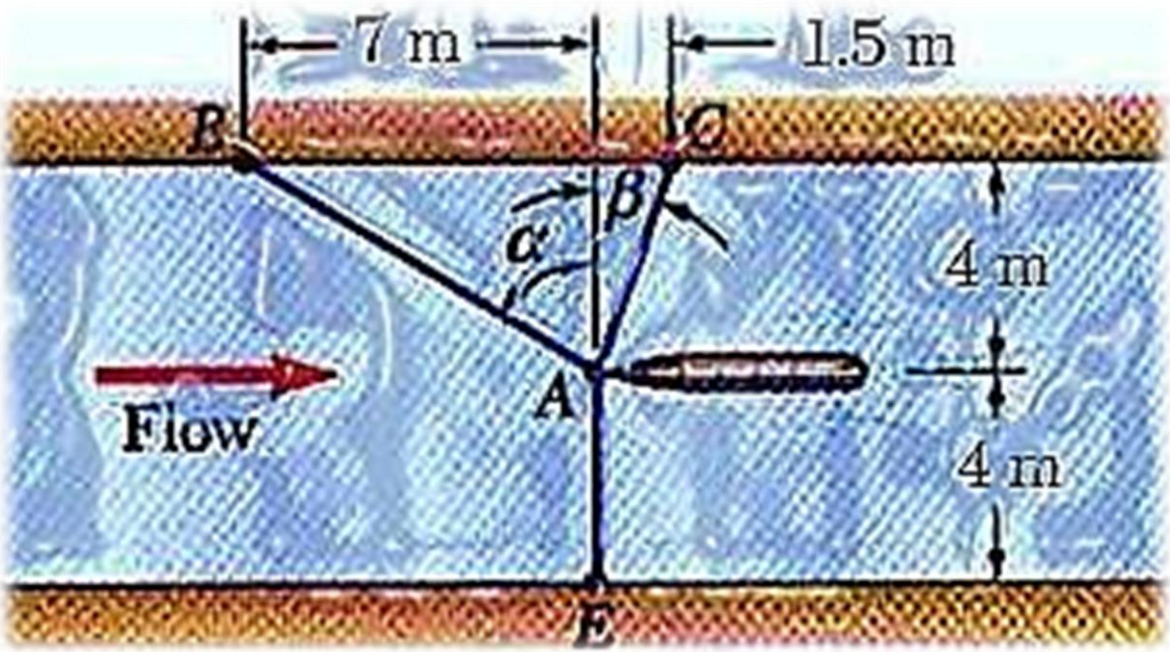
$$\boxed{T_{AC} = 144 \text{ N}}$$

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120°} = \frac{T_{AC}}{\sin 2°} = \frac{3500 \text{ N}}{\sin 58°}$$

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60°} = \frac{T_{AC}}{\sin 178°} = \frac{3500_{N}}{\sin 122°}$$

مثال ۵

- مطلوبست نیروی وارد بر کابل AC وشناور.
نیروی AE=60N و AB=40N درشرایط تعادل اندازه گیری شده اند.

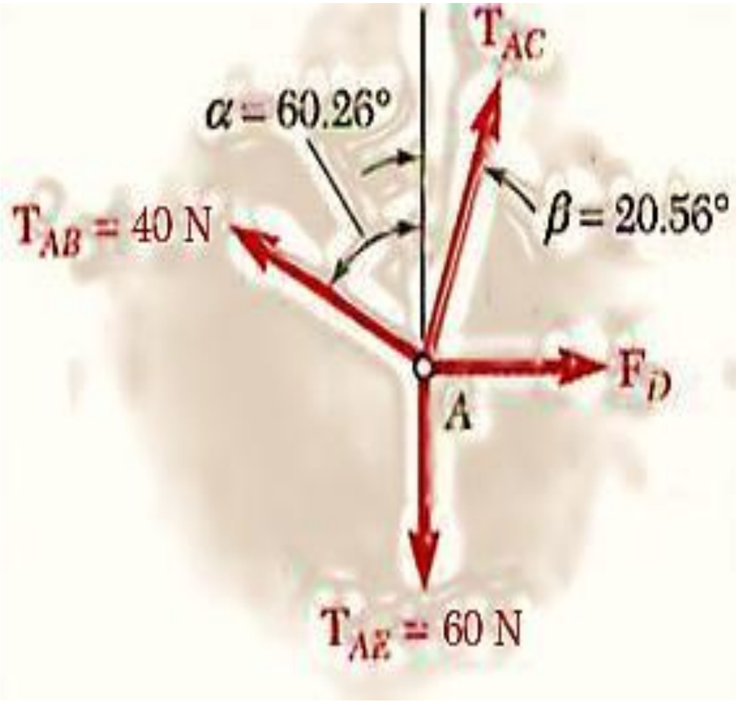


مثال ۵

- با تعیین زوایای α و β و رسم دیاگرام آزاد جسم:

$$\tan\alpha = \frac{7\text{ m}}{4\text{ m}} = 1.75 \qquad \alpha = 60.25°$$

$$\tan\beta = \frac{1.5\text{ m}}{4\text{ m}} = 0.375 \qquad \beta = 20.56°$$

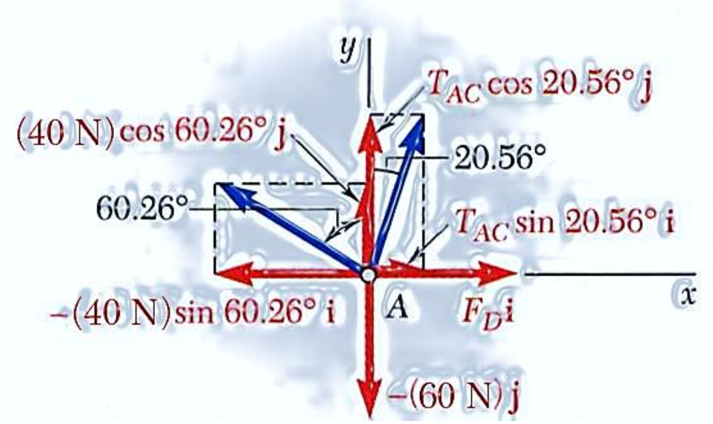


- در شرایط تعادل خواهیم داشت:

$$\vec{R} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AE} + \vec{F}_D = 0$$

- باتجزیه هر بردار به مولفه های عمودی آن:

مثال ۵



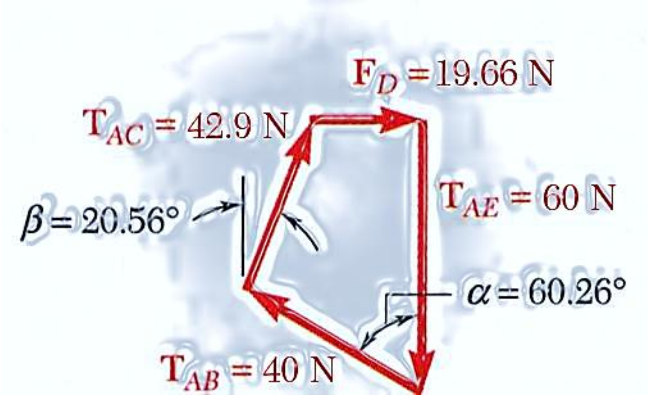
$$T_{AB} = -\ 40\ \text{N}\ (\sin 60.26°)i + \ 40\ \text{N}\ (\cos 60.26°)j$$
$$= -(34.73\ \text{N})i + (19.84\ \text{N})j$$

$$T_{AC} = T_{AC}\sin 20.56°\, i + T_{AC}\cos 20.56°\, j$$
$$= 0.3512\, T_{AC}\, i + 0.9363\, T_{AC}\, j$$

$$T = -(60\ \text{N})j$$
$$F_D = F_D\, i$$

- با جایگذاری در معادله تعادل ذره: $R = 0$

$$= (-34.73 + 0.3512\, T_{AC} + F_D)i$$
$$+ (19.84 + 0.9363\, T_{AC} - 60)\, j$$

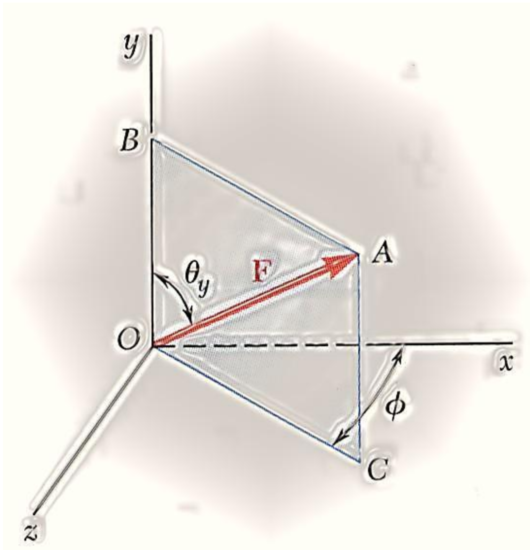


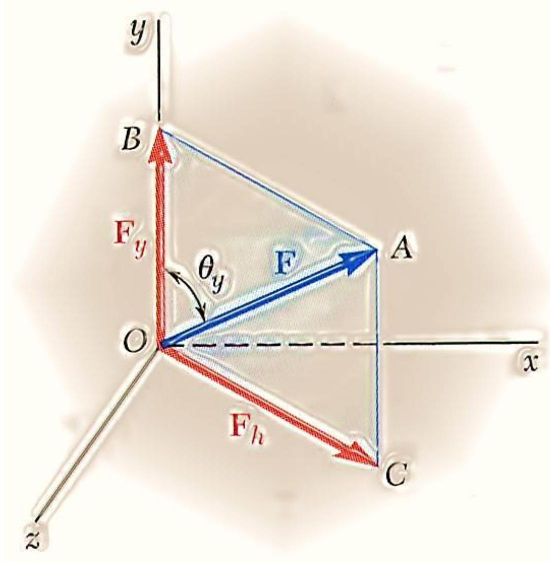
$$\left(\sum F_x = 0\right) \quad 0 = -34.73 + 0.3512\, T_{AC} + F_D$$
$$\left(\sum F_y = 0\right) \quad 0 = 19.84 + 0.9363\, T_{AC} - 60$$

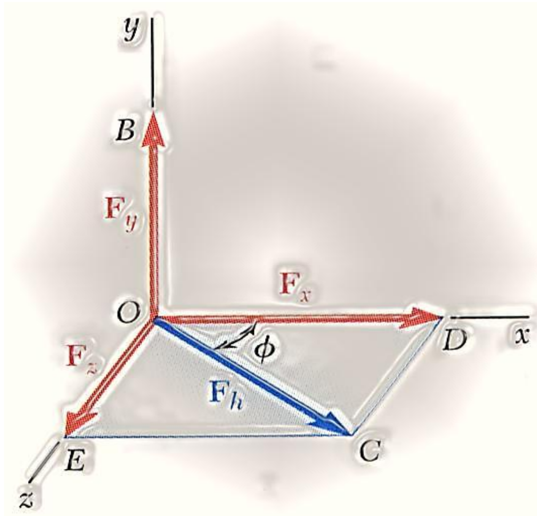
$$\boxed{\begin{aligned} T_{AC} &= +42.9\ \text{N} \\ F_D &= +19.66\ \text{N} \end{aligned}}$$

Meysam4366@yahoo.com

مولفه های عمودی در فضای سه بعدی







- بردار F در صفحه OBCA قرار دارد.

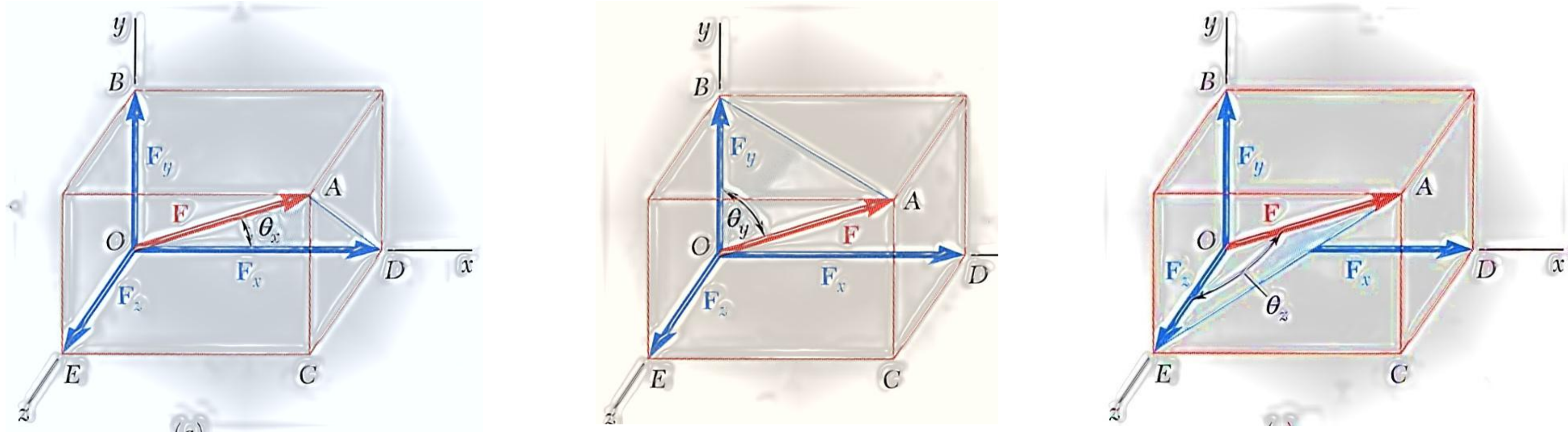
- تجزیه بردار به مولفه های عمودی و افقی.

$$F_y = F\cos\theta_y$$
$$F_h = F\sin\theta_y$$

- تجزیه بردار F_h به دو مولفه عمود بر هم.

$$F_x = F_h\cos\phi = F\sin\theta_y\cos\phi$$
$$F_z = F_h\sin\phi = F\sin\theta_y\sin\phi$$

مولفه های عمودی در فضای سه بعدی



- با زاویه مابین بردار F و محورها:

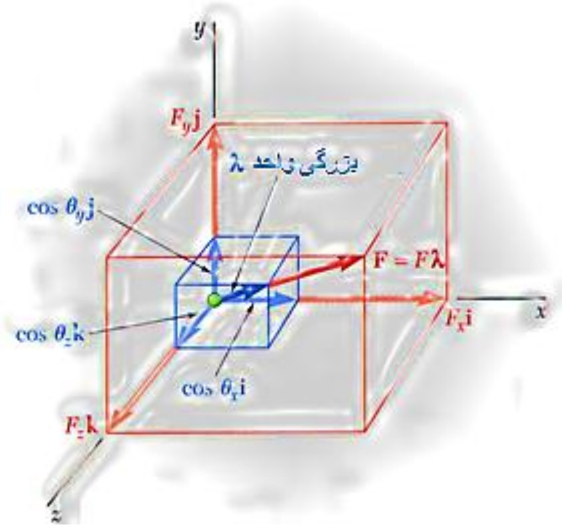
$$F_x = F\cos\theta_x \quad F_y = F\cos\theta_y \quad F_z = F\cos\theta_z$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$= F\left(\cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}\right)$$

$$= F\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}$$



- بردار λ یک بردار واحد درطول خط اثربردار F ودارای زوایای $\cos\theta_x$ و $\cos\theta_y$ و $\cos\theta_z$ بامحورهای اصلی بردار F

مولفه های عمودی در فضای سه بعدی

$\vec{d} =$ بردار اتصال M و N

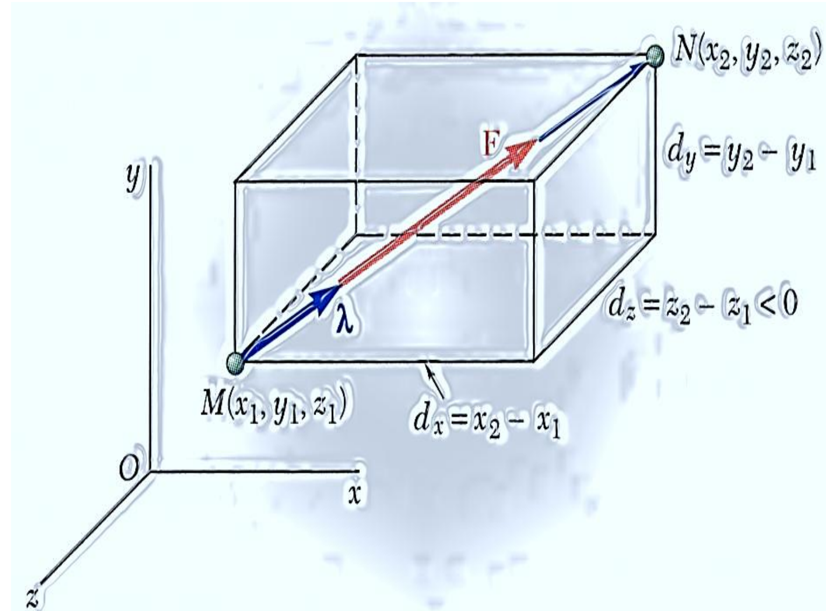
$$= d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$$

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{d}\left(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}\right)$$

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

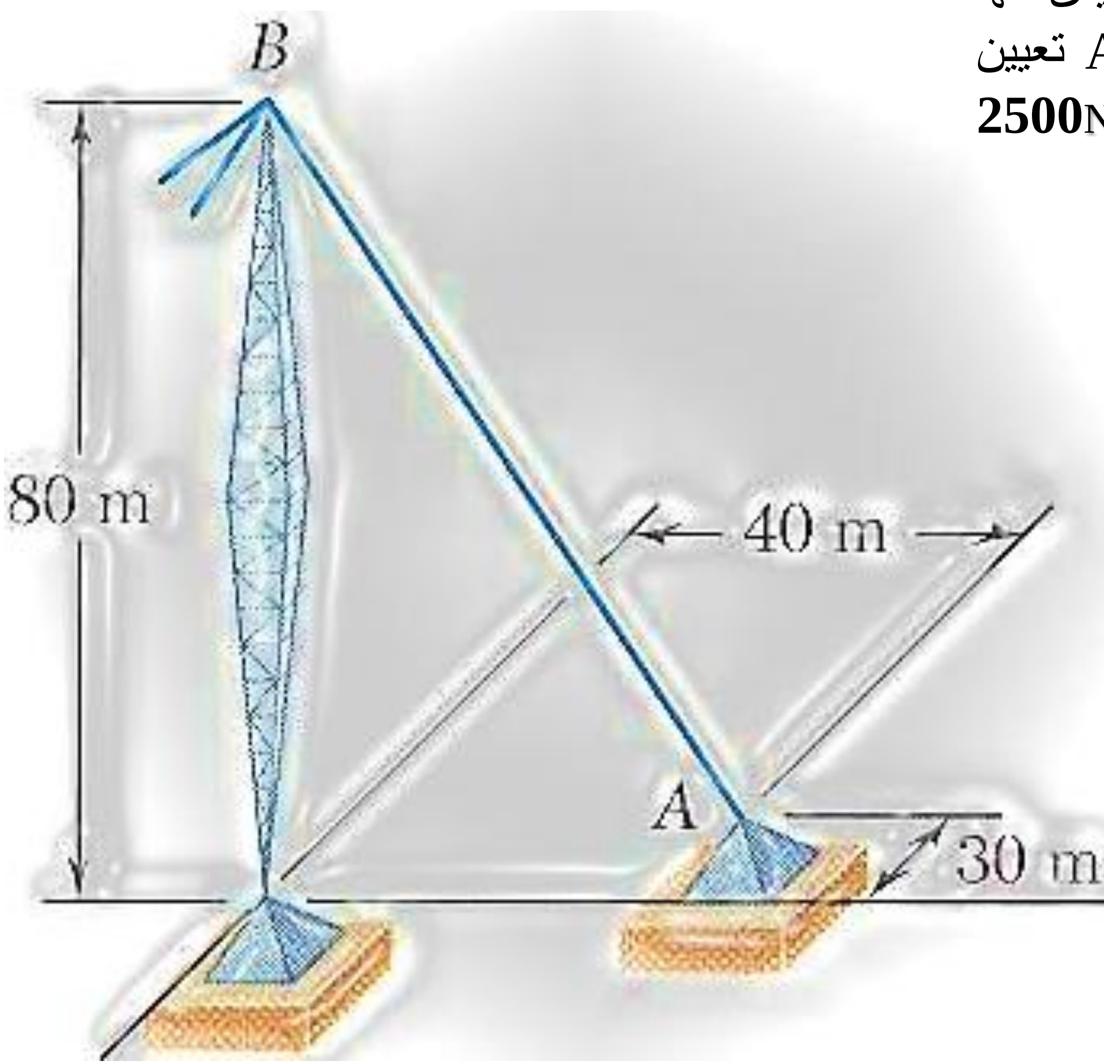


جهت بردار نیرو بوسیله دو نقطه تعیین شده است.

$M(x_1, y_1, z_1)$ و $N(x_2, y_2, z_2)$

ضرایب λ مقدار کسینوسهای هادی را مشخص میکنند.

مثال ۶



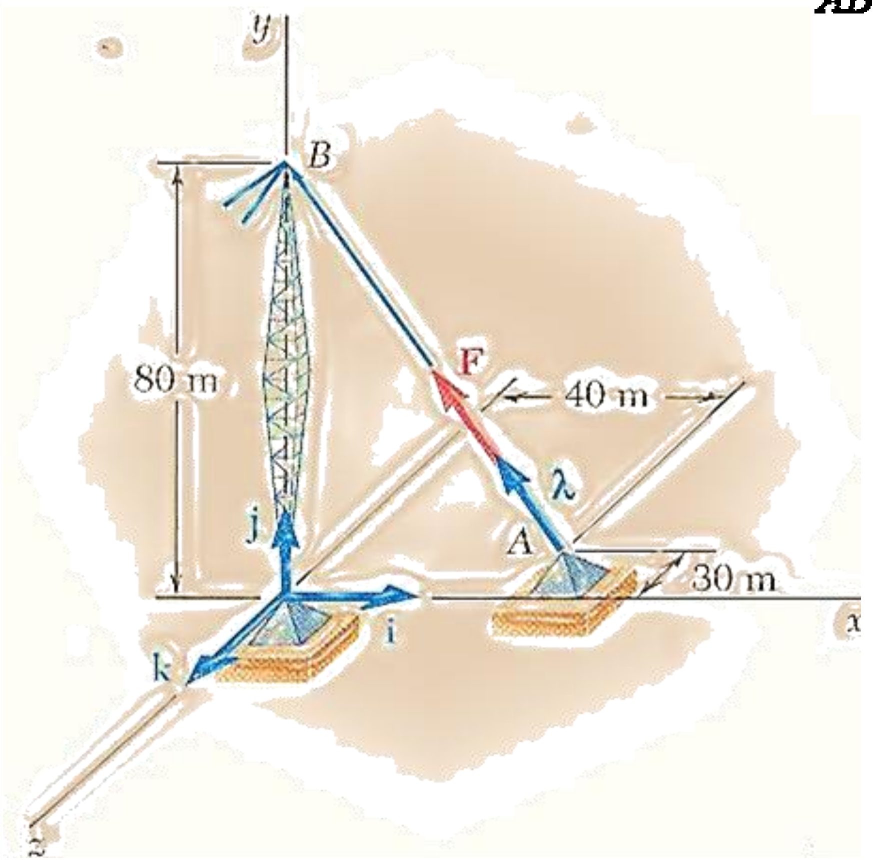
- مولفه های F_x و F_y و F_z ونیز زوایای آنها را با محور های اصلی در نقطه A تعیین کنید. کشش موجود در کابل برابر **2500**N است : $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ =?

مثال ۶

- ابتدا طول کابل موردنظر را تعیین می کنیم.

$$\overrightarrow{AB} = (-40\,\text{m})\vec{i} + (80\,\text{m})\vec{j} + (30\,\text{m})\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{(-40\,\text{m})^2 + (80\,\text{m})^2 + (30\,\text{m})^2} = 94.3\,\text{m}$$

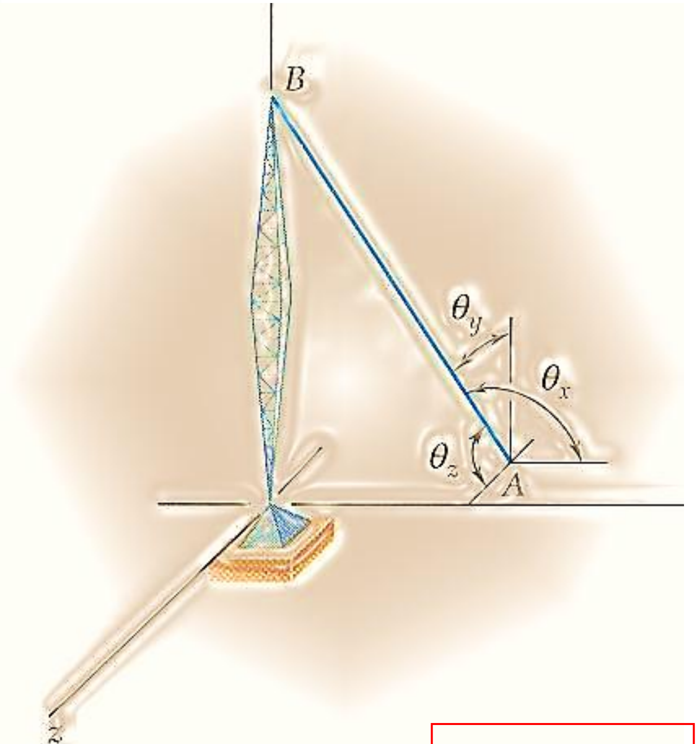


- مقدار بردار یکه برابر است با:

$$\vec{\lambda} = \left(\frac{-40}{94.3}\right)\vec{i} + \left(\frac{80}{94.3}\right)\vec{j} + \left(\frac{30}{94.3}\right)\vec{k} = -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

Meysam4366@yahoo.com

مثال ۶



- مولفه های نیرو برابر است با:

$$\vec{F} = F\vec{\lambda}$$
$$= (2500\ \text{N})(-0.424\,\vec{i} + 0.848\,\vec{j} + 0.318\,\vec{k})$$
$$= (-1060\ \text{N})\vec{i} + (2120\ \text{N})\vec{j} + (795\ \text{N})\vec{k}$$

F_x F_y F_z

- تعیین مقدار زوایا:

$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\,\vec{k}$$
$$= -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

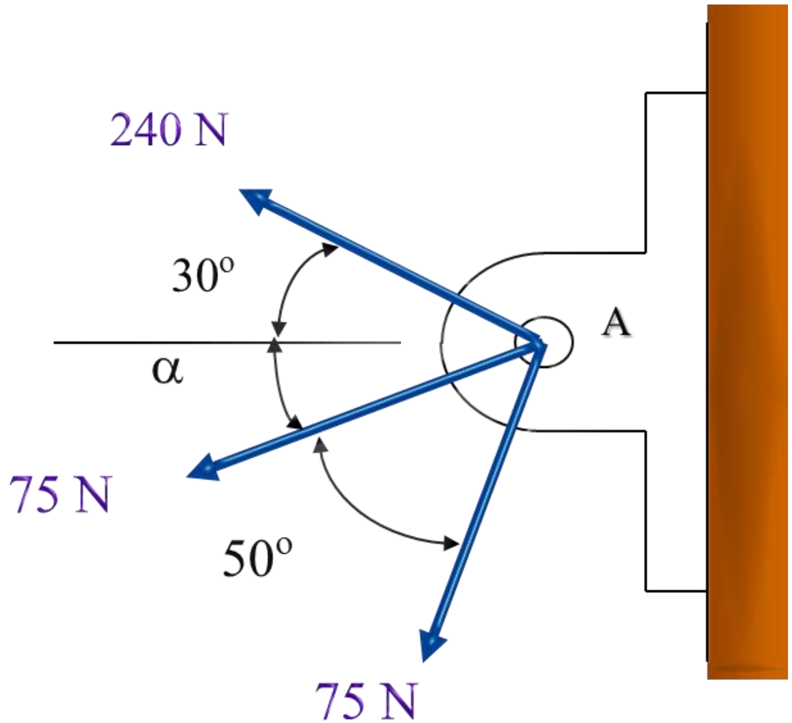
$$\boxed{\begin{aligned}\theta_x &= 115.1^\circ\\ \theta_y &= 32.0^\circ\\ \theta_z &= 71.5^\circ\end{aligned}}$$

$$\cos^{-1}(-0.424) = 115.1^\circ$$

ضرایب λ مقدار کسینوسهای هادی را مشخص میکنند.

مثال ۷

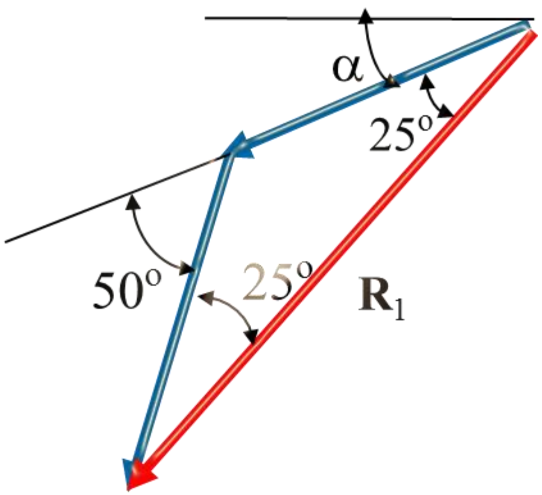
- در گیره ای زاویه بین دو نیروی 75N همیشه 50 درجه است.مقدار α را تعیین کنید.

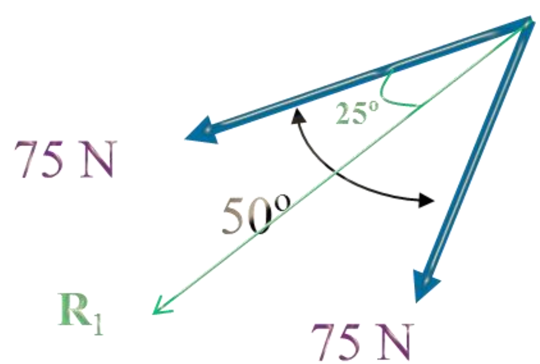


- ابتدا بردار برآیند دو نیروی 75N رابدست می آوریم.سپس زاویه آن را با افق محاسبه می کنیم.

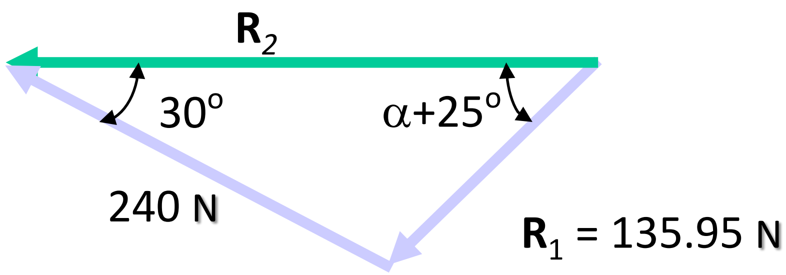
$$R_1 = 2(75\ \text{N})\cos 25^\circ = 135.95\ \text{N}$$

$$\mathbf{R}_1 = 135.95\ \text{N} \quad \alpha + 25^\circ$$





- قانون سینوسها را بین دو نیروی برآیند و 240N برقرار می کنیم.



$$\frac{\sin(\alpha+25^{o})}{240\ \text{N}} = \frac{\sin(30^{o})}{135.95\ \text{N}}$$

$$\sin(\alpha+25^{o}) = \frac{(240\ \text{N})\sin(30^{o})}{135.95\ \text{N}} = 0.88270$$

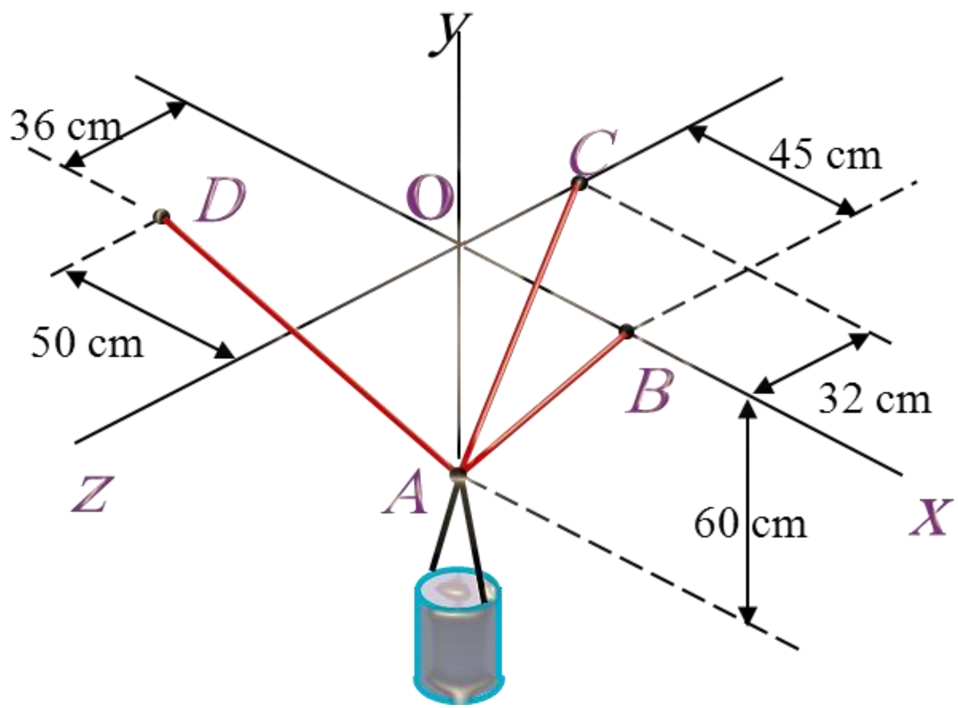
$$\boxed{\sin^{-1}(0.88270) = \alpha+25^{o}}$$

$$\alpha + 25^{o} = 61.97^{o}$$

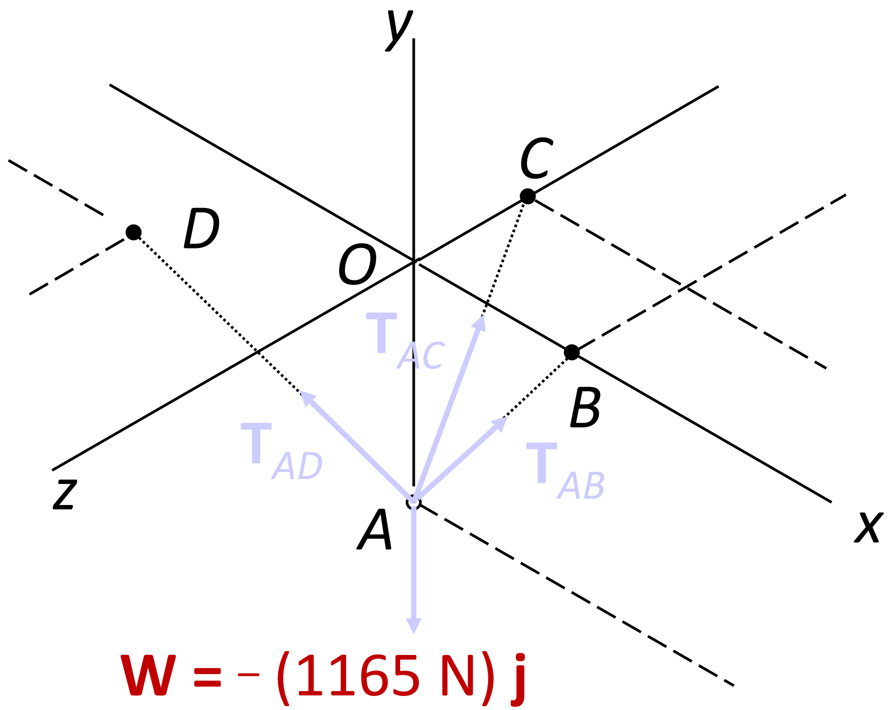
$$\boxed{\alpha = 37.0^{o}}$$

مثال ۸

- وزنه ای با وزن 1165N مطابق شکل از سقفی درحالت تعادل آویزان است مطلوبست میزان کشش در هر طناب.



- ابتدا دیاگرام جسم آزاد را رسم می کنیم.



- درحالت تعادل

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

$$\mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} + \mathbf{W} = 0$$

- طول هر کابل

$AB = 75$ cm　　$\overrightarrow{AB} = (45)\mathbf{i} + (60)\mathbf{j}$　　درصفحهٔ **XY**

$AC = 68$ cm　　$\overrightarrow{AC} = (60)\mathbf{j} - (32)\mathbf{k}$　　درصفحهٔ **YZ**

$AD = 86$ cm　　$\overrightarrow{AD} = (-50)\mathbf{i} + (60)\mathbf{j} + (36)\mathbf{k}$　　درفضای **XYZ**

- مقدار نیرو در هر کابل خواهد شد:

$$\boxed{\mathbf{F} = F\lambda = (d_x\,\mathbf{i} + d_y\,\mathbf{j} + d_z\,\mathbf{k})}$$

$$T_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \left(\frac{45}{75}i - \frac{60}{75}j\right)T_{AB} = (0.6i - 0.8j)T_{AB}$$

$$T_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \left(\frac{60}{68}j - \frac{32}{68}K\right)T_{AC} = (0.88\,j - 0.47K)T_{AC}$$

$$T_{AD} = T_{AD}\lambda_{AD} = T_{AD}\frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \left(-\frac{50}{86}i + \frac{60}{86}j + \frac{36}{86}K\right)T_{AD} = (-0.58i + 0.7\,j + 0.42K)T_{AD}$$

Meysam4366@yahoo.com

- باتوجه به معادله $\Sigma \mathbf{F} = 0$:

(i) $0.6\,T_{AB} - 0.58T_{AD} = 0$ $\qquad T_{AB} = 0.969\,T_{AD}$

(j) $0.8\,T_{AB} + 0.88T_{AC} + 0.7T_{AD} - 1165\text{ N} = 0$

(k) $-0.47T_{AC} + 0.42T_{AD} = 0$ $\qquad T_{AC} = 0.8895\,T_{AD}$

- جایگذاری معادلات i و k در j:

$$(0.8 \times 0.969 + 0.88 \times 0.8895)\,T_{AD} + 0.7T_{AD} - 1165\text{ N} = 0$$

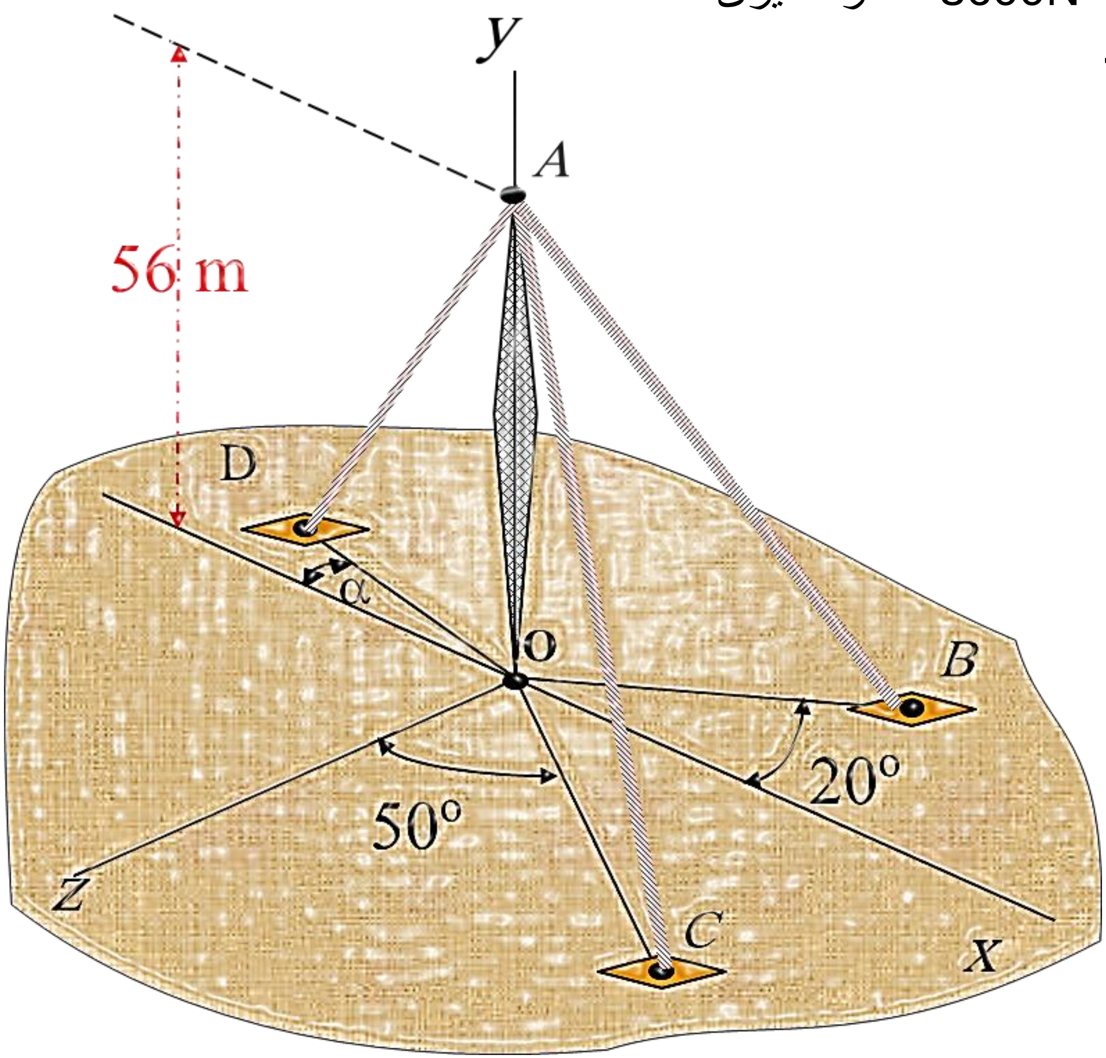
$$2.2578\,T_{AD} - 1165\text{ N} = 0 \qquad \boxed{T_{AD} = 516\text{ N}}$$

$$\text{(i)}:\quad T_{AB} = 0.969\,(516\text{ N}) \qquad \boxed{T_{AB} = 500\text{ N}}$$

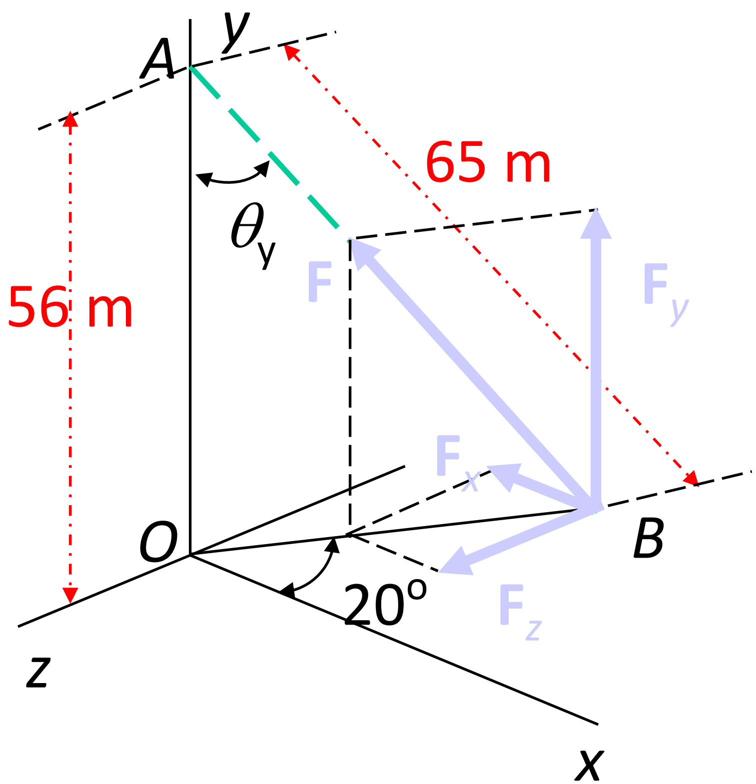
$$\text{(k)}:\quad T_{AC} = 0.8895\,(516\text{ N}) \qquad \boxed{T_{AC} = 459\text{ N}}$$

مثال ۹

- دکلی به ارتفاع 56m توسط سه کابل مهار شده است.اگرطول کابل ABبرابر 65m ونیروی کشش آن 3600N اندازه گیری شده باشد.مطلوبست تجزیه نیروی کابل AB.



- ابتدا دیاگرام جسم آزاد را رسم می کنیم.



- درمرحله دوم کسینوسهای هادی را تعیین می کنیم.

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F}$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{F}$$

برای مثلث : *AOB*

$$\cos\theta_y = \frac{56\text{ m}}{65\text{ m}} = 0.86154$$

$$\boxed{\theta_y = 30.51^\circ}$$

Meysam4366@yahoo.com

- از تجزیه بردار در جهت محورهای عمود بر آن خواهیم داشت:

$$F_x = F_h \cos\phi = F \sin\theta_y \cos\phi$$

$$F_z = F_h \sin\phi = F \sin\theta_y \sin\phi$$

(a) $F_x = -F \sin\theta_y \cos 20^\circ = -(3900\ \text{N}) \sin 30.51^\circ \cos 20^\circ$

$$\boxed{F_x = -1861\ \text{N}}$$

$$F_y = +F\cos\theta_y = (3900\ \text{N})(0.86154)$$

$$\boxed{F_y = +3360\ \text{N}}$$

$$F_z = +(3900\ \text{N}) \sin 30.51^\circ \sin 20^\circ$$

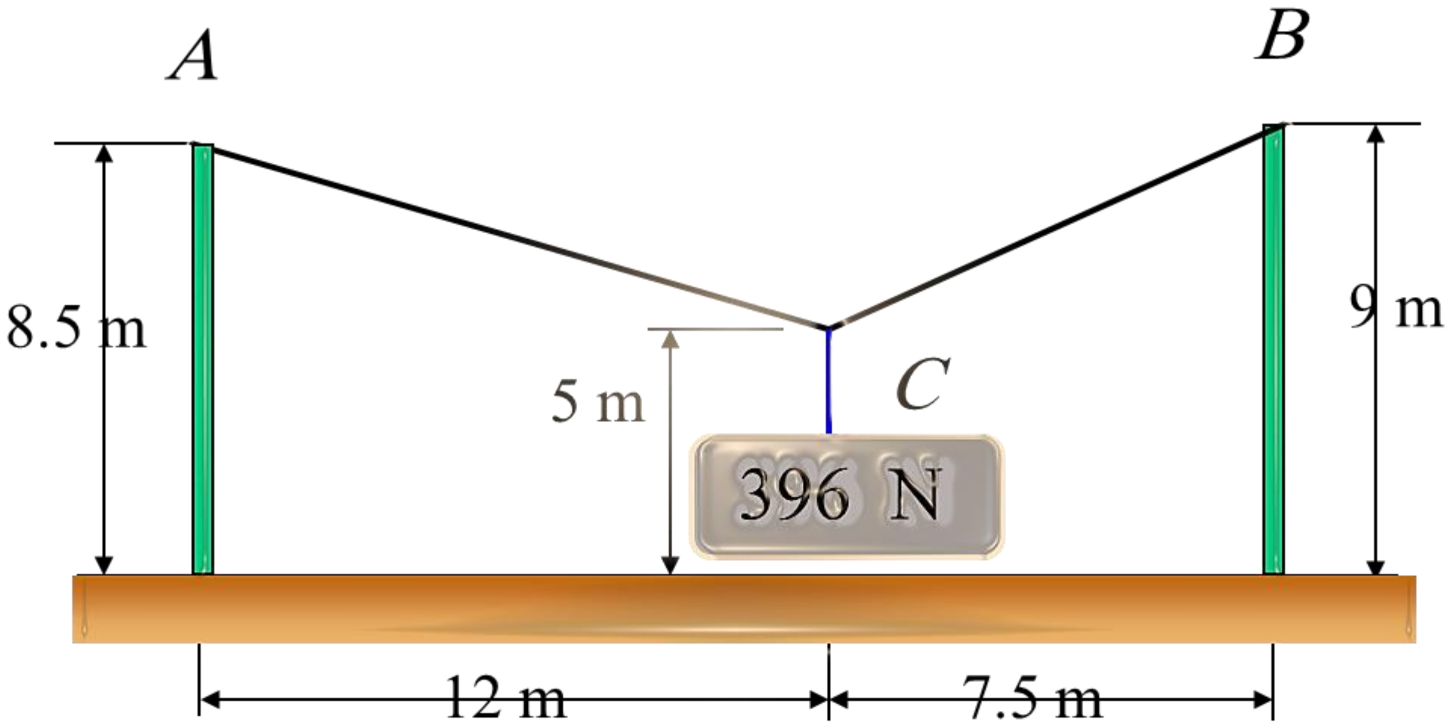
$$\boxed{F_z = +677\ \text{N}}$$

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1861\ \text{N}}{3900\ \text{N}} \qquad \cos\theta_x = -0.4771 \qquad \theta_x = 118.5^\circ$$

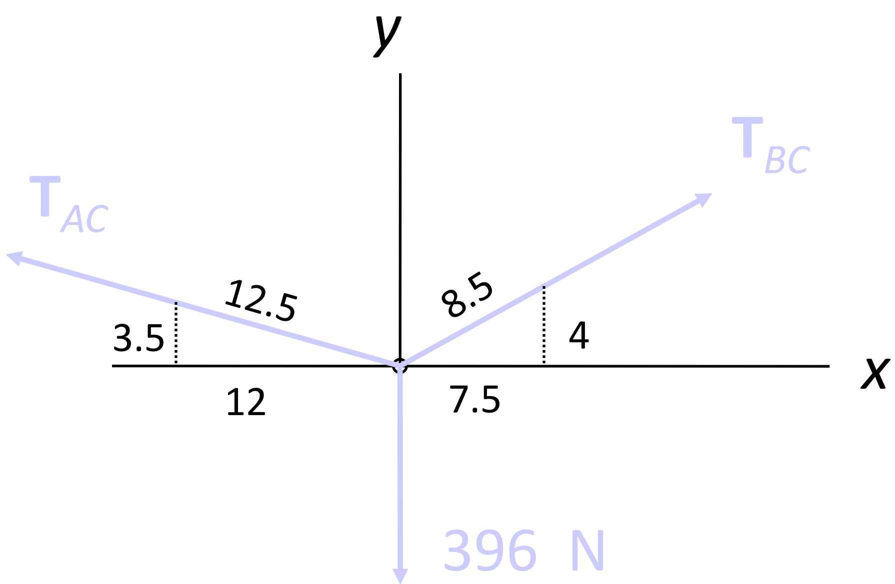
$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{677\ \text{N}}{3900\ \text{N}} \qquad \cos\theta_z = +0.1736 \qquad \theta_z = 80.0^\circ$$

مثال ۱۰

- مطلوبست کشش در دو کابل AC و BC .



- دیاگرام جسم آزاد



$$\Sigma F_x = 0 : -\frac{12}{12.5} T_{AC} + \frac{7.5}{8.5} T_{BC} = 0$$

$$\boxed{T_{BC} = 1.088\, T_{AC}}$$

$$\Sigma F_y = 0 : \frac{3.5}{12.5} T_{AC} + \frac{4}{8.5} T_{BC} \quad 396_{N} = 0$$

$$\frac{3.5}{12.5} T_{AC} + \frac{4}{8.5} (1.088\, T_{AC}) - 396_{N} = 0$$

$$(0.280 + 0.512)\, T_{AC} - 396_{N} = 0$$

$$\boxed{T_{AC} = 500 \text{ kg}}$$

$$T_{BC} = 1.088\, (500_{N})$$

$$\boxed{T_{BC} = 544 \text{ kg}}$$

3

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.SC.

اجسام صلب:

سیستم نیروهاي معادل

- اثری که نیروها برجسم صلب دارند فقط به صورت حرکت (یاعدم حرکت) جسم که ناشی ازاعمال نیروهاست ظاهر می شود.

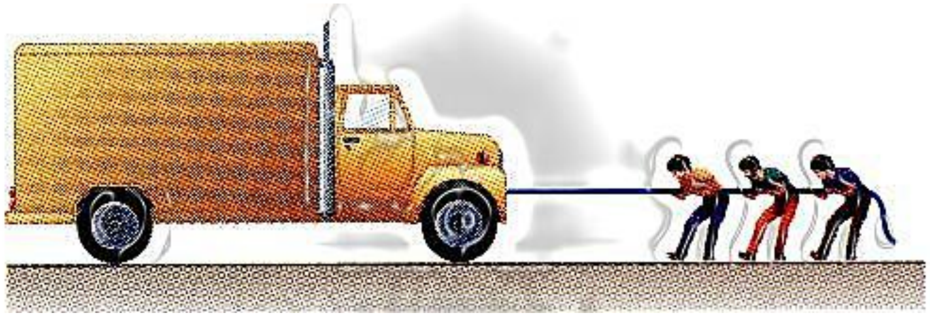
- دو سیستم نیرو درصورتی هم ارز هستند که توانایی ایجاد حرکت یکسانی را در جسم صلب داشته باشند.

- هرسیستم نیرو باید درهمه راستاها «رانش» یا «کشش» مساوی برجسم اعمال کند.
- هرسیستم نیرو باید کنش «چرخشی» یکسانی نسبت به تمام نقاط فضا اعمال کند.

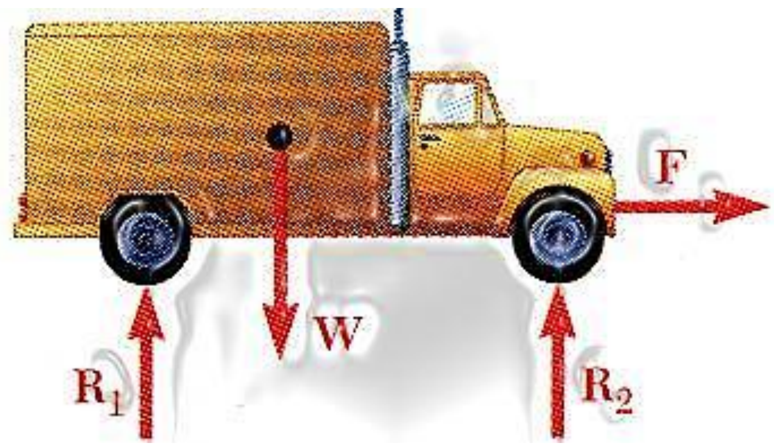
- مجموع یک مجموعه ازنیروهای متقاطع، نیروی واحد است که هم ارز سیستم اولیه است.(وبرعکس)
- یک نیرو را می توان در راستای خط حاملش حرکت داد.
- تنها اثری که یک کوپل بر جسم صلب دارد در گشتاور کوپل نمایان می شود.

Meysam4366@yahoo.com

نیروهای خارجی و داخلی



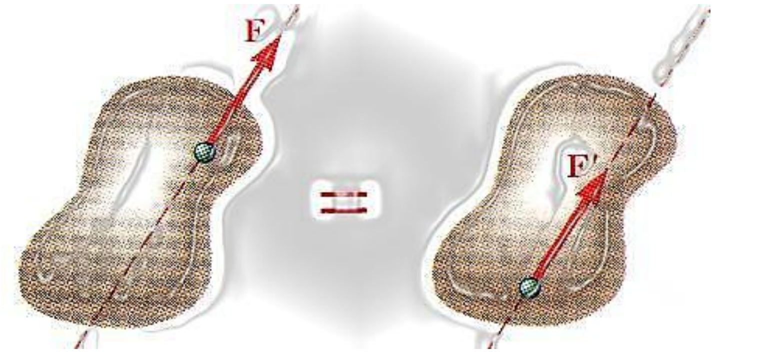
- عمل نیروها روی اجسام صلب به دو گروه تقسیم می شود:
  - نیروهای خارجی
  - نیروهای داخلی



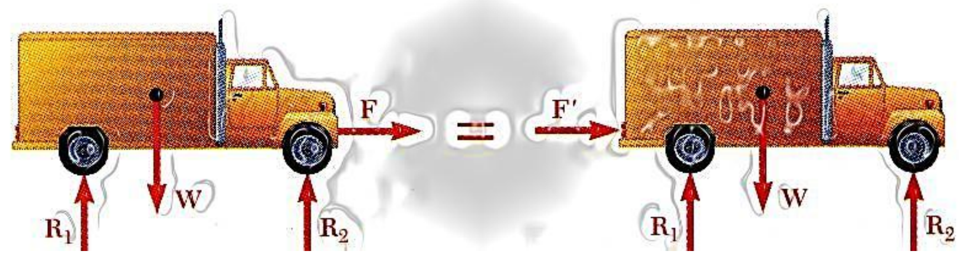
- نیروهای خارجی را روی دیاگرام آزاد جسم نمایش می دهند.

- اگرممانعتی بوجود نیاید نیروهای خارجی روی جسم حرکت انتقالی یا دورانی و یا هردو را ایجاد میکنند.

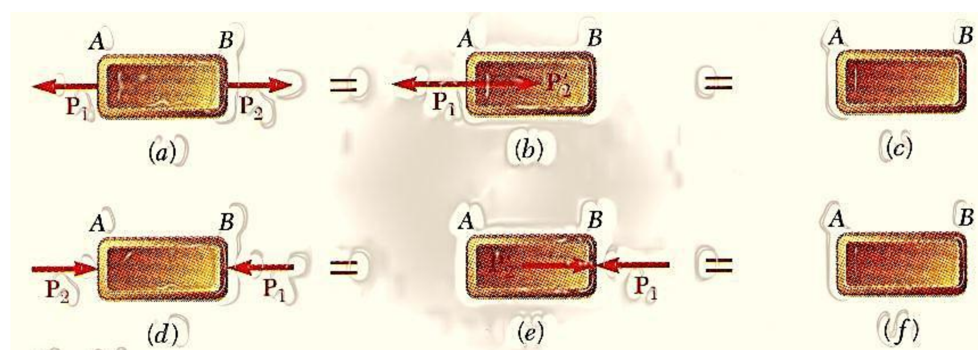
اصل انتقال ; نیروهای هم ارز



- طبق اصل انتقال پذیری می توان نیرو رابه موازات خودش به هرمکانی و ازجمله مبدا مختصات انتقال داد.اثر هم ارزی نیروها تنها برروی جسم صلب وجود دارد.

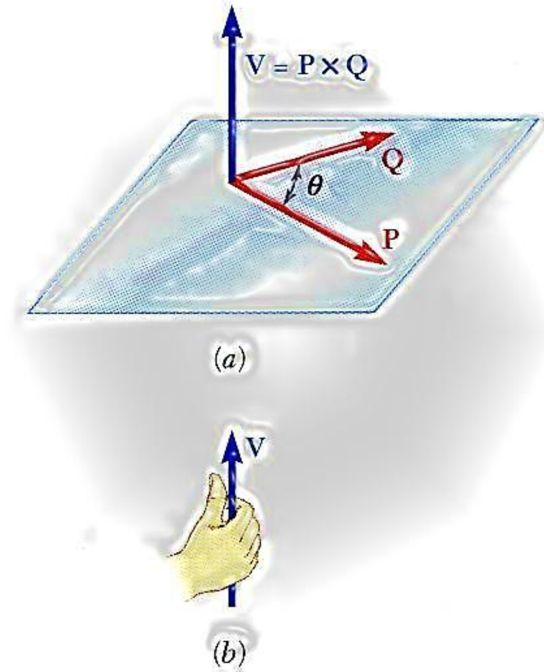


- انتقال نیروی F از سپر جلویی به سپر عقبی کامیون وقتی نیروی دیگری رو بدنه اثر نمی کند بیان هم ارزی نیروی جلویی با نیروی عقب کامیون است.



- برای تعادل جسم لازم است که سیستم برآیند نیروها و گشتاورهای جفت موثربرجسم ،بردارهای صفر باشند.

ضرب خارجی دو بردار



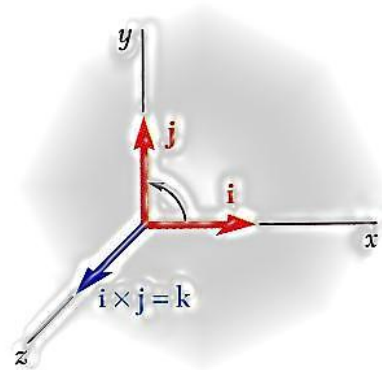
- مفهوم گشتاوریک نیرو توسط بردار تولید شده از عملیات ضرب خارجی مشخص می شود.
- بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار Pو Q بردار V است که با صفحه گذرنده از دو برداردیگر عمود است.
  - ✓ جهت بردار V با قانون دست راست تعیین می شود.
  - ✓ بزرگی بردار V برابر است با: $V = PQ\sin\theta$

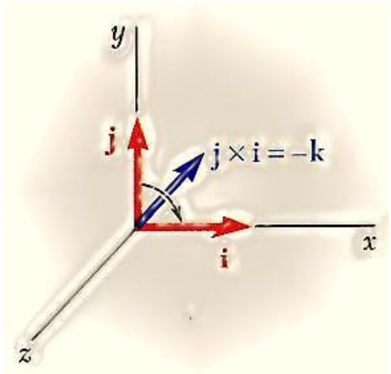
- خاصیت بردار
  - بدون خاصیت جابجایی $\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})$
  - دارای خاصیت توزیعی $\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2) = \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}_2$
  - بدون خاصیت شرکت پذیری $(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q})\times\boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{S})$

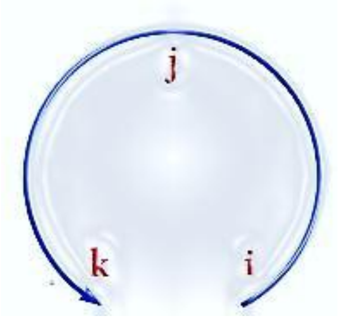
ضرب خارجی : مولفه های عمود

- ضرب خارجی بردارهای واحد

$$
\begin{array}{lll}
i \times i = 0 & j \times i = -k & k \times i = j \\
i \times j = k & j \times j = 0 & k \times j = -i \\
i \times k = -j & j \times k = i & k \times k = 0
\end{array}
$$







- حاصل ضرب خارجی بردار برحسب مولفه های مستطیلی

$$
\mathbf{V} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}
$$

گشتاور یک نیرو حول یک نقطه

- یک بردار توسط بزرگی و جهتش تعریف می شود.درضمن تاثیرش روی جسم صلب به نقطه اثر آن بستگی دارد.

- گشتاور M حول O بصورت زیر تعریف می شود:

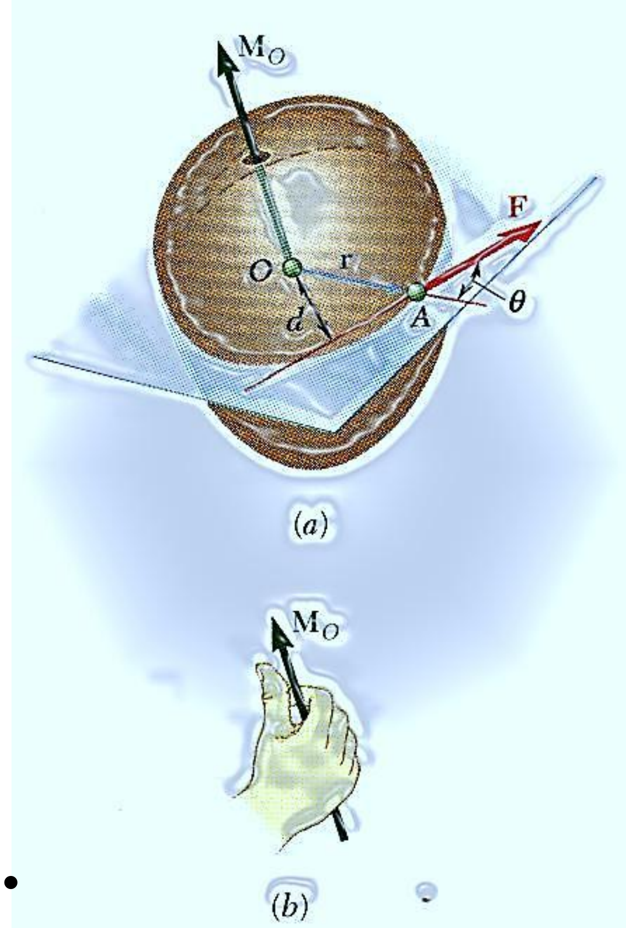
$$M_O = r \times F$$

- بردارگشتاور M_o برداری عمود بر صفحه دربردارنده نقطه O ونیروی F است.

- بزرگی بردار M_o :

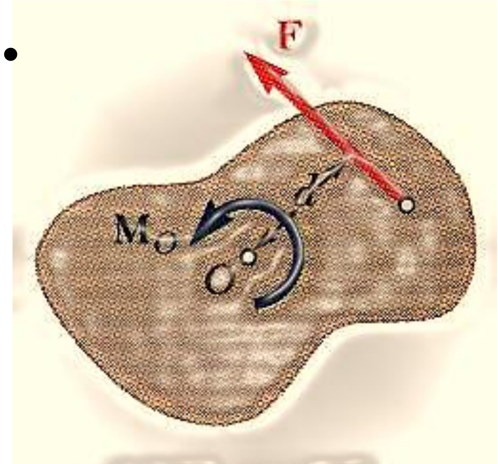
$$M_O = rF\sin\theta = Fd$$

جهت گشتاور ممکن است توسط قانون دست راست تعیین شود.



- گشتاوریک نیرو نسبت به یک محور مساوی است بامولفه اسکالربردارگشتاور در راستای محور نسبت به هر نقطه محور. این تعریف درمورد سه مولفه عمودی گشتاور نیز صادق است.

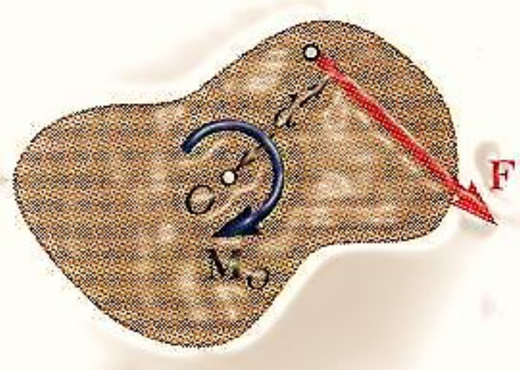
گشتاور یک نیرو حول یک نقطه



$(a)\ M_O = +Fd$

- برای محاسبه گشتاور دریک نقطه باید نیروی عمود بر محور گذرنده از آن نقطه را در نظر بگیریم.

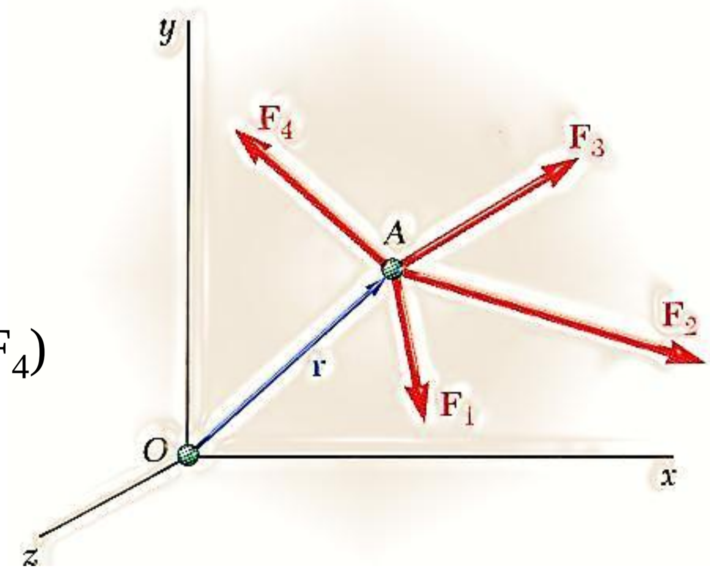
- هرگاه نیرو تمایل به گردش جسم بصورت ساعتگرد داشته باشد مقداربزرگی گشتاور را بصورت قراردادی مثبت در نظر گرفته می شود.



$(b)\ M_O = -Fd$

- هرگاه نیرو تمایل به گردش جسم بصورت پاد ساعتگرد داشته باشد مقداربزرگی گشتاور را بصورت قراردادی منفی در نظر گرفته می شود.

تئوری Varignon (وارینیون)



- گشتاور حاصل از چند نیرو حول یک نقطه برابر گشتاوری است که مجموع تمام نیروها حول آن نقطه ایجاد می کنند.

$$(F_1\times r)+(F_2\times r)+(F_3\times r)+ (F_4\times r) = r\times(F_1+F_2+F_3+F_4)$$

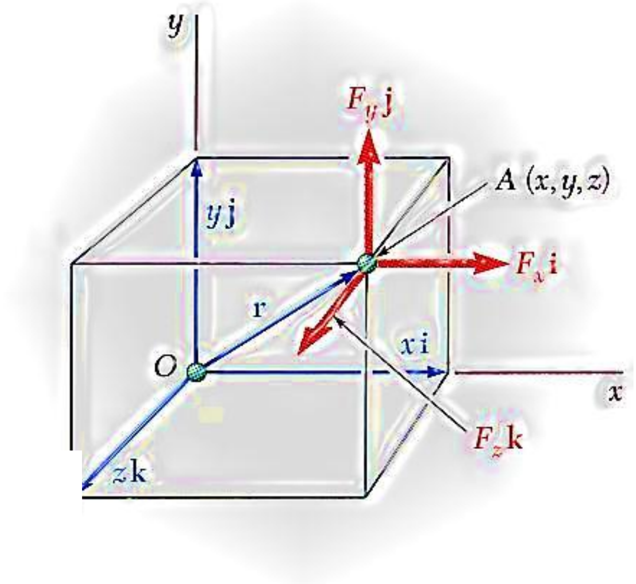
- **برای محاسبه گشتاور دریک نقطه باید نیروی عمود بر محور گذرنده از آن نقطه را در نظر بگیریم.**

- مطابق تئوری Varignon گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه های نیرو حول همان نقطه است.

$$M_o = (M_1)+(M_2)+(M_3)+ (M_4) =$$
$$= (F_1\times r)+(F_2\times r)+(F_3\times r)+ (F_4\times r) =$$
$$= r\times(F_1+F_2+F_3+F_4)$$

مولفه های مستطیلی گشتاور یک نیرو

- گشتاور F حول O در مبدا مختصات



$$M_O = r \times F, \quad r = xi + yj + zk$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$M_O = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

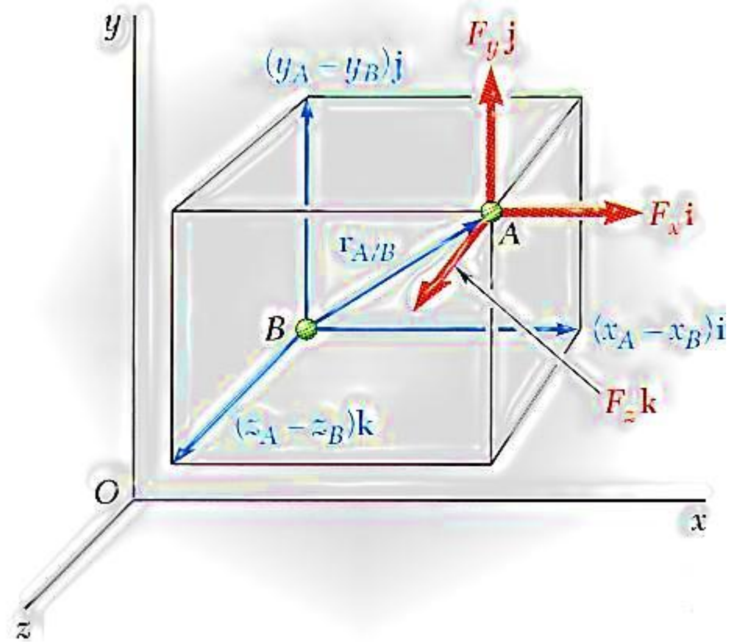
$$= \left(yF_z - zF_y\right)i + \left(zF_x - xF_z\right)j + \left(xF_y - yF_x\right)k$$

مولفه های مستطیلی گشتاور یک نیرو

- گشتاور F حول B

$$M_B = r_{A/B} \times F$$

$$r_{A/B} = r_A - r_B$$
$$= (x_A - x_B)i + (y_A - y_B)j + (z_A - z_B)k$$
$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$



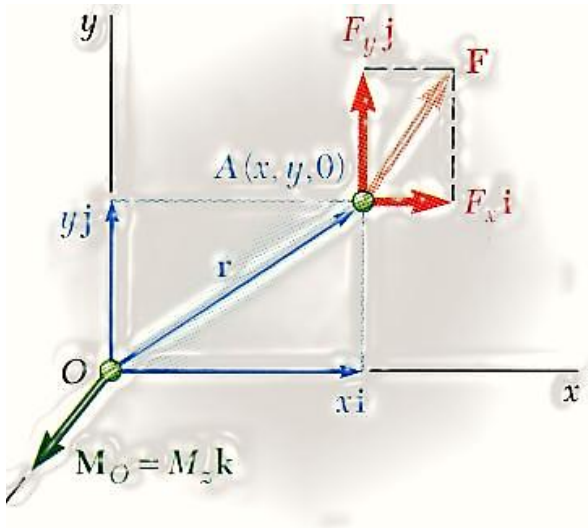
$$M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

مولفه های مستطیلی گشتاور یک نیرو

- برای مختصات دو بعدی

$$M_O = \left(xF_y - yF_x\right)k$$

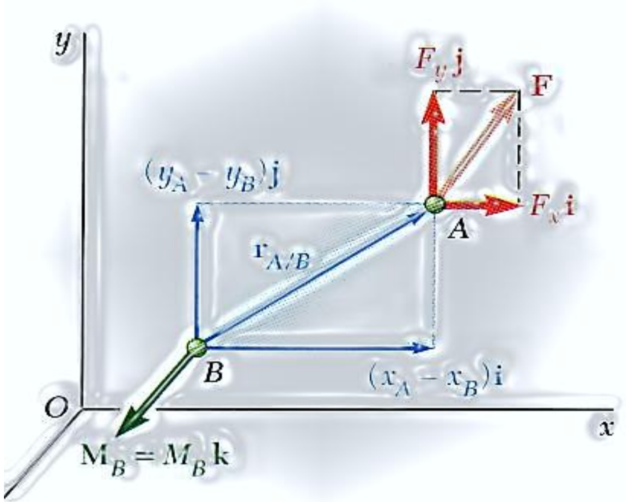
$$M_O = M_Z$$
$$= xF_y - yF_x$$



$$M_B = \left[\left(x_A - x_B\right)F_y - \left(y_A - y_B\right)F_x\right]k$$

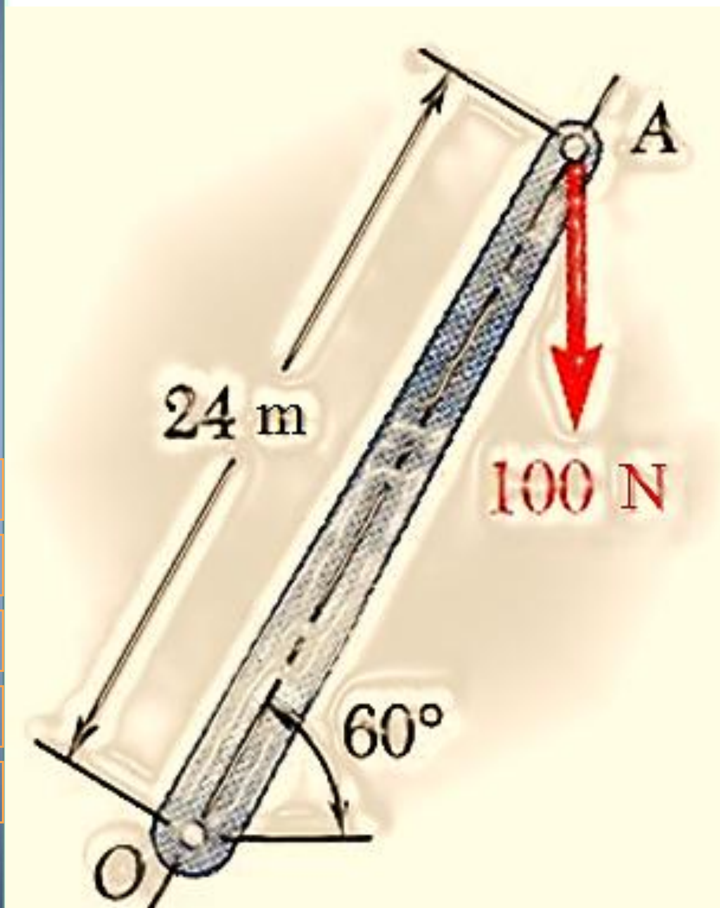
$$M_B = M_Z$$
$$= \left(x_A - x_B\right)F_y - \left(y_A - y_B\right)F_x$$

$$M_B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{vmatrix} (x_A - x_B) & (y_A - y_B) \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \end{array}$$



مثال ۱

- نیروی 100N به انتهای یک شفت وارد می شود،مطلوبست:



a) لنگر حول نقطه O

b) چه نیروی افقی در A اعمال شود تا لنگری مشابه ایجاد کند؟

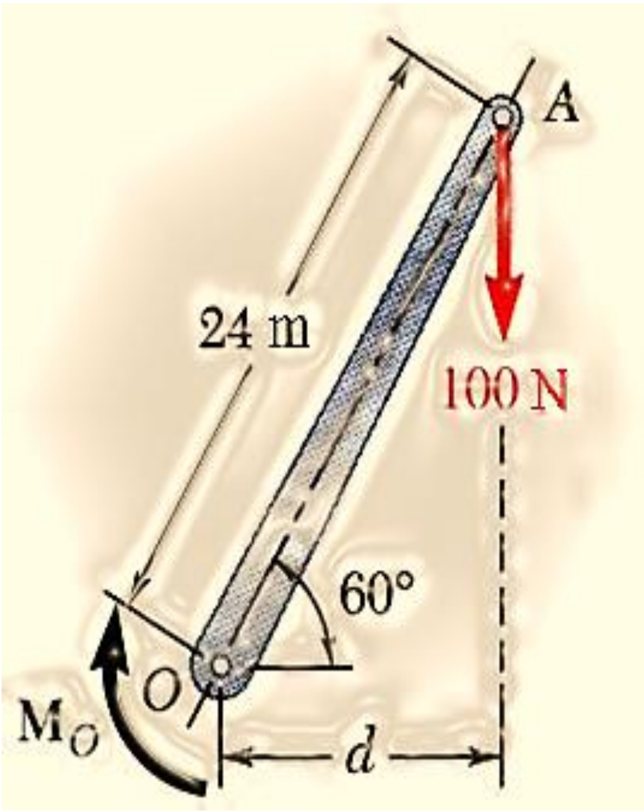
c) کمترین نیرویی که می توان در A اعمال کرد تا لنگری مشابه بوجود آورد؟

d) موقعیت نیروی 240N بصورت عمود که لنگری مشابه بوجود آورد؟

e) کدام یک ازنیروهای فوق معادل نیروی اصلی (100N) است؟

مثال ۱

a) لنگر نیروی 100N برابر فاصله عمودی این نیرو تا نقطه مورد نظر ضربدر مقدار بزرگی نیرو است.



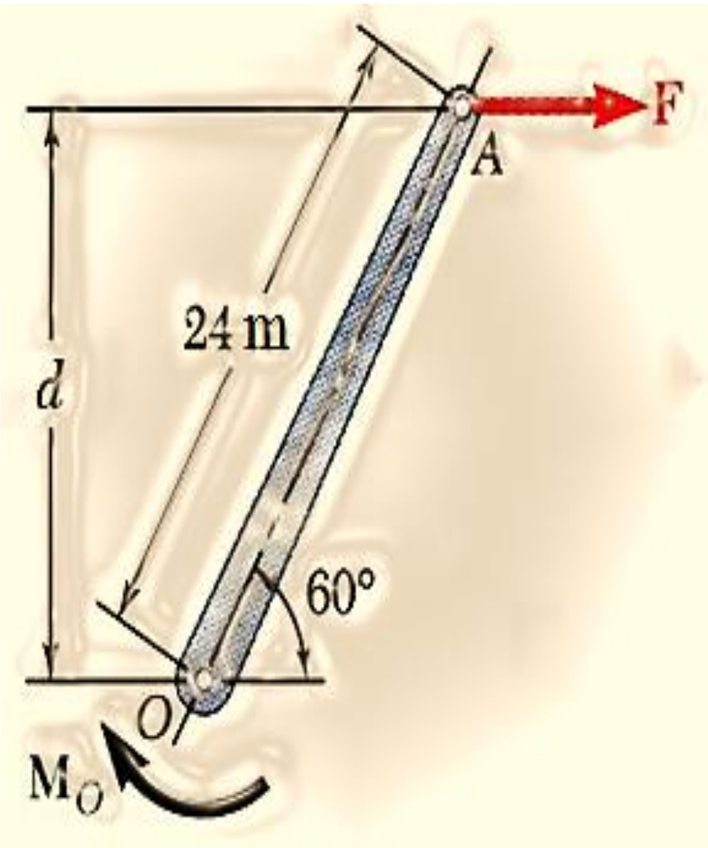
$$M_O = Fd$$

$$d = (24\ \mathrm{m})\cos 60° = 12\ \mathrm{m}$$

$$M_O = (100\ \mathrm{N})(12\ \mathrm{m})$$

$$\boxed{M_O = 1200\ \mathrm{N \cdot m}}$$

مثال ۱



b) نیروی افقی در A که لنگری مشابه ایجاد می کند

$$d = (24\ \mathrm{m})\sin 60^\circ = 20.8\ \mathrm{m}$$

$$M_O = Fd$$

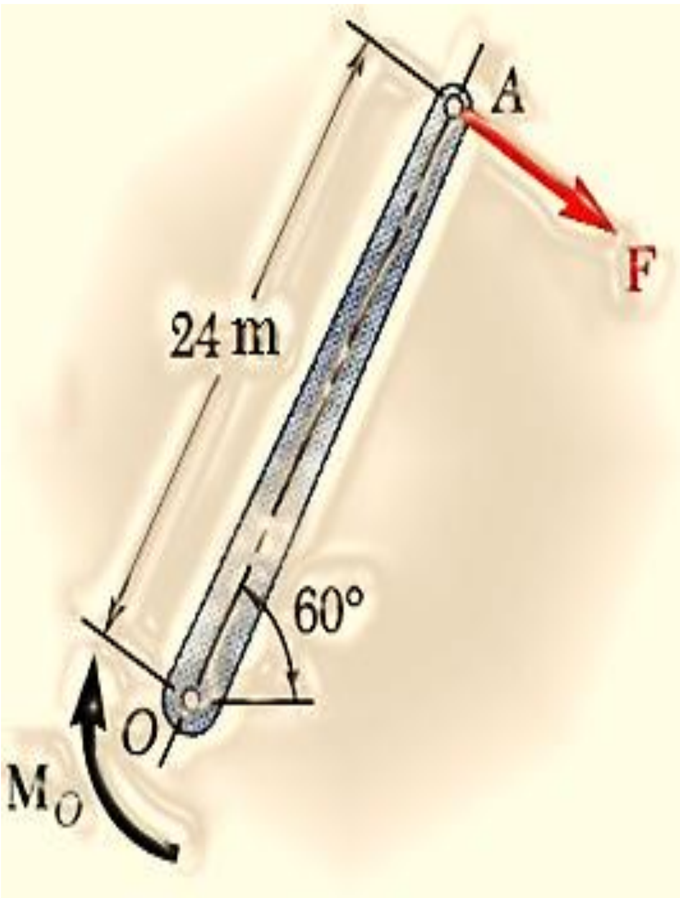
$$1200\ \mathrm{N\cdot m} = F(20.8\ \mathrm{m})$$

$$F = \frac{1200\ \mathrm{N\cdot m}}{20.8\ \mathrm{m}}$$

$$\boxed{F = 57.7\ \mathrm{N}}$$

مثال ۱

c) کمترین نیرویی که می توان در A اعمال کرد تا لنگری مشابه بوجود آورد:



$$M_O = Fd$$

$$1200\ \mathrm{N \cdot m} = F(24\ \mathrm{m})$$

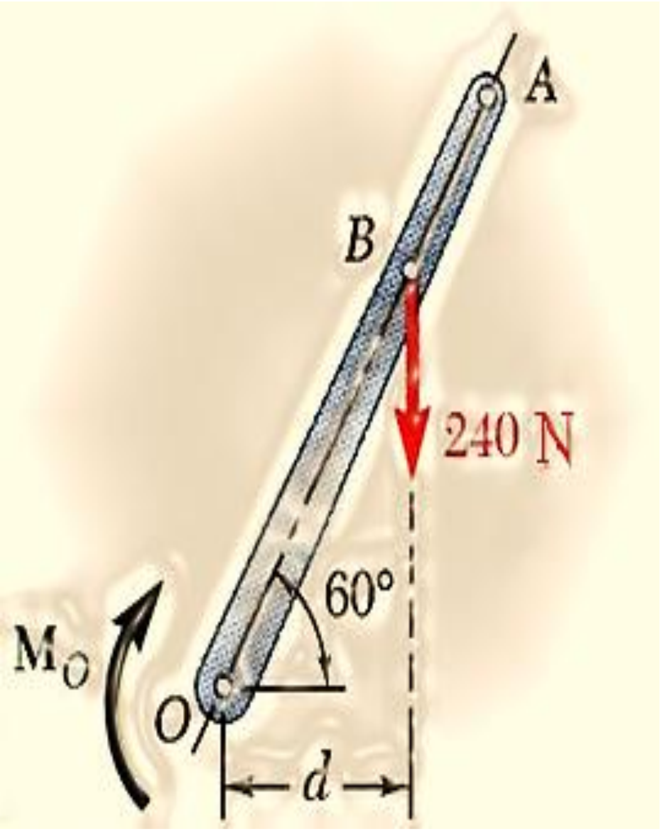
$$F = \frac{1200\ \mathrm{N \cdot m}}{24\ \mathrm{m}}$$

$$\boxed{F = 50\ \mathrm{N}}$$

Meysam4366@yahoo.com

مثال ۱

d) موقعیت نیروی 240N عمودی که لنگری مشابه بوجود می آورد:



$$M_O = Fd$$

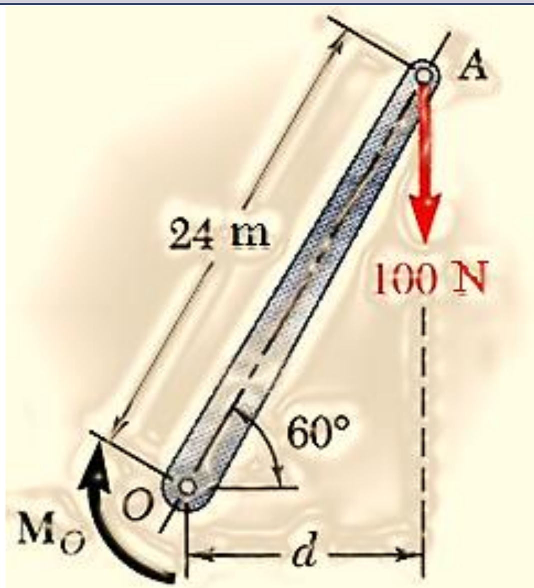
$$1200\ \mathrm{N \cdot m} = (240\ \mathrm{N})d$$

$$d = \frac{1200\ \mathrm{N \cdot m}}{240\ \mathrm{N}} = 5\ \mathrm{m}$$

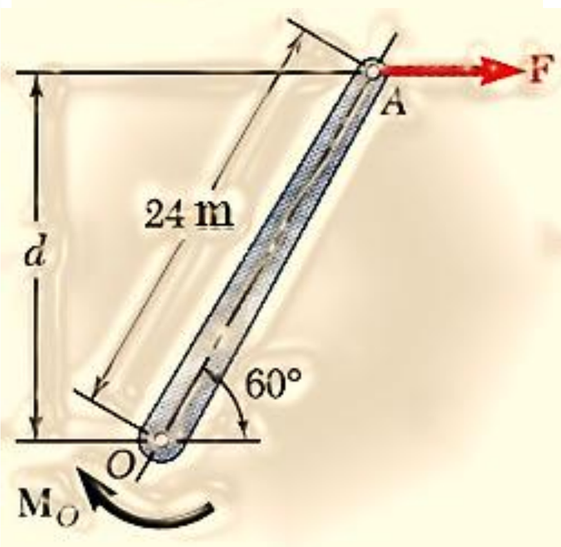
$$OB\cos 60^\circ = 5\ \mathrm{m}$$

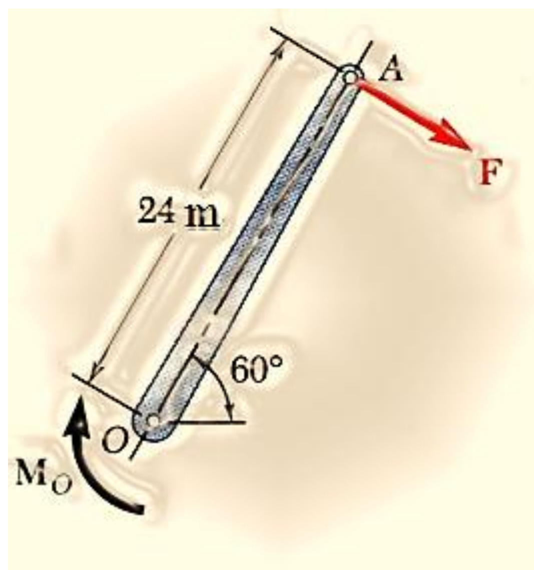
$$\boxed{OB = 10\ \mathrm{m}}$$

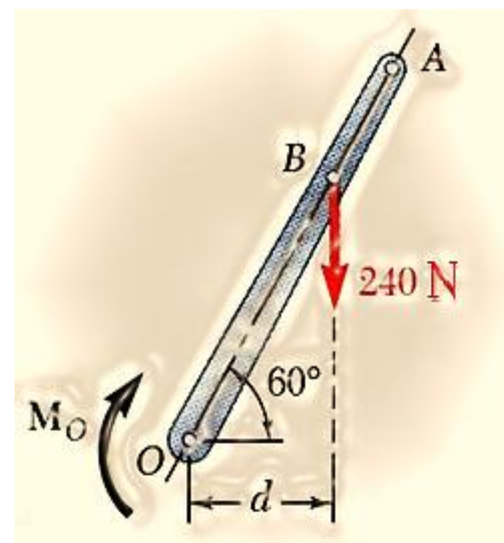
مثال ۱



e) گرچه این نیروها لنگر مشابه (1200N.m) ایجاد می کنند اما هیچکدام برابر نیروی 100N نخواهد بود.

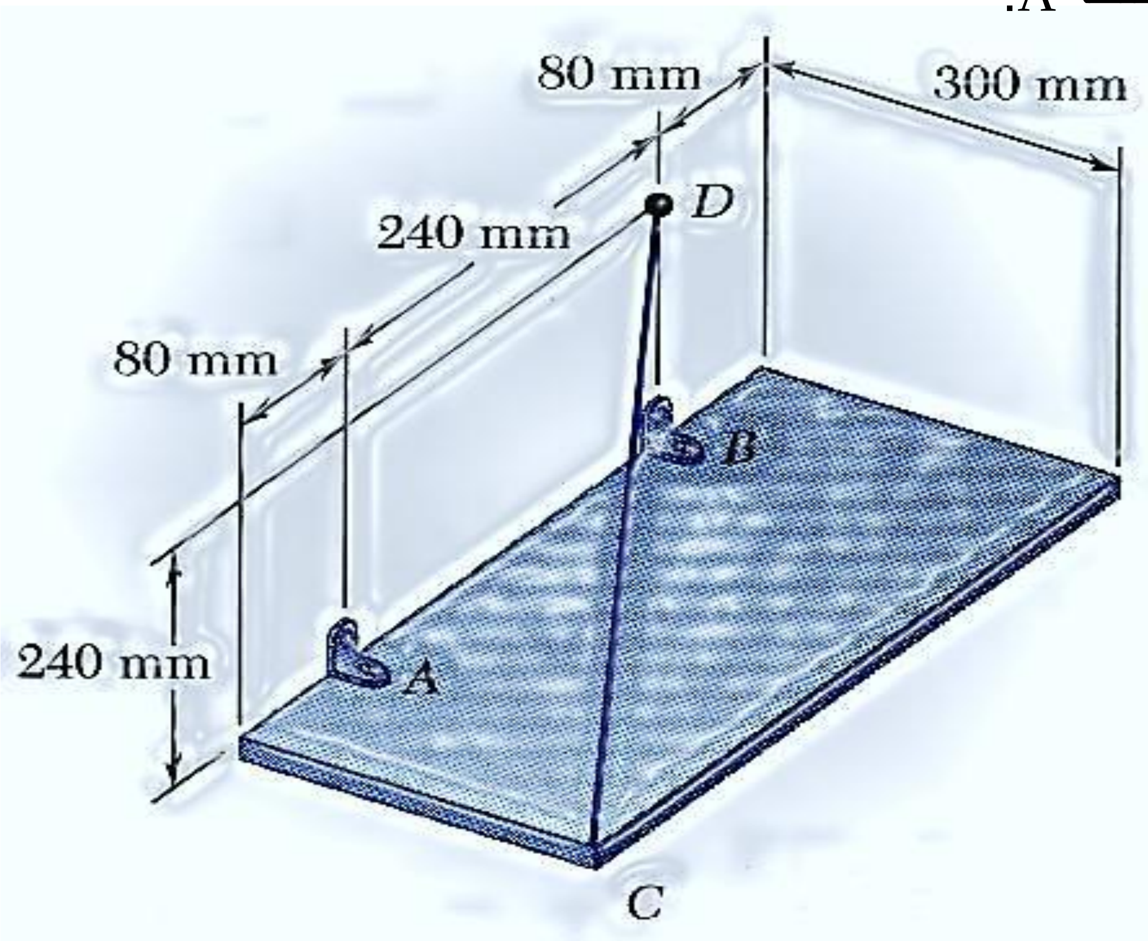






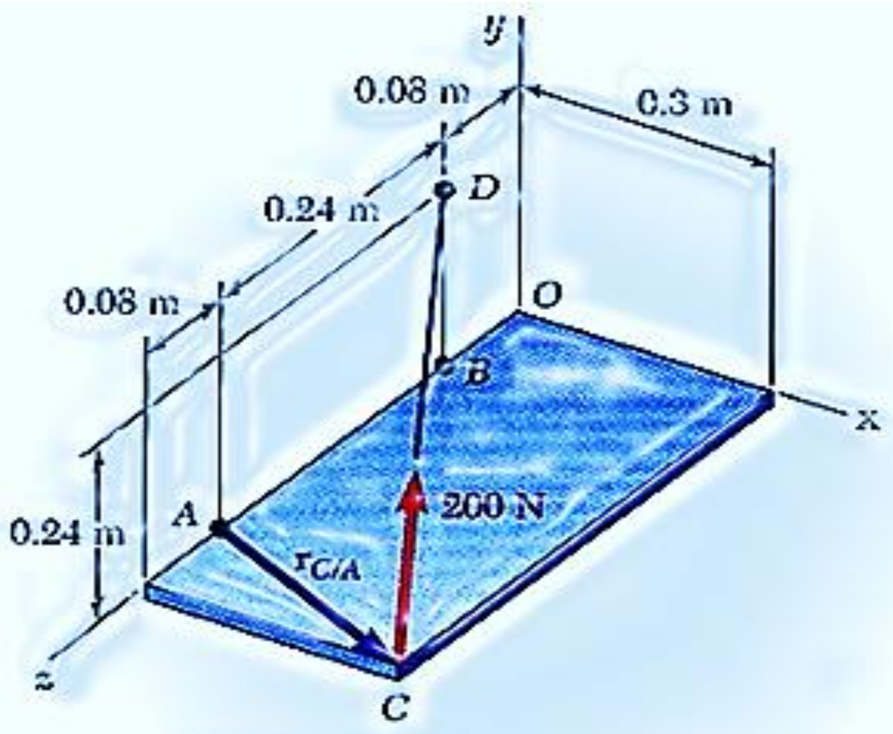
مثال ۲

- صفحه مستطیلی توسط دو نبشی در نقاط Aو B و سیم CD مهار شده است.اگر نیروی کششی در سیم 200N باشد ،مطلوبست لنگر در نقطه A.



مثال ۲

لنگردر A حاصل بردارنیرویی در C است که درفاصله ای که تا A دارد بصورت عمودی ضرب می شود.



A (0, 0 ,0.32)
C (0.3 , 0 , 0.4)
D(0 , 0.24 , 0.08)

$$M_A = r_{C/A} \times F$$

$$r_{C/A} = r_C - r_A = (0.3\ \text{m})\vec{i} + (0.08\ \text{m})\vec{k}$$

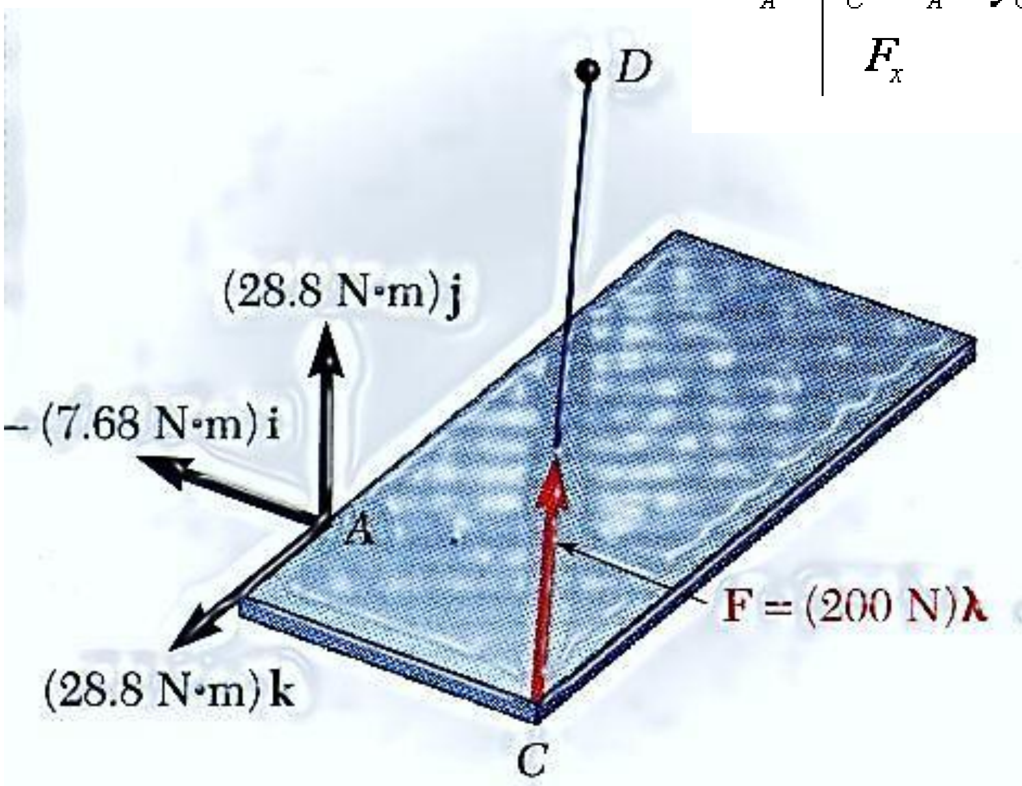
$$F = F\lambda = (200\ \text{N})\frac{\overrightarrow{r_{C/D}}}{r_{C/D}}$$

$$= (200\ \text{N})\frac{-(0.3\ \text{m})i + (0.24\ \text{m})j - (0.32\ \text{m})k}{0.5\ \text{m}}$$

$$= -(120\ \text{N})i + (96\ \text{N})j - (128\ \text{N})k$$

مثال ۲

$$M_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$



$$\boxed{M_A = -(7.68\,\mathrm{N\cdot m})i + (28.8\,\mathrm{N\cdot m})j + (28.8\,\mathrm{N\cdot m})k}$$

ضرب داخلی دوبردار

- ضرب داخلی(اسکالر) دو بردار P و Q بصورت زیر بیان می گردد:

$$\vec{P}\bullet\vec{Q} = PQ\cos\theta$$ حاصلضرب اسکالر

- حاصلضرب اسکالر:
  - جابجائی پذیر است: $\vec{P}\bullet\vec{Q} = \vec{Q}\bullet\vec{P}$
  - توزیع پذیر است: $\vec{P}\bullet\left(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2\right) = \vec{P}\bullet\vec{Q}_1 + \vec{P}\bullet\vec{Q}_2$
  - شرکت پذیر نیست: $\left(\vec{P}\bullet\vec{Q}\right)\bullet\vec{S} =$ تعریف نشده

- حاصلضرب اسکالر با مولفه های واحد:

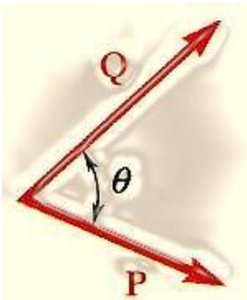
$$\vec{P}\bullet\vec{Q} = \left(P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}\right)\bullet\left(Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}\right)$$

$$\vec{i}\bullet\vec{i} = 1 \quad \vec{j}\bullet\vec{j} = 1 \quad \vec{k}\bullet\vec{k} = 1 \quad \vec{i}\bullet\vec{j} = 0 \quad \vec{j}\bullet\vec{k} = 0 \quad \vec{k}\bullet\vec{i} = 0$$

$$\vec{P}\bullet\vec{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

$$\vec{P}\bullet\vec{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$

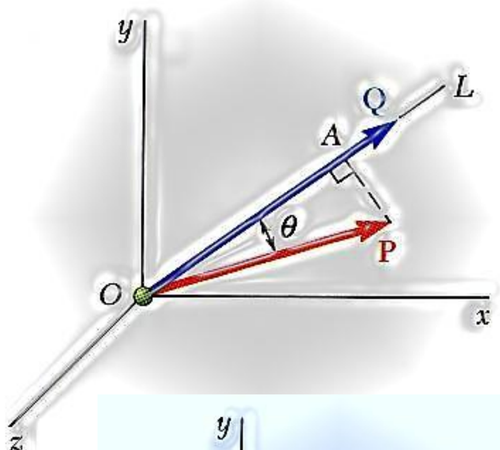
ضرب داخلی دوبردار: کاربرد



- زاویه بین دو بردار:

$$\vec{P}\bullet\vec{Q} = PQ\cos\theta = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$

$$\cos\theta = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{PQ}$$

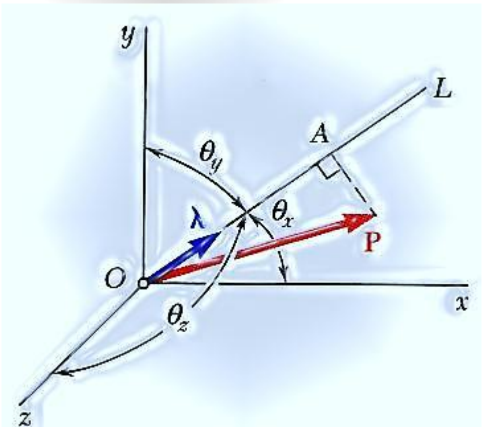


- تصویر یک بردار روی محورهای معین

$P_{OL} = P\cos\theta =$ OL روی P تصویر

$$\vec{P}\bullet\vec{Q} = PQ\cos\theta$$

$$\frac{\vec{P}\bullet\vec{Q}}{Q} = P\cos\theta = P_{OL}$$

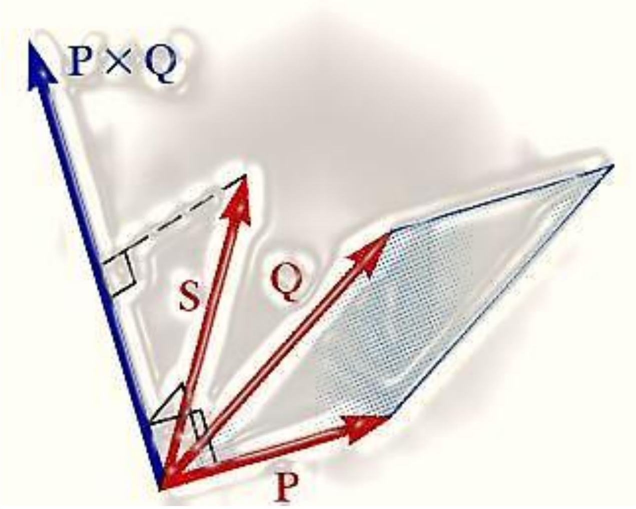


- برای یک محور می توان یک بردار واحد تعریف کرد:

$$P_{OL} = \vec{P}\bullet\vec{\lambda}$$

$$= P_x\cos\theta_x + P_y\cos\theta_y + P_z\cos\theta_z$$

حاصلضرب سه گانه سه بردار



- حاصلضرب سه گانه سه بردار

$$\vec{S}\bullet\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)=$$ نتیجه عددی

- شش ترکیب ضرب سه گانه از P وS وQ بزرگی برابری دارد اما علامت یکسانی ندارند ,

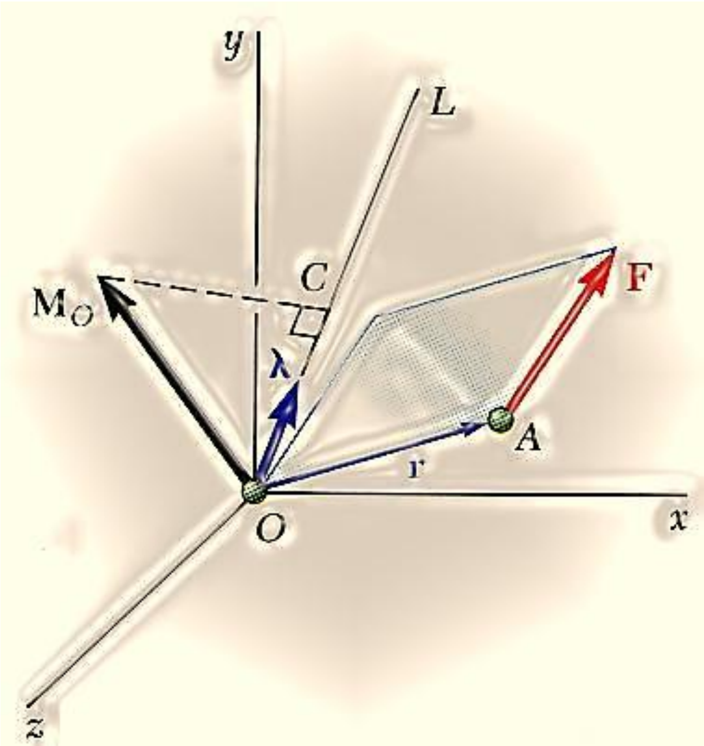
$$\vec{S}\bullet\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)=\vec{P}\bullet\left(\vec{Q}\times\vec{S}\right)=\vec{Q}\bullet\left(\vec{S}\times\vec{P}\right)$$
$$=-\vec{S}\bullet\left(\vec{Q}\times P\right)=-\vec{P}\bullet\left(\vec{S}\times\vec{Q}\right)=-\vec{Q}\bullet\left(\vec{P}\times\vec{S}\right)$$

- با ارزیابی ضرب سه گانه:

$$\boxed{\vec{S}\bullet\left(\vec{P}\times\vec{Q}\right)}=S_x\left(P_yQ_z-P_zQ_y\right)+S_y\left(P_zQ_x-P_xQ_z\right)+S_z\left(P_xQ_y-P_yQ_x\right)$$

$$\boxed{=\begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}}$$

گشتاور یک نیرو حول محوری معین



- گشتاور Mo که حاصل اثرکردن نیروی F در نقطه A است:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

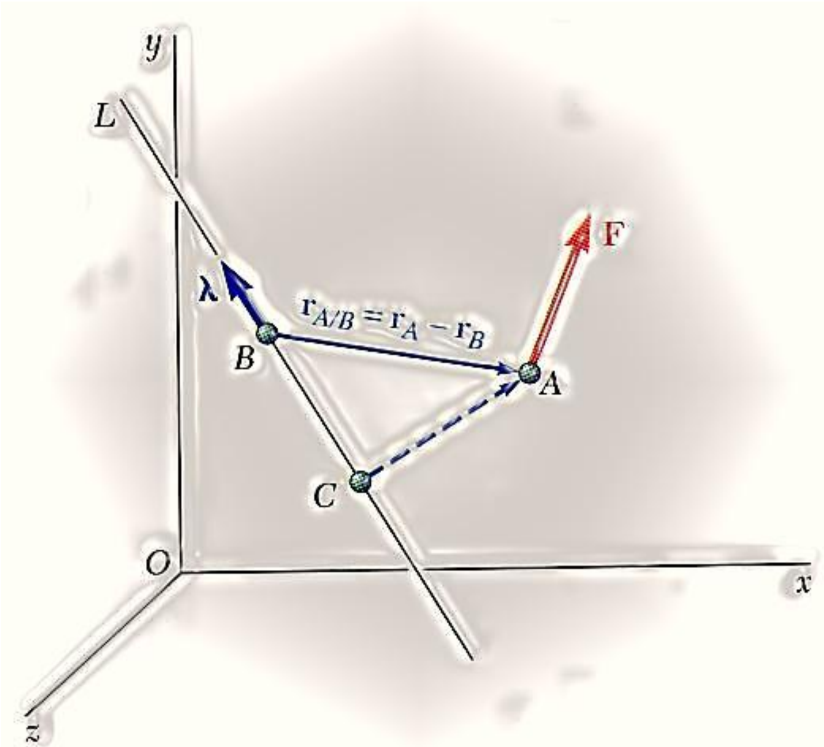
- گشتاور M_{OL} حول محور OL تصویر گشتاور Mo روی این محور است

$$M_{OL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_O = \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$$

- گشتاور نیروی F حول محورهای مختصات

$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$

گشتاور یک نیرو حول محوری معین



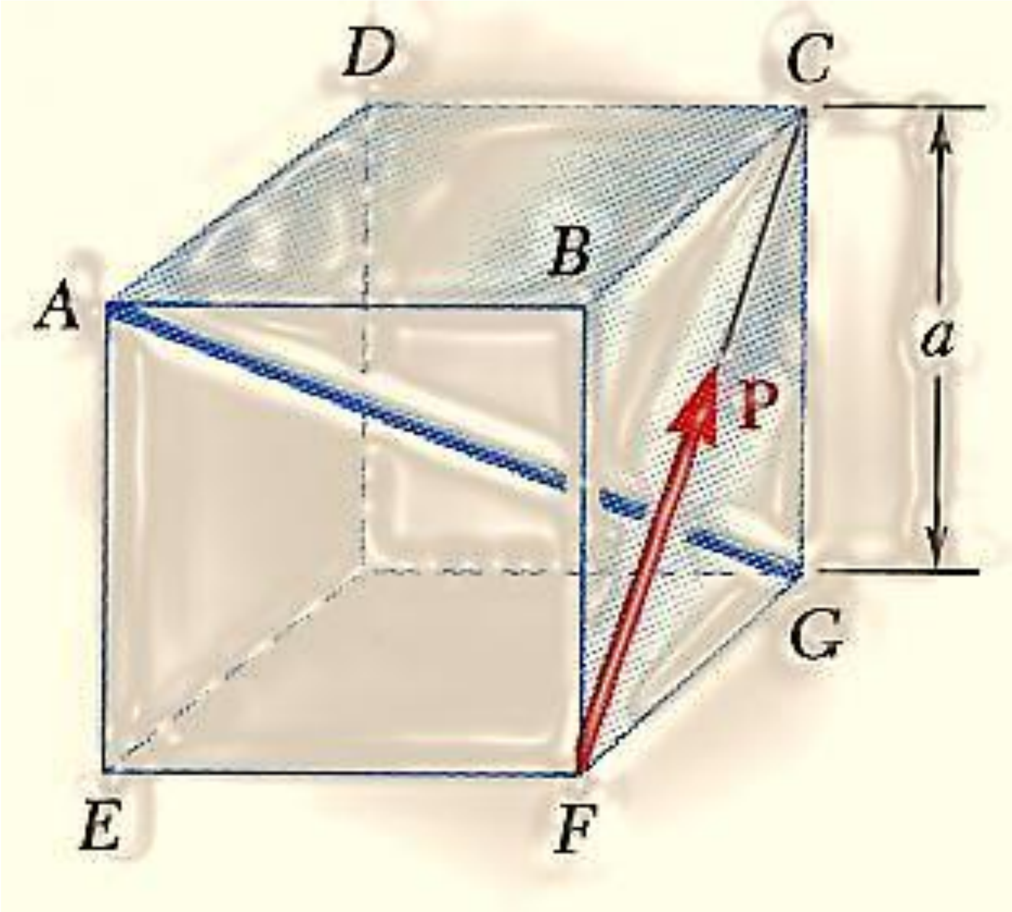
- گشتاور یک نیرو حول محوری اختیاری

$$M_{BL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_B$$
$$= \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r}_{A/B} \times \vec{F}\right)$$
$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

- گشتاور نسبت به یک محور،یک کمیت اسکالراست اگرچه این گشتاور به محور خاصی مربوط می شود که راستای مشخصی دارد.

مثال ۳

❑ مکعبی تحت اثر نیروی P قرار دارد.



مطلوبست:

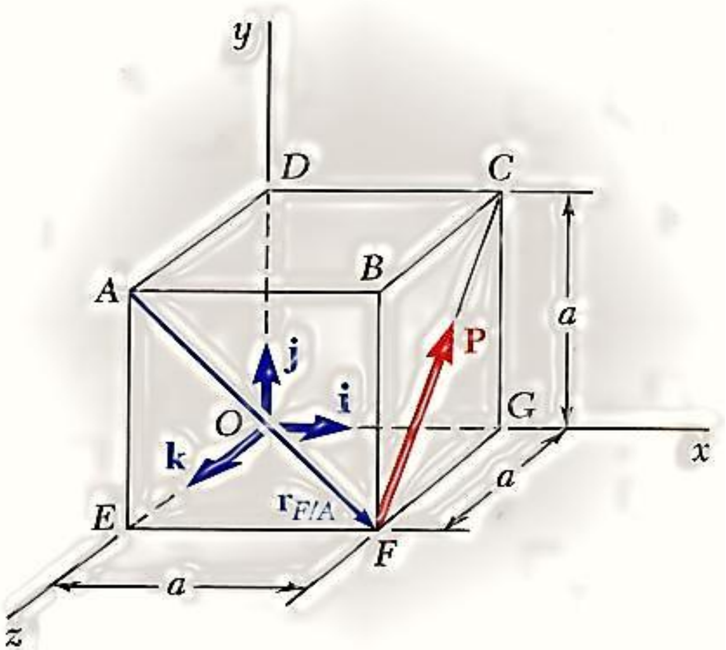
a) گشتاور حول A

b) گشتاور حول ضلع AB

c) گشتاور حول قطر AG

d) فاصله عمودی بین AG و FC

مثال ۳



✓ گشتاور حول A

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{F/A} \times \vec{P}$$

$$\vec{r}_{F/A} = a\vec{i} - a\vec{j} = a(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{P} = P\left(1/\sqrt{2}\,\vec{j} - 1/\sqrt{2}\,\vec{k}\right) = P/\sqrt{2}\left(\vec{j} - \vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_A = a(\vec{i} - \vec{j}) \times P/\sqrt{2}\left(\vec{j} - \vec{k}\right)$$

$$\boxed{\vec{M}_A = \left(aP/\sqrt{2}\right)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)}$$

✓ گشتاور حول ضلع AB

$$\vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \bullet \vec{j} = 0$$

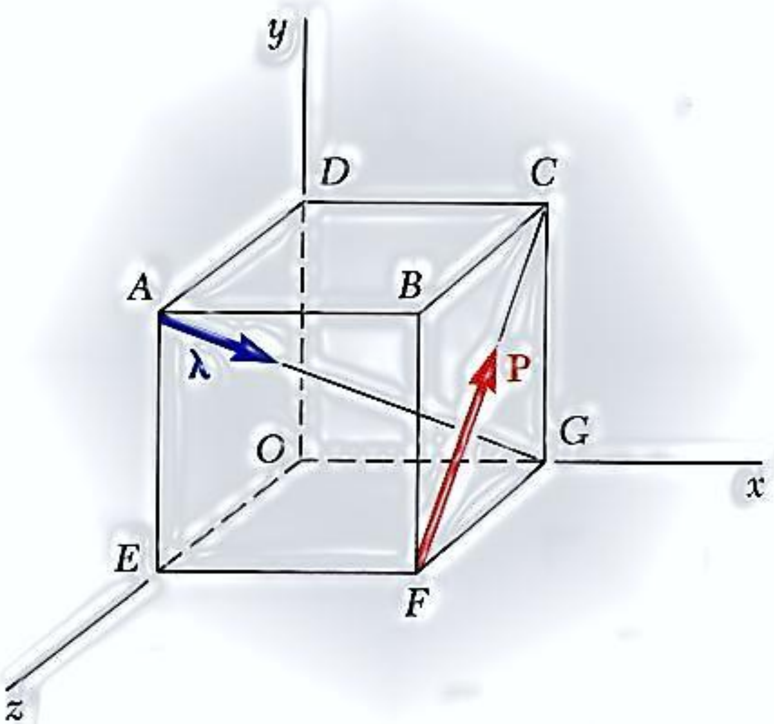
$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1$$

$$M_{AB} = \vec{i} \bullet \vec{M}_A$$

$$= \vec{i} \bullet \left(aP/\sqrt{2}\right)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\boxed{M_{AB} = aP/\sqrt{2}}$$

مثال ۳



✓ گشتاور حول قطر AG

$$M_{AG} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_A$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{A/G}}{r_{A/G}} = \frac{a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)$$

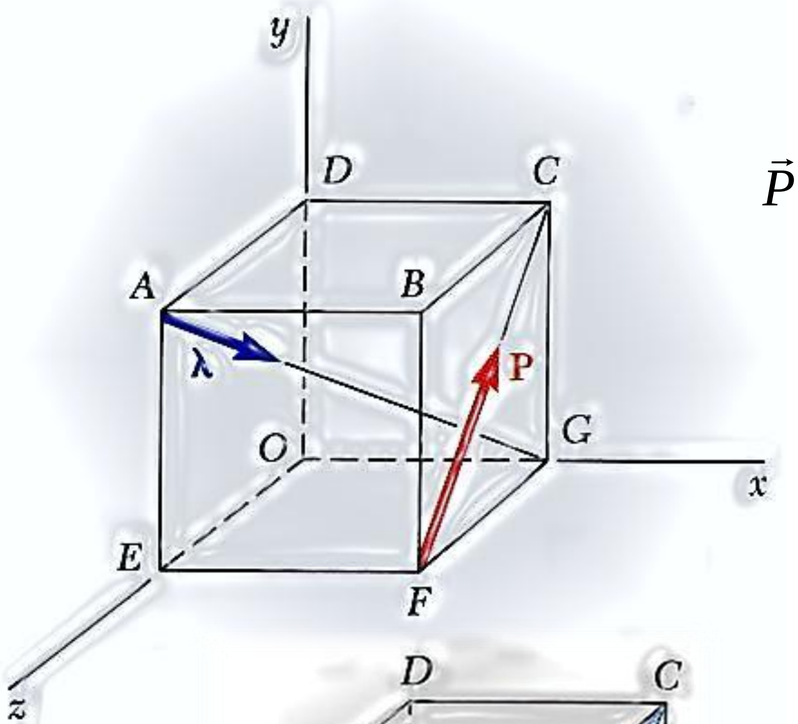
$$\vec{M}_A = \frac{aP}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

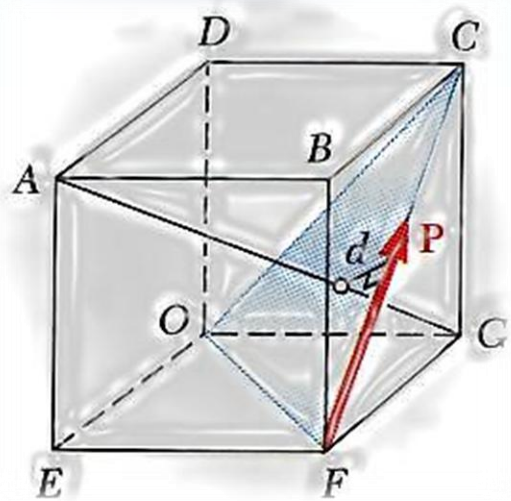
$$M_{AG} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right) \bullet \frac{aP}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$= \frac{aP}{\sqrt{6}}(1-1-1)$$

$$\boxed{M_{AG} = -\frac{aP}{\sqrt{6}}}$$

مثال ۳





✓ فاصله عمودی بین AG و FC

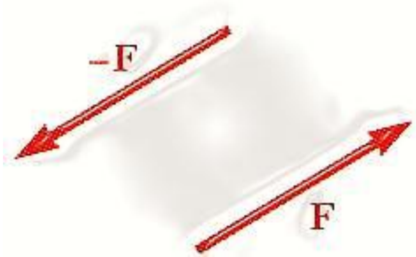
$$\vec{P}\bullet\vec{\lambda}=\frac{P}{\sqrt{2}}\left(\vec{j}-\vec{k}\right)\bullet\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}\right)=\frac{P}{\sqrt{6}}(0-1+1)$$
$$=0$$

دراینجا P, عمود است با AG

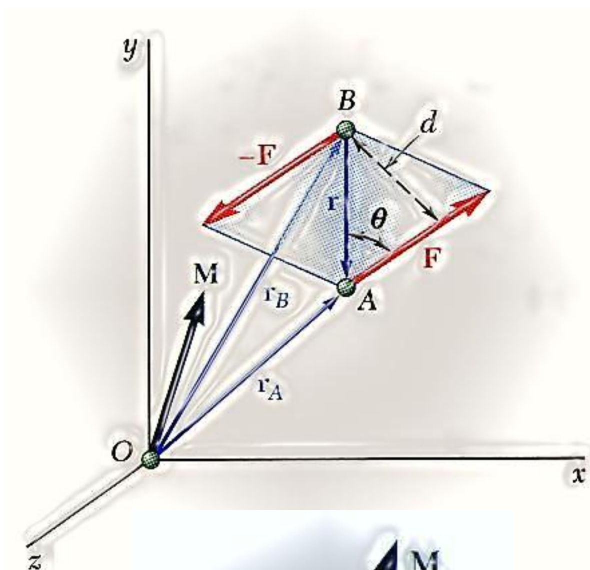
$$\left|M_{AG}\right|=\frac{aP}{\sqrt{6}}=Pd$$

$$\boxed{d=\frac{a}{\sqrt{6}}}$$

گشتاوریک کوپل

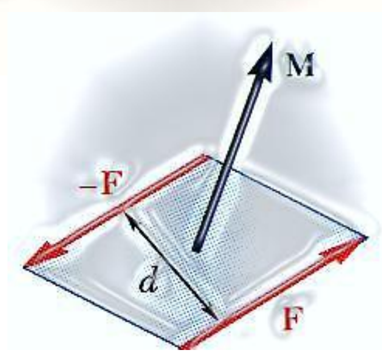


- دو نیروی موازی F و F- دارای بزرگی یکسان ولی جهت های مخالفند.به این حالت یک کوپل نیرویی گویند.



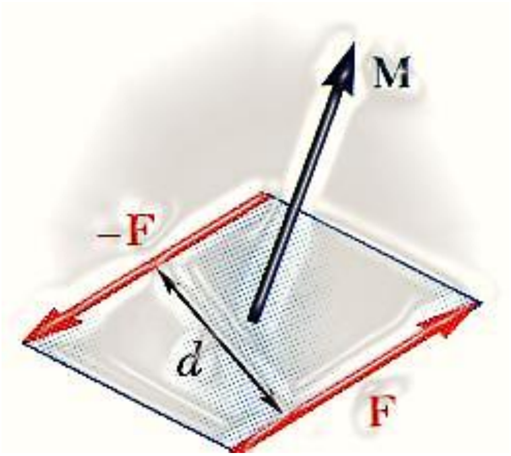
- گشتاور کوپل

$$
\begin{aligned}
\vec{M} &= \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}\right) \\
&= \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F} \\
&= \vec{r} \times \vec{F} \\
M &= rF \sin\theta = Fd
\end{aligned}
$$



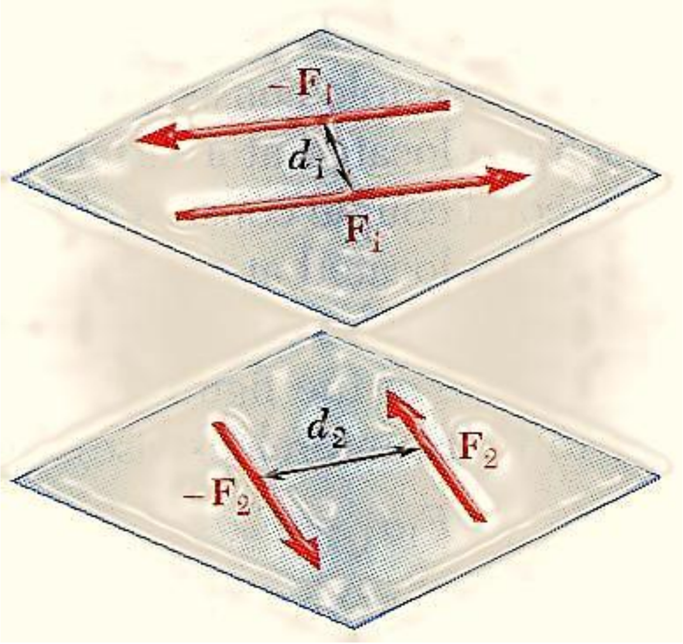
- بردار گشتاور یک کوپل بستگی به انتخاب مبدا مختصات خواهد داشت.گشتاور جفت یک بردار آزاد است : یعنی می توان این بردار را بدون تغییر مقصود در فضا حرکت داد به شرطی که جهت و مقدارش تغییر نکند.

گشتاور یک کوپل



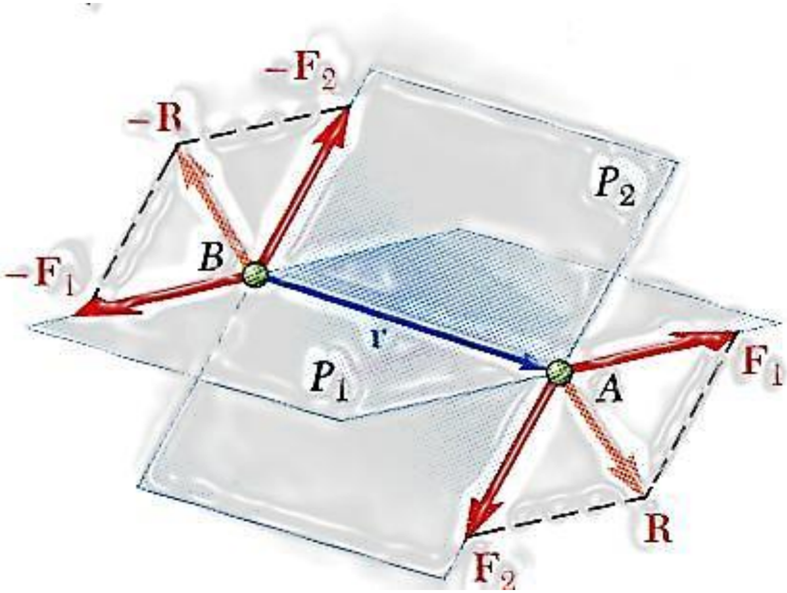
- دو گشتاور کوپل یکسان هستند اگر:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$



- دو کوپل دارای موقعیت موازی در صفحه:
- دو کوپل تمایل به چرخش حول یک نقطه دارند.
- طبق قرارداد چرخشهای ساعتگرد را مثبت در نظر می گیریم.

جمع کوپلها



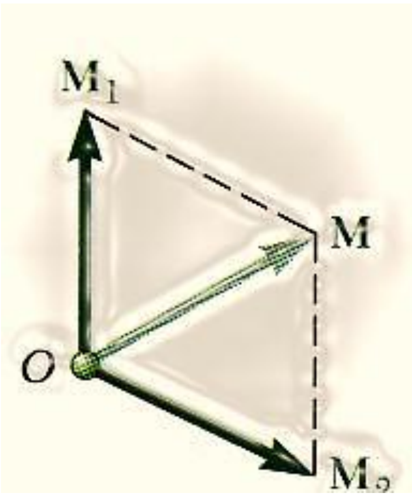
- دوصفحه متقاطع P_1و P_2 را که هرکدام شامل دوکوپل نیرو است درنظر بگیرید:

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 \quad \text{درصفحهٔ } P_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 \quad \text{درصفحهٔ } P_2$$

- برآیند بردارهای F نیز یک کوپل را تشکیل می دهند.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$$

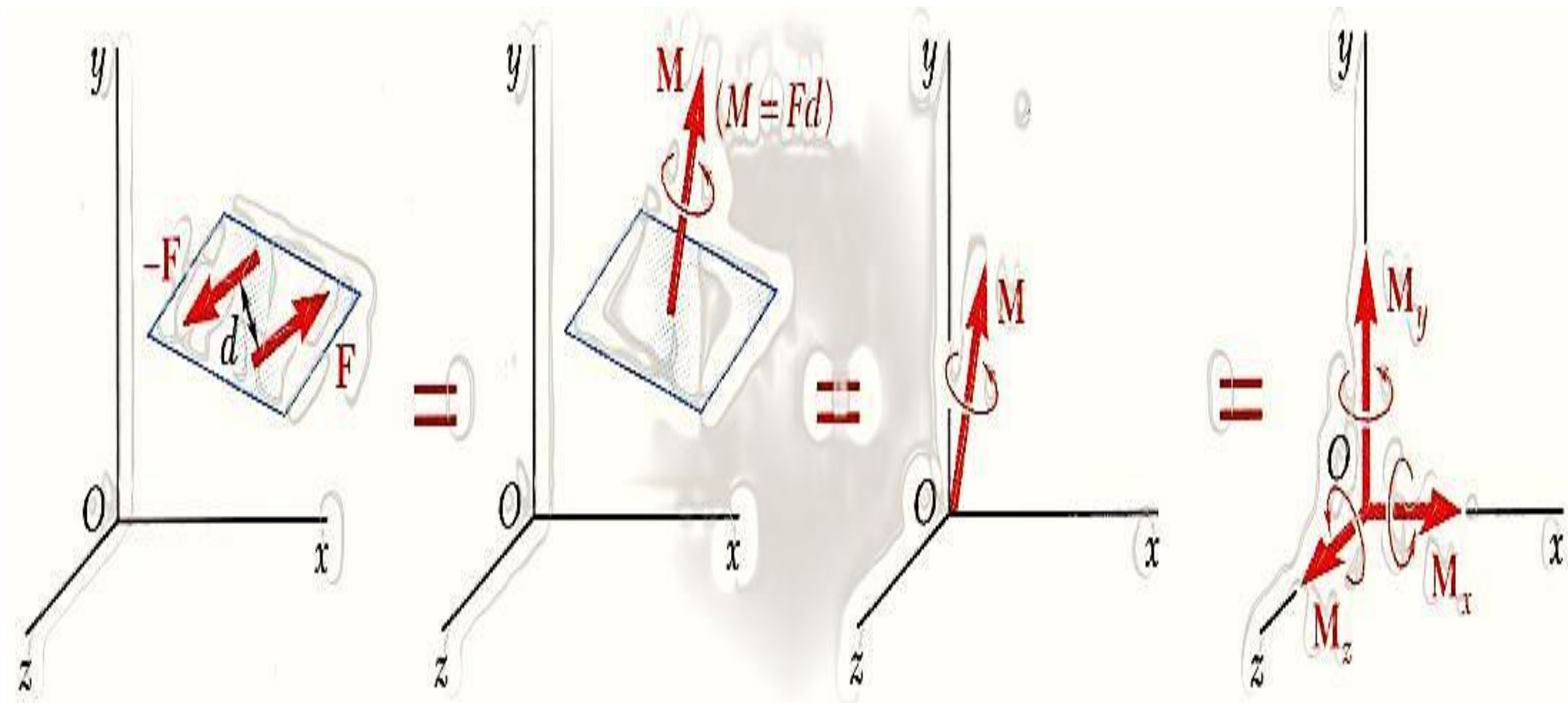


- از تئوری Varigon خواهیم داشت:

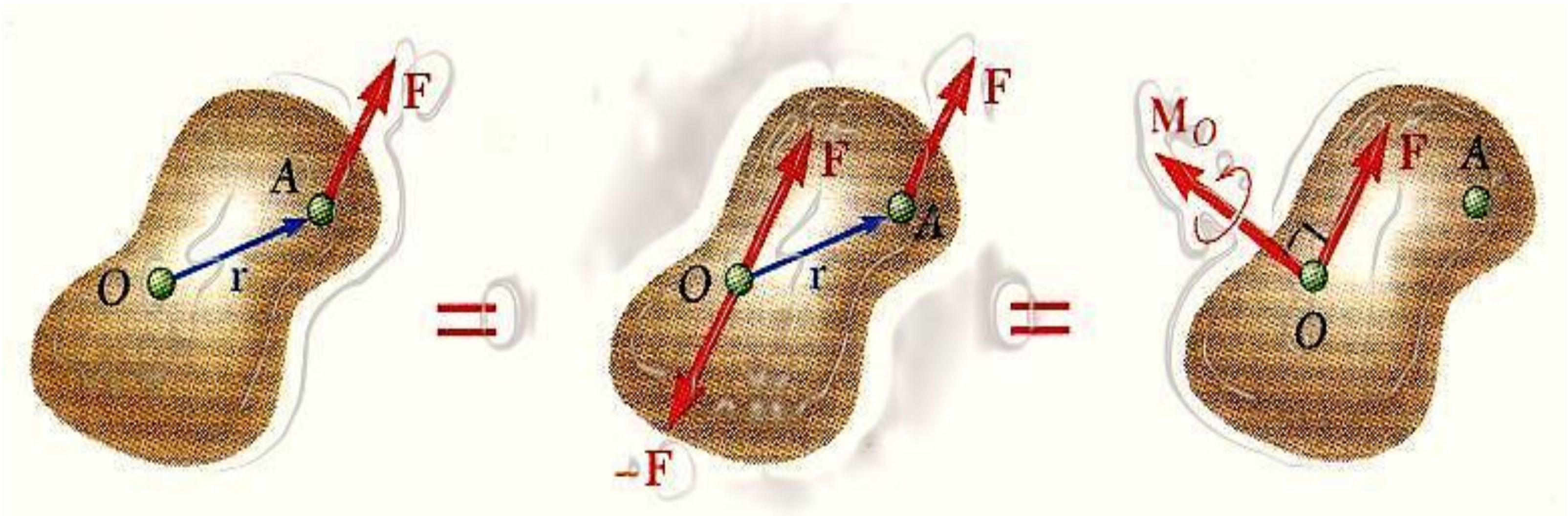
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$
$$= \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

- درواقع منظور از جمع و تفریق کوپل ها، جمع و تفریق گشتاورهای جفتهاست.

نمایش کوپل با بردار

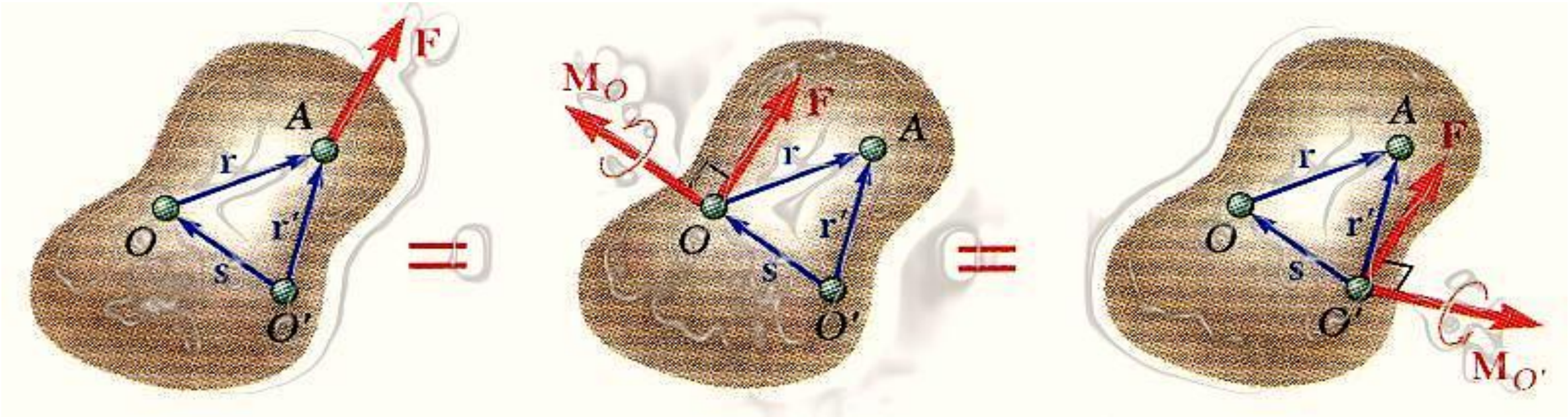


نمایش کوپل با بردار



- با دقت در شکل فوق بوضوح می توان اثر یک نیرو(F) را در نقطه دلخواه دیگری مثل O دید.این تاثیر شامل یک گشتاور و یک نیروی معادل با F خواهد بود.

نمایش کوپل با بردار



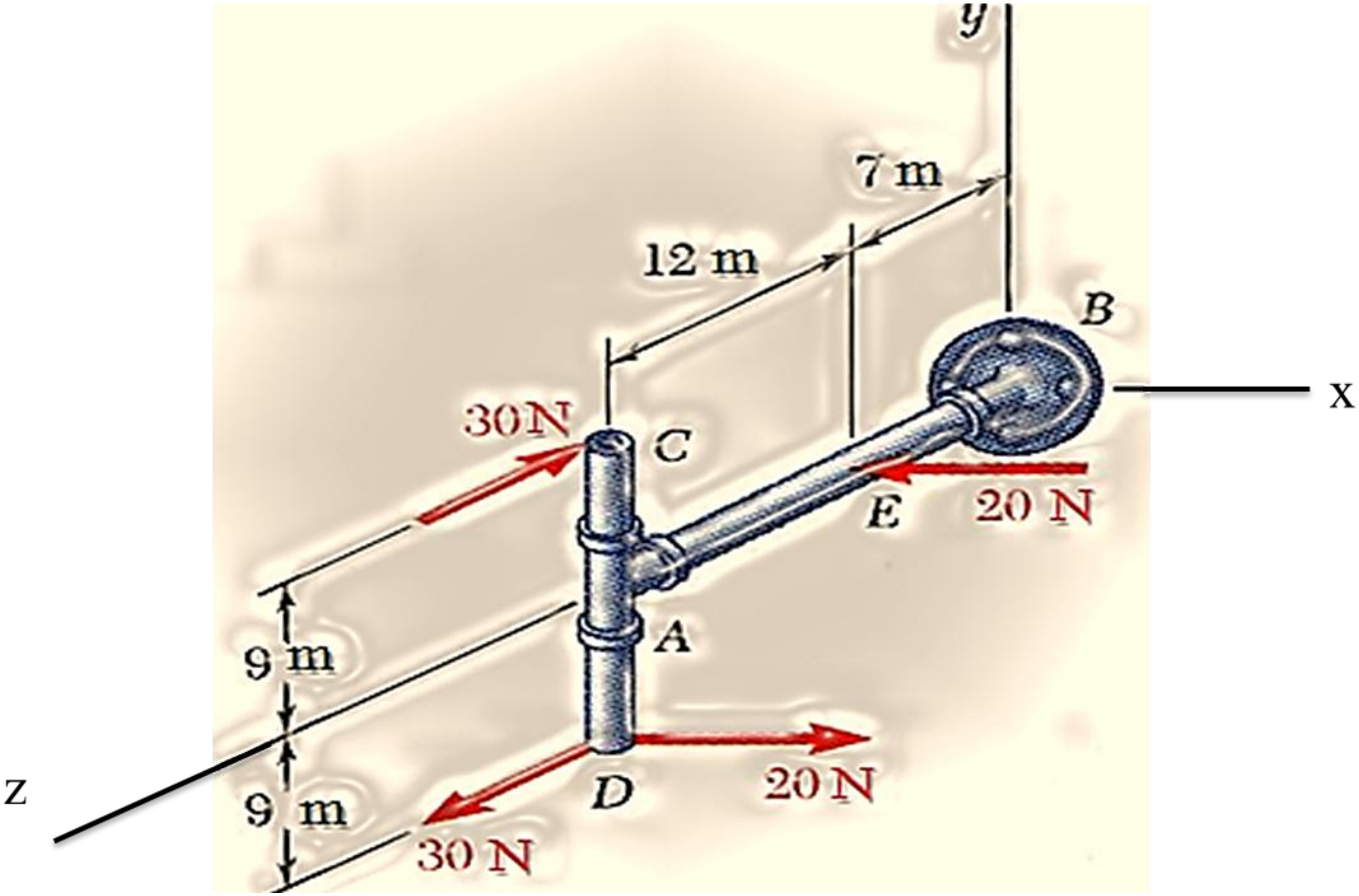
- نیروی F در A دارای دو اثر متفاوت در نقاط Oو ´O است.

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}\,' \times \vec{F}$$

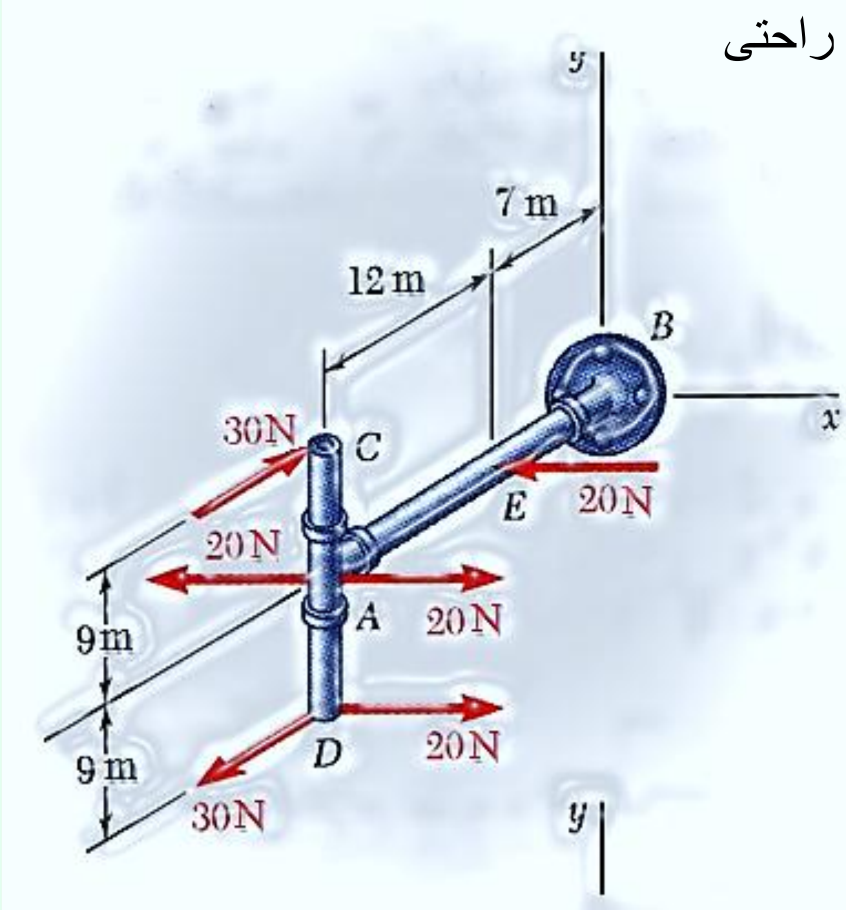
$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}\,'\times\vec{F} = \left(\vec{r} + \vec{s}\right)\times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{s} \times \vec{F}$$
$$= \vec{M}_O + \vec{s} \times \vec{F}$$

مثال ۴

- مولفه معادل کوپل را برای جفت نیروهای نشان داده شده در شکل بیابید.



مثال ۴



✓ با قرار دادن نیروی ± 20N در نقطه A می توان به راحتی سه زوج نیرویی تشکیل داد.

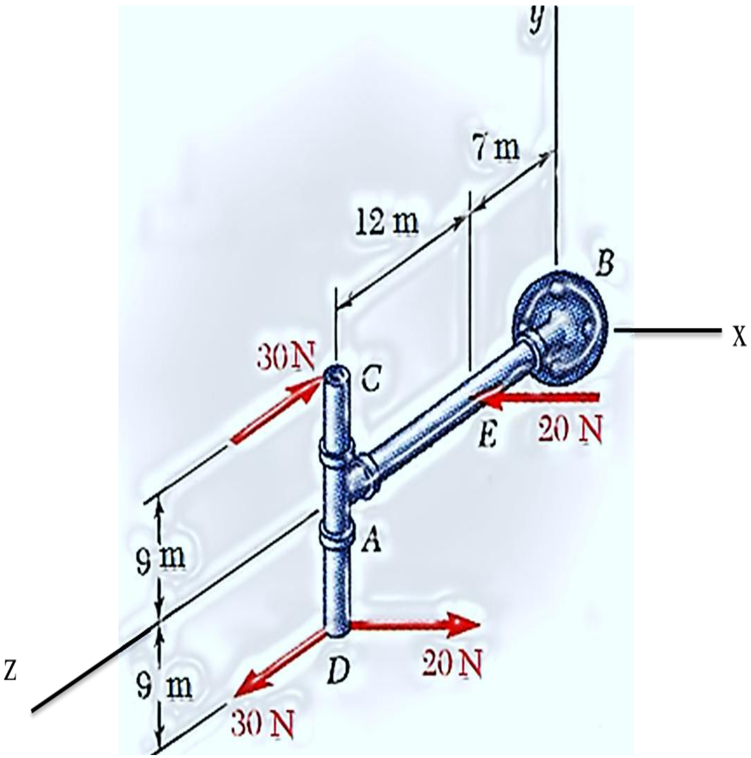
✓ بدین ترتیب بردار کوپل خواهد شد:

$$M_x = -(30\,\mathrm{N})(18\,\mathrm{m}) = -540\,\mathrm{N.m}$$
$$M_y = +(20\,\mathrm{N})(12\,\mathrm{m}) = +240\,\mathrm{N.m}$$
$$M_z = +(20\,\mathrm{N})(9\,\mathrm{m}) = +180\,\mathrm{N.m}$$

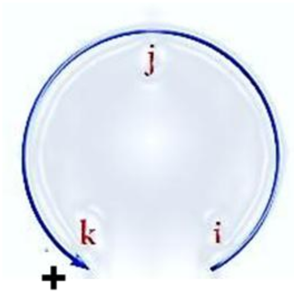
$$\boxed{\vec{M} = -(540\ \mathrm{N.m})\vec{i} + (240\ \mathrm{N.m})\vec{j} + (180\ \mathrm{N.m})\vec{k}}$$

مثال ۴

✓ با انتخاب یک نقطه دلخواه می توان کوپل معادل این جفتها را در هرنقطه ای محاسبه کرد ، مثلا در D نیروهای اعمالی در Cو E تولید گشتاور می کنند.

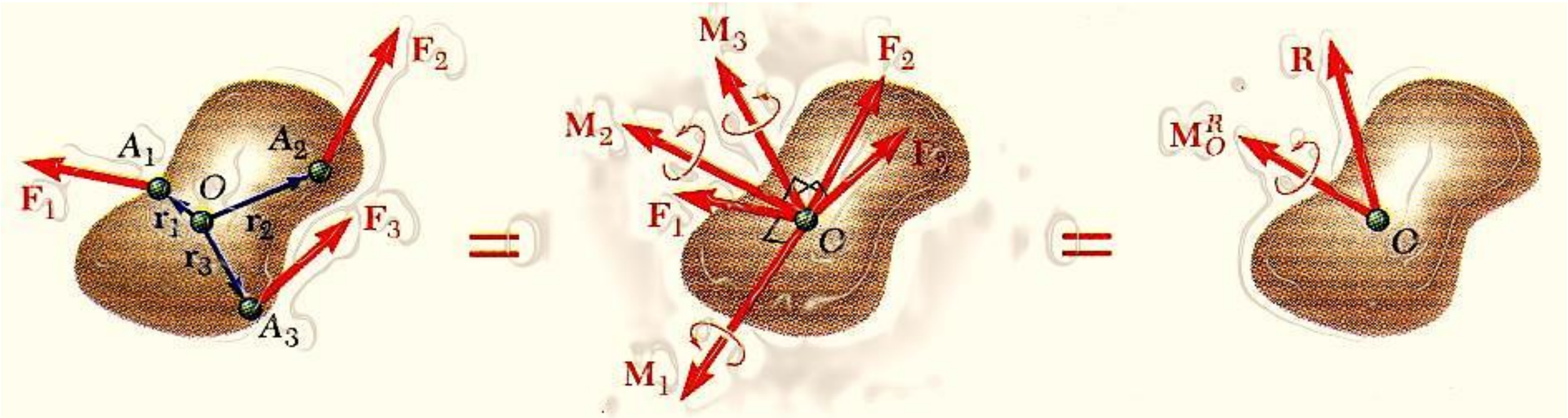


$$\vec{M} = \vec{M}_D = (18\ \mathrm{m})\vec{j} \times (-30\,\mathrm{N})\vec{k} + \left[(9\ \mathrm{m})\vec{j} - (12\ \mathrm{m})\vec{k}\right] \times (-20\mathrm{N})\vec{i}$$

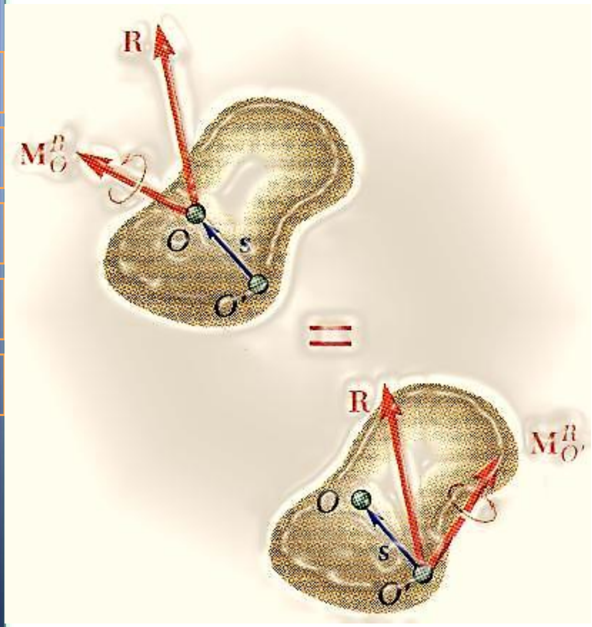


$$\boxed{\vec{M} = -(540\ \mathrm{N{\cdot}m})\vec{i} + (240\ \mathrm{N{\cdot}m})\vec{j} + (180\ \mathrm{N{\cdot}m})\vec{k}}$$

سیستم نیروها: ساده سازی نیروها و کوپلها



- یک سیستم ازنیروها ممکن است با یک مجموعه از سیستمهای نیرو-کوپل در نقطه O جایگزین گردد.



- بردارهای نیرو و کوپل ممکن است با هم ترکیب شده و یک بردار برآیند نیرو یا کوپل تشکیل دهند.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \qquad \vec{M}_O^R = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F} \right)$$

- سیستم نیرو-کوپل ممکن است به نقطه ای دیگر جابجا شود وبا ممان جدید ترکیب گردد.

$$\vec{M}_{O'}^R = \vec{M}_O^R + \vec{s} \times \vec{R}$$

- دودستگاه نیرو وقتی باهم برابرند که بتوان آنها را به سیستم نیرو-کوپل مشابه ویکسانی ساده سازی کرد.

مثال ۵

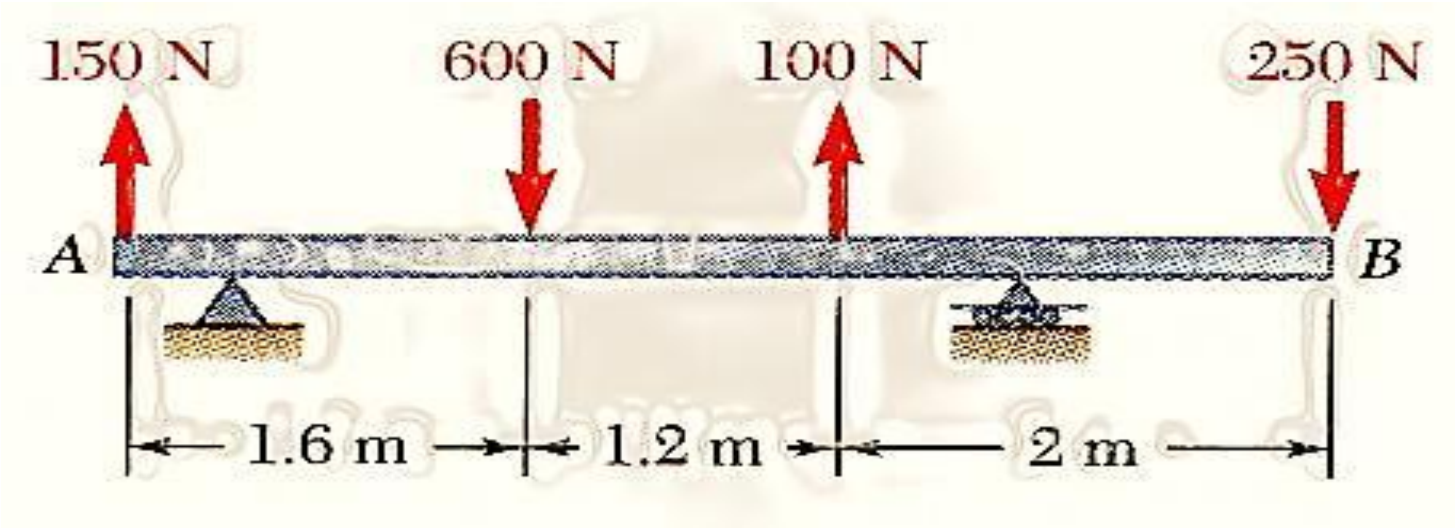
- برای تیرنشان داده شده مطلوبست ساده سازی سیستم نیروی در:

a. نقطه A

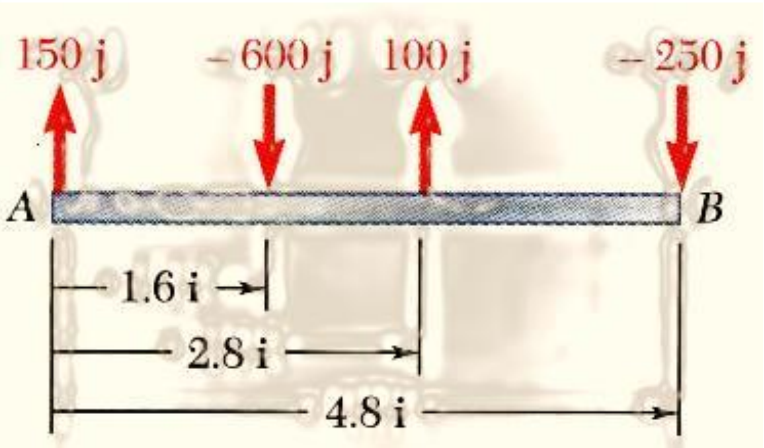
b. درنقطه B

c. تعیین بردار برآیند نیروی کلی

لازم نیست واکنشهای تکیه گاهی را در محاسبات دخالت دهید.



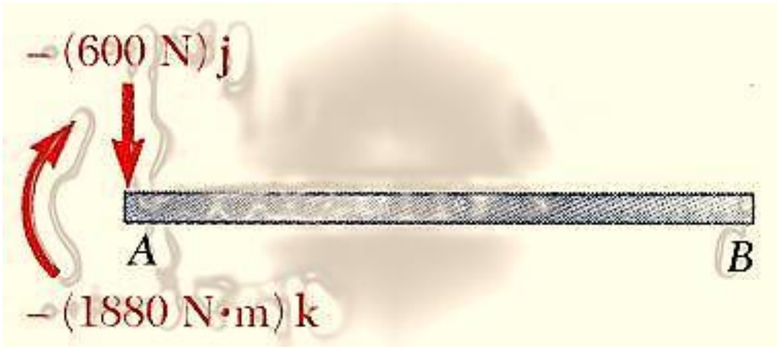
مثال ۵



a) محاسبه برآیند در نقطه A

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$
$$= (150\ \mathrm{N})\vec{j} - (600\ \mathrm{N})\vec{j} + (100\ \mathrm{N})\vec{j} - (250\ \mathrm{N})\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{R} = -(600\ \mathrm{N})\vec{j}}$$

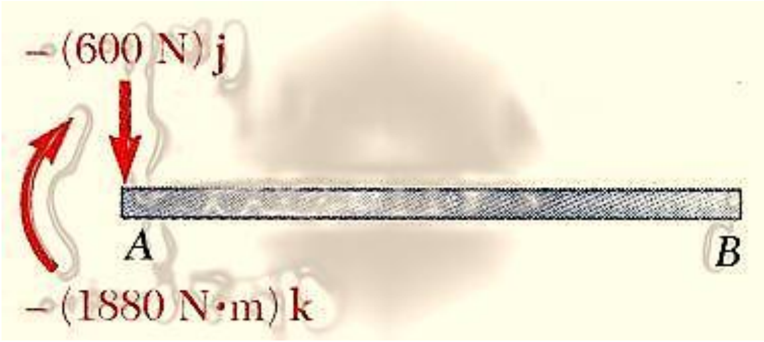


$$\vec{M}_A^R = \sum(\vec{r} \times \vec{F})$$
$$= (1.6\vec{i}) \times (-600\vec{j}) + (2.8\vec{i}) \times (100\vec{j})$$
$$+ (4.8\vec{i}) \times (-250\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{M}_A^R = -(1880\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k}}$$

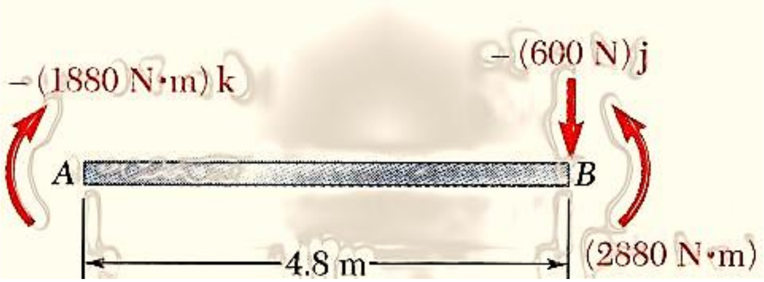
مثال ۵

b) محاسبه برآیند در نقطه B



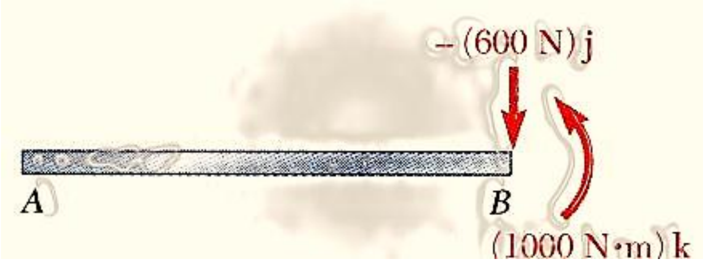
$$\boxed{\vec{R} = -(600\ \mathrm{N})\vec{j}}$$

می توان بصورت مستقیم و یا با ممان و نیروی موجود در نقطه A برآیندها رادر B بدست آورد.



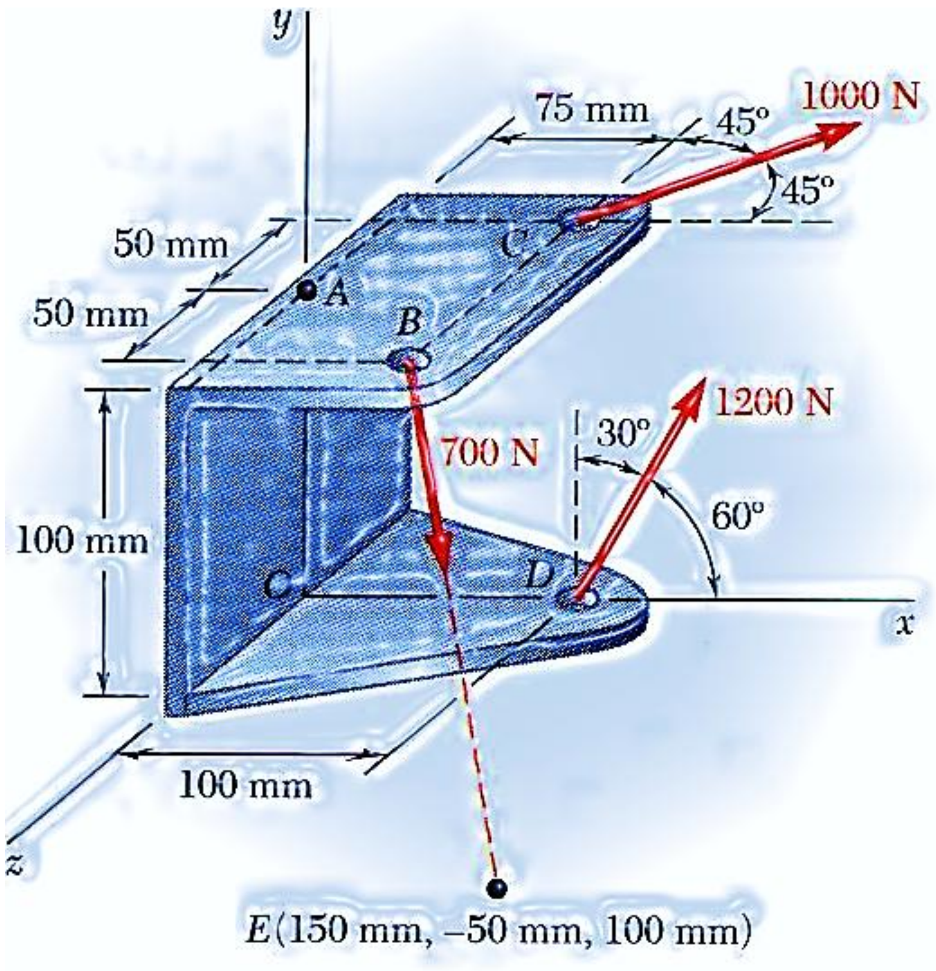
$$\vec{M}_B^R = \vec{M}_A^R + \vec{r}_{B/A} \times \vec{R}$$
$$= -(1880\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k} + (-4.8\ \mathrm{m})\vec{i} \times (-600\ \mathrm{N})\vec{j}$$
$$= -(1880\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k} + (2880\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_B^R = +(1000\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k}}$$



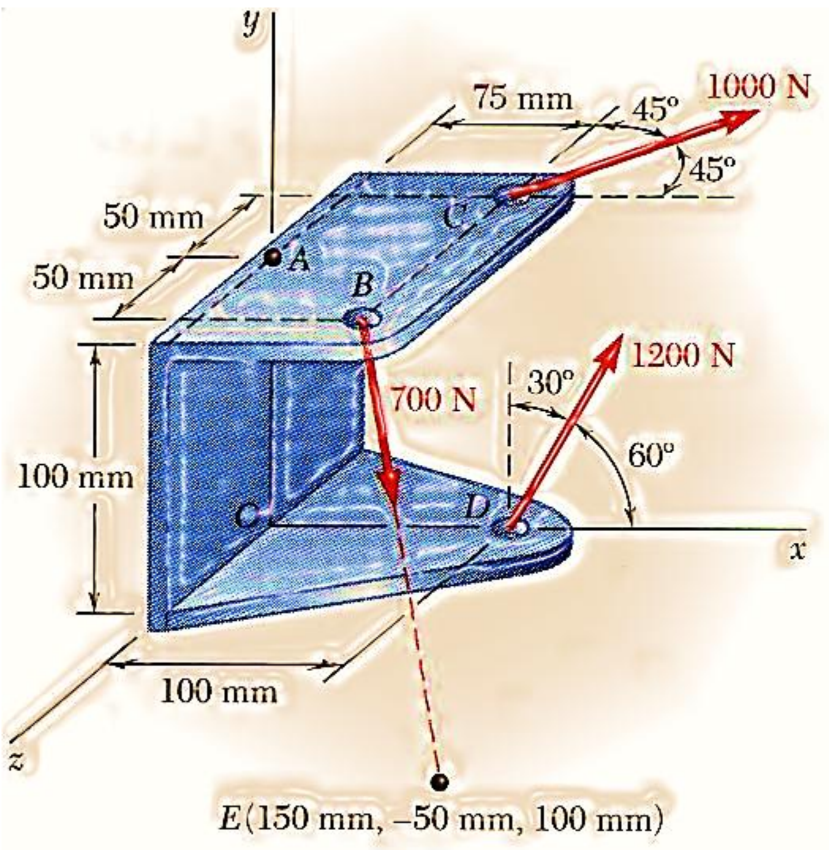
مثال ۶

- سه کابل به سگدستی مطابق شکل متصل شده اند:مطلوبست سیستم برآیند نیرو-کوپل در نقطه A.



Meysam4366@yahoo.com

مثال ۶



✓ ابتدا فواصل عمود تا نقطه مورد نظر را تعیین می کنیم

$$\vec{r}_{B/A} = 0.075\vec{i} + 0.050\vec{k}\ (\text{m})$$

$$\vec{r}_{C/A} = 0.075\vec{i} - 0.050\vec{k}\ (\text{m})$$

$$\vec{r}_{D/A} = 0.100\vec{i} - 0.100\vec{j}\ (\text{m})$$

✓ مشخصات بردارنیروی F_B باتوجه به کسینوسهای هادی:

E(150 , -50 , 100) B(75 , 100 , 50)	E/B(75 , -150 , 50)

$$\vec{F}_B = (700\ \text{N})\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{E/B}}{r_{E/B}} = \frac{75\vec{i} - 150\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0.429\vec{i} - 0.857\vec{j} + 0.289\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k}\ \ (\text{N})$$

Meysam4366@yahoo.com

مثال ۶

✓ مشخصات بردارنیروی F_C و F_D باتوجه به زوایا :

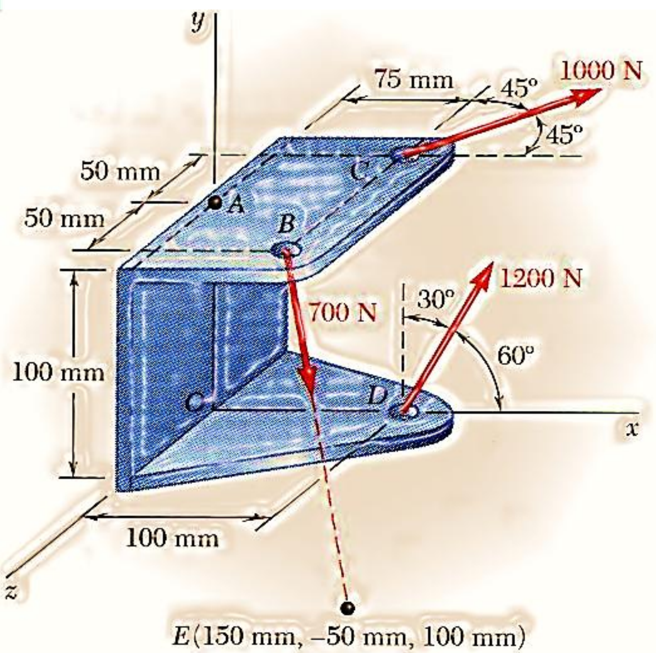
$$\vec{F}_D = (1200\ \text{N})(\cos 60\,\vec{i} + \cos 30\,\vec{j}) = 600\,\vec{i} + 1039\,\vec{j}\ \ (\text{N})$$

$$\vec{F}_C = (1000\ \text{N})(\cos 45\,\vec{i} - \cos 45\,\vec{j}) = 707\,\vec{i} - 707\,\vec{j}\ \ (\text{N})$$

✓ برآیند نیرویی برابر است با:

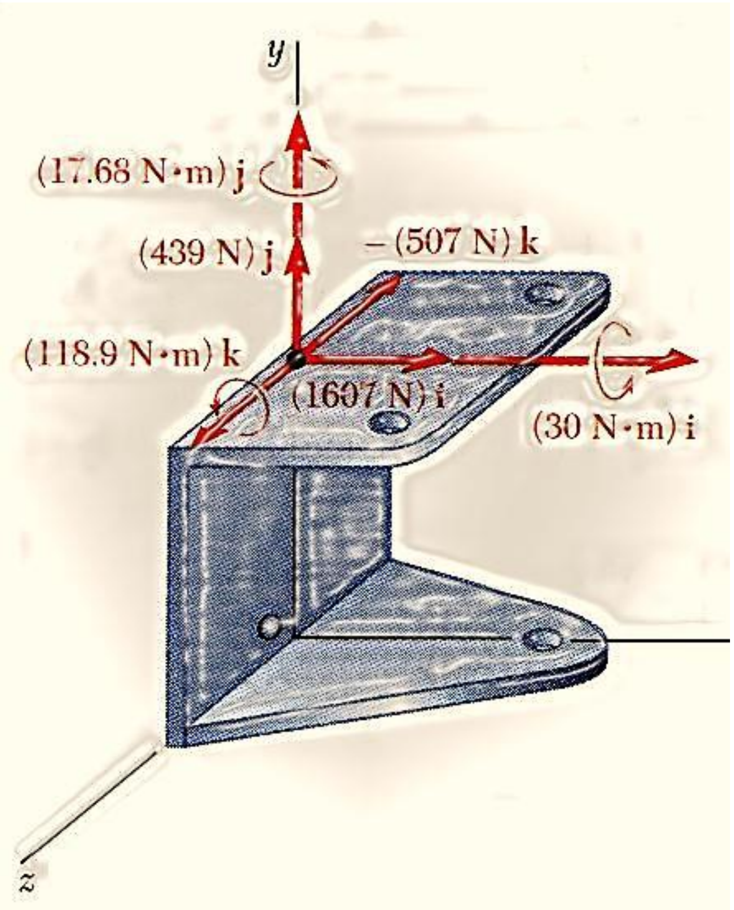
$$\vec{R} = \sum \vec{F} = (300 + 707 + 600)\vec{i} + (-600 + 1039)\vec{j} + (200 - 707)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\,\vec{j} - 507\,\vec{k}\ \ (\text{N})}$$



مثال ۶

✓ برآیند کوپل برابر است با:



$$\vec{M}_A^R = \sum\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)$$

$$\vec{r}_{B/A}\times\vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 45\vec{k}$$

$$\vec{r}_{C/A}\times\vec{F}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\vec{j}$$

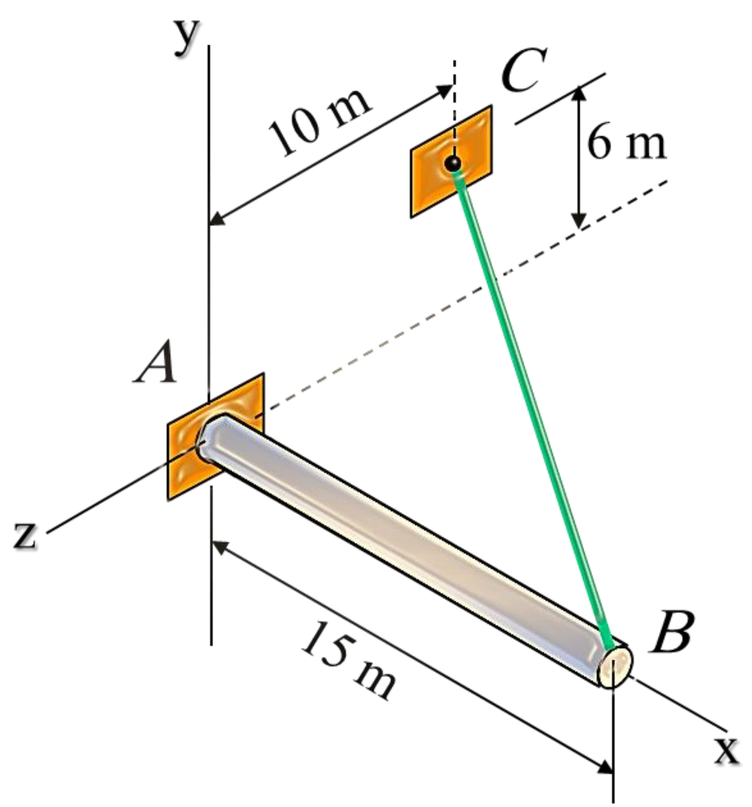
$$\vec{r}_{D/A}\times\vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\vec{j} - 507\vec{k} \;\; (\mathrm{N})}$$

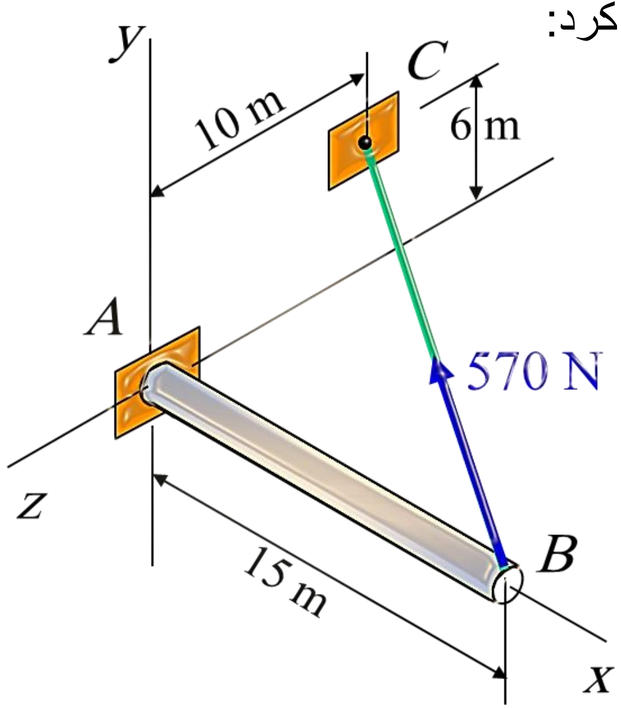
$$\boxed{\vec{M}_A^R = 30\vec{i} + 17.68\vec{j} + 118.9\vec{k}}$$

مثال ۷

- تیر AB در انتها به دیوار کاملا مقید شده است.انتهای B توسط کابلی به دیوار در مختصات داده شده وصل شده است.اگر کشش موجود در کابل 570N اندازه گیری شده باشد مطلوبست ممان در A.



مثال ۷



✓ ابتدا بردار نیرو را باید براساس مولفه ها و کسینوسهای هادی آن تعریف کرد:

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x\,\mathbf{i} + d_y\,\mathbf{j} + d_z\,\mathbf{k})$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-15)^2 + (6)^2 + (-10)^2} = 19 \text{ m}$$

$$\mathbf{T}_{BC} = \frac{570 \text{ N}}{19}(-15\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k}) =$$

$$= -(450 \text{ lb})\,\mathbf{i} + (180 \text{ lb})\,\mathbf{j} - (300 \text{ lb})\mathbf{k}$$

✓ در ادامه ممان را محاسبه می کنیم:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{T}_{BC}$$

$$\mathbf{r}_{B/A} = (15 \text{ m})\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{M}_A = 15\,\mathbf{i} \times (-450\,\mathbf{i} + 180\,\mathbf{j} - 300\,\mathbf{k})$$

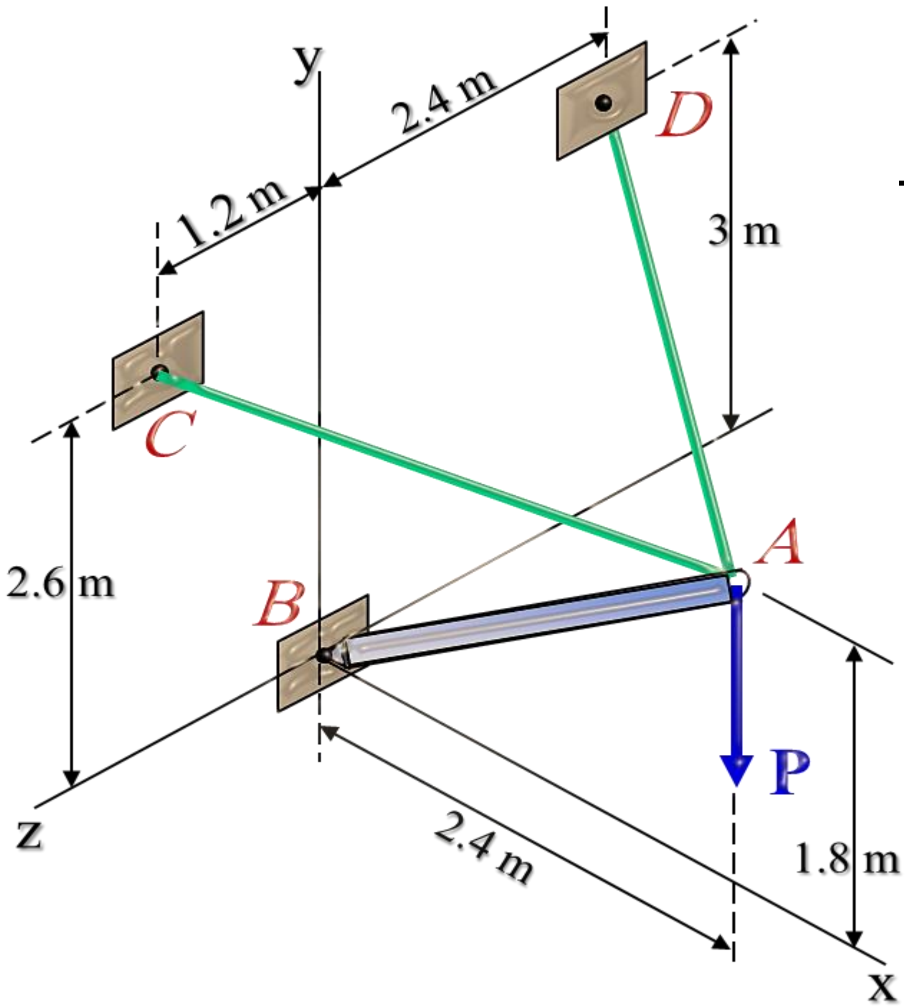
$$\mathbf{M}_A = (4500 \text{ N·m})\,\mathbf{j} + (2700 \text{ N·m})\,\mathbf{k}$$

مثال ۸

- می دانیم که کشش موجود در کابل AC برابر 1260N است،مطلوبست تعیین:

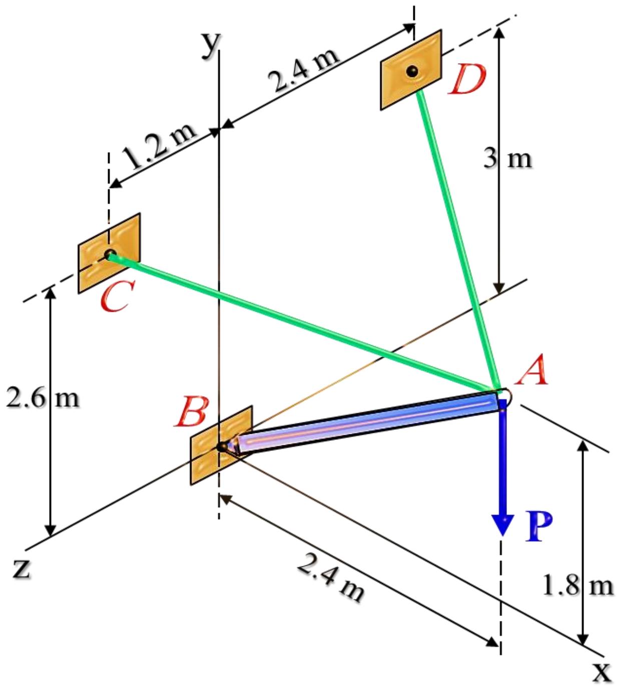
a) زاویه بین کابل AC و تیر.

b) تصویر نیروی کابل مورد نظر روی تیر.



مثال ۸

✓ محاسبه زاویه شکل گرفته بین دو بردار:



$$\vec{AC} = -(2.4\ \text{m})\ \mathbf{i} + (0.8\ \text{m})\ \mathbf{j} + (1.2\ \text{m})\ \mathbf{k}$$

$$\vec{AB} = -(2.4\ \text{m})\ \mathbf{i} - (1.8\ \text{m})\ \mathbf{j}$$

$$AC = \sqrt{(-2.4)^2 + (0.8)^2 + (1.2)^2} = 2.8\ \text{m}$$

$$AB = \sqrt{(-2.4)^2 + (-1.8)^2 + (0)^2} = 3.0\ \text{m}$$

$$\boxed{\vec{AC} \cdot \vec{AB} = (AC)\,(AB)\cos\theta}$$

$$(-2.4\ \mathbf{i} + 0.8\ \mathbf{j} + 1.2\ \mathbf{k}) \cdot (-2.4\ \mathbf{i} - 1.8\ \mathbf{j}) = (2.8)(3.0)\cos\theta$$

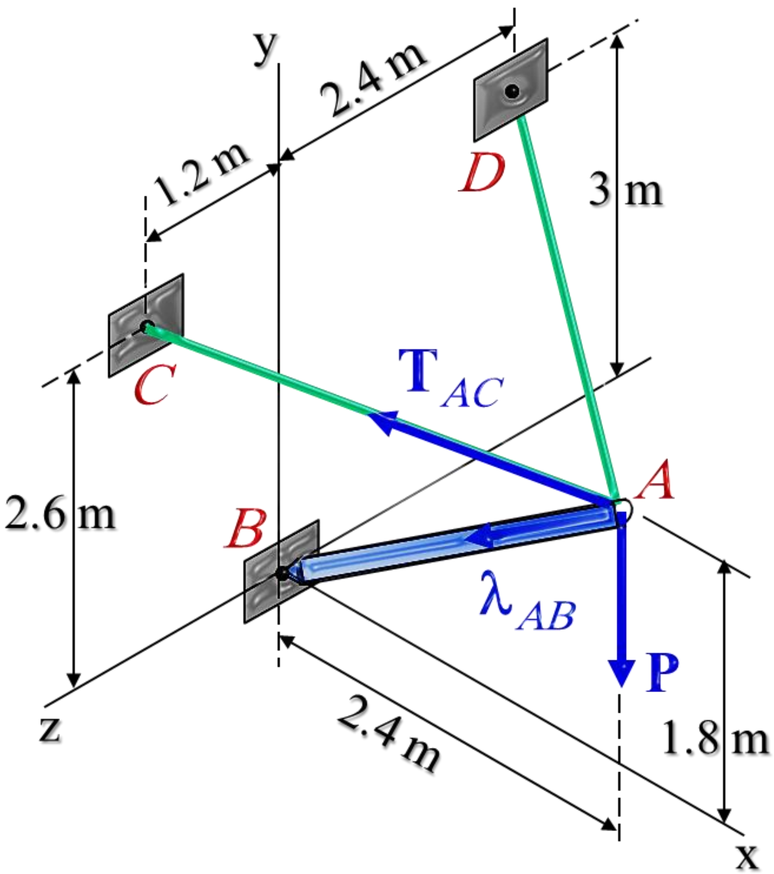
$$(-2.4)(-2.4) + (0.8)(-1.8) + (1.2)(0) = 8.4\cos\theta$$

$$\cos\theta = 0.51429$$

$$\boxed{\theta = 59.1^{\circ}}$$

مثال ۸

✓ تصویر نیروی موجود در کابل AC نظر روی تیرAB:



$$(T_{AC})_{AB} = \mathbf{T}_{AC} \cdot \lambda_{AB}$$

$$= T_{AC} \cos\theta$$

$$\cos\theta = 0.51429$$

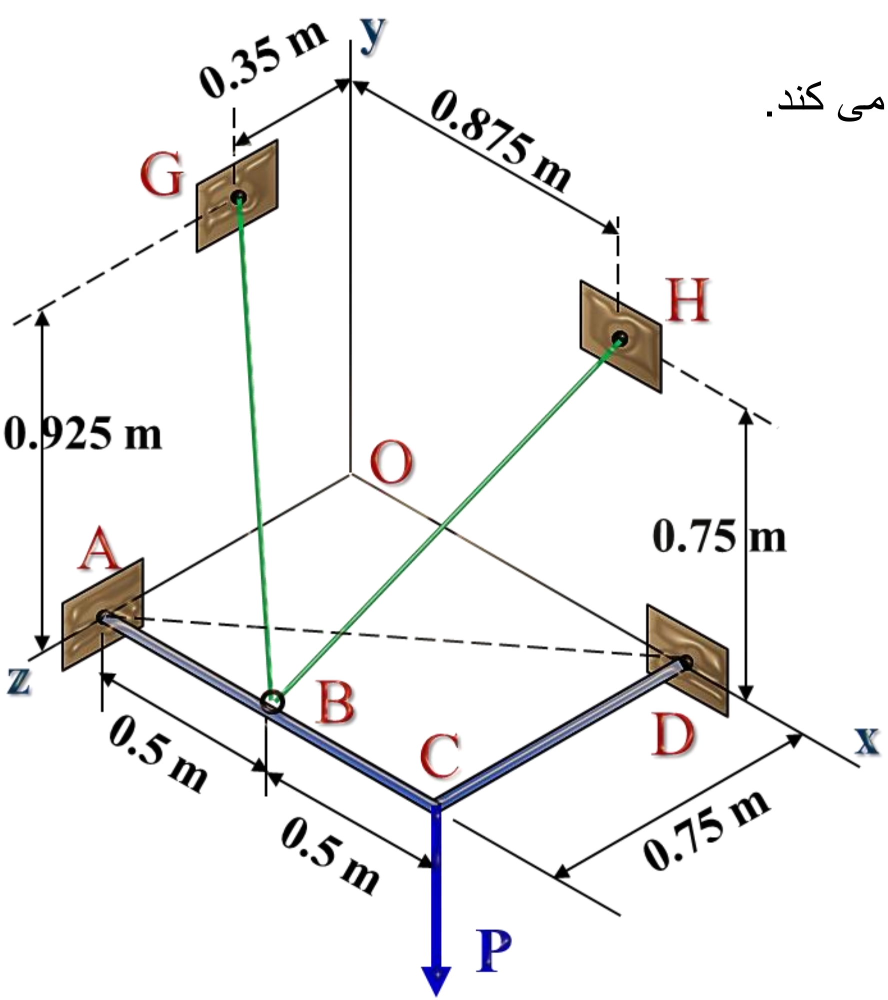
$$= (1260 \text{ N})(0.51429)$$

$$\boxed{(T_{AC})_{AB} = 648 \text{ N}}$$

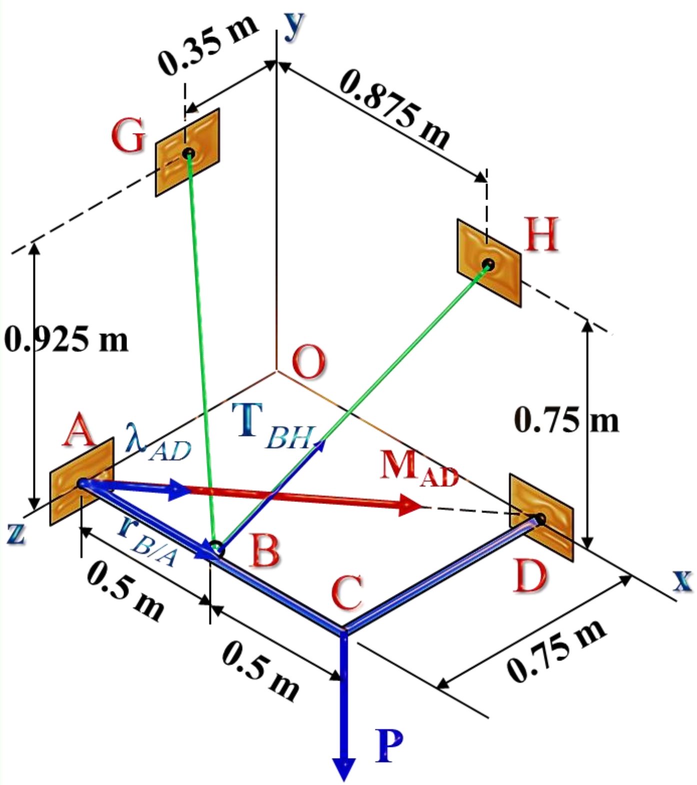
مثال ۹

❑ قاب ACD توسط کابلی حمایت می شود که با یک حلقه به قاب متصل شده است.نیروی کششی کابل 450N است.مطلوبست تعیین :

لنگری که نیروی کابل BH حول قطر AD اعمال می کند.



مثال ۹



✓ لنگر حول قطر قاب :

$$\mathbf{M}_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$M_{AD} = \lambda_{AD} \cdot (\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{T}_{BH})$$

$$\lambda_{AD} = \frac{1}{5}(4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{k})$$

B(0.5 ,0, 0.75)

A(0 ,0, 0.75)

$$\mathbf{r}_{B/A} = (0.5 \text{ m})\,\mathbf{i}$$

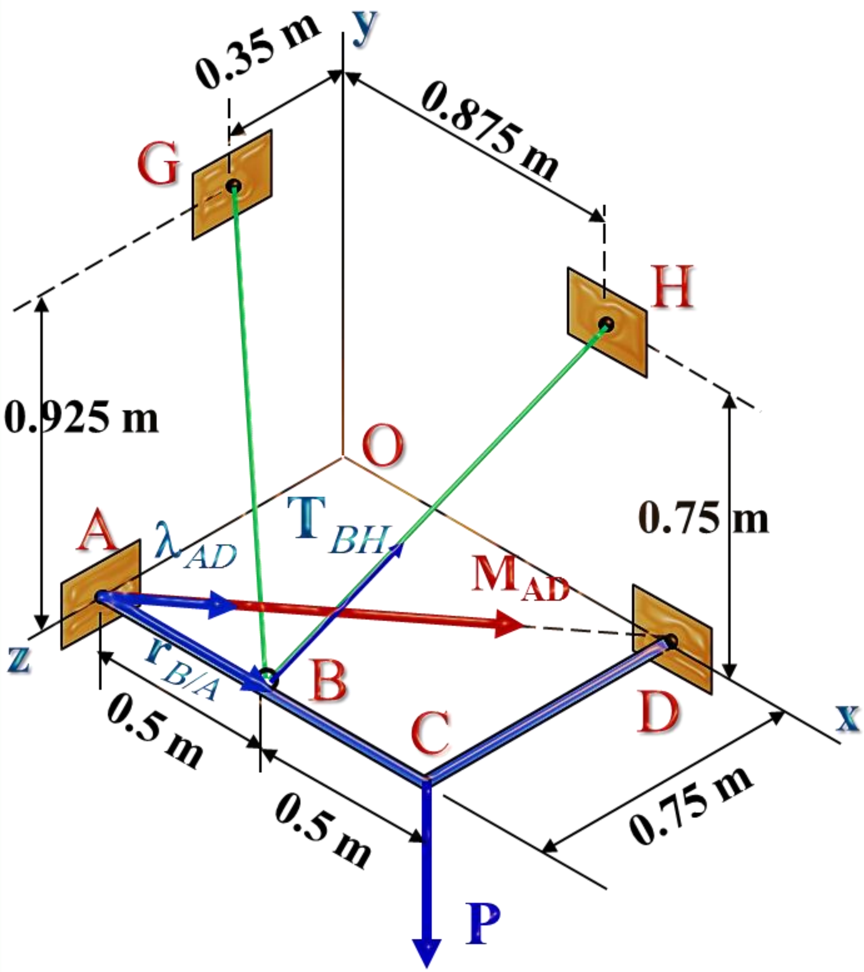
$$d_{BH} = \sqrt{(0.375)^2 + (0.75)^2 + (-0.75)^2} = 1.125 \text{ m}$$

$$\mathbf{T}_{BH} = \frac{450 \text{ N}}{1.125}(0.375\,\mathbf{i} + 0.75\,\mathbf{j} - 0.75\,\mathbf{k})$$

$$= (150 \text{ N})\,\mathbf{i} + (300 \text{ N})\,\mathbf{j} - (300 \text{ N})\,\mathbf{k}$$

مثال ۹

✓ درنهایت:



$$M_{AD} = \lambda_{AD} \cdot (\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{T}_{BH})$$

$$M_{AD} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 150 & 300 & -300 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \; [(-3)(0.5)(300)]$$

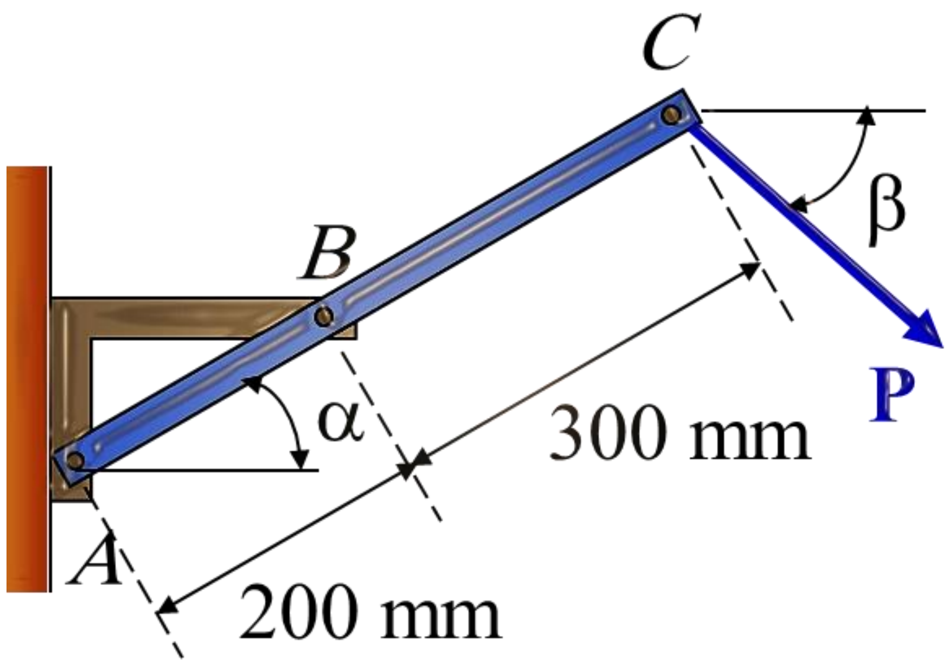
$$\boxed{M_{AD} = -90 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

مثال ۱۰

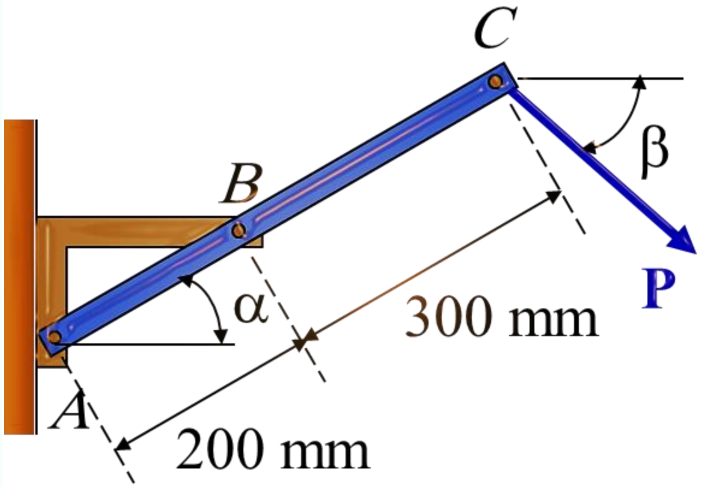
- نیروی P به بزرگی 250N به انتهای میله AC بطول 0.5m که توسط گیره ای درنقاط A و B به تکیه گاه مهار شده است وارد می شود.اگر $\beta=60$ و $\alpha=30$ درجه باشد مطلوبست:

a) کوپل معادل نیروی P در نقطه B.

b) سیستم دو نیرویی معادل با P.



مثال ۱۰



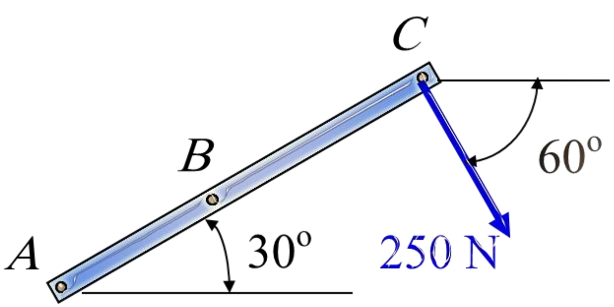
✓ کوپل معادل نیروی P در نقطه B.

$\mathbf{F} = 250\ \text{N}$ $\quad$ $\Sigma\,\mathbf{F}:\ \mathbf{F} = \mathbf{P}$ یا 60°

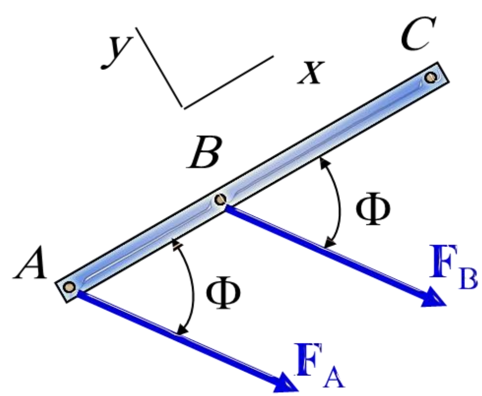
$\Sigma\,\mathbf{M}_B:\quad \text{M} = -\,(0.3\ \text{m})(250\ \text{N}) = -75\ \text{N}$

$$\boxed{\mathbf{F} = 250\ \text{N}\quad 60^{\circ},\qquad \mathbf{M} = 75\ \text{N}\cdot\text{m}}$$

✓ سیستم نیرویی معادل با P.



=



$F_A + F_B = \text{P} = 250$

مثال ۱۰

$\Sigma F_y :\quad -250 = -F_A \sin \Phi - F_B \sin \Phi$

اگر $F_A = -F_B$ آنگاه $-250 = 0$

متعاقبا $\cos \Phi = 0$ یا $\Phi = 90^{o}$

$\Sigma F_x :\quad 0 = F_A \cos \Phi + F_B \cos \Phi$

$F_A = -F_B$ یا $\cos \Phi = 0$

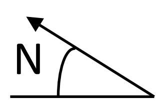
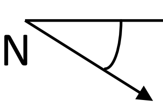
باید: $F_A + F_B = 250$

همچنین:

$$\Sigma M_B : -(0.3\ \text{m})(250\ \text{N}) = (0.2\ \text{m})\, F_A \qquad (+\circlearrowright)$$

$$F_A = -375\ \text{N}$$

و $F_B = +625\ \text{N}$

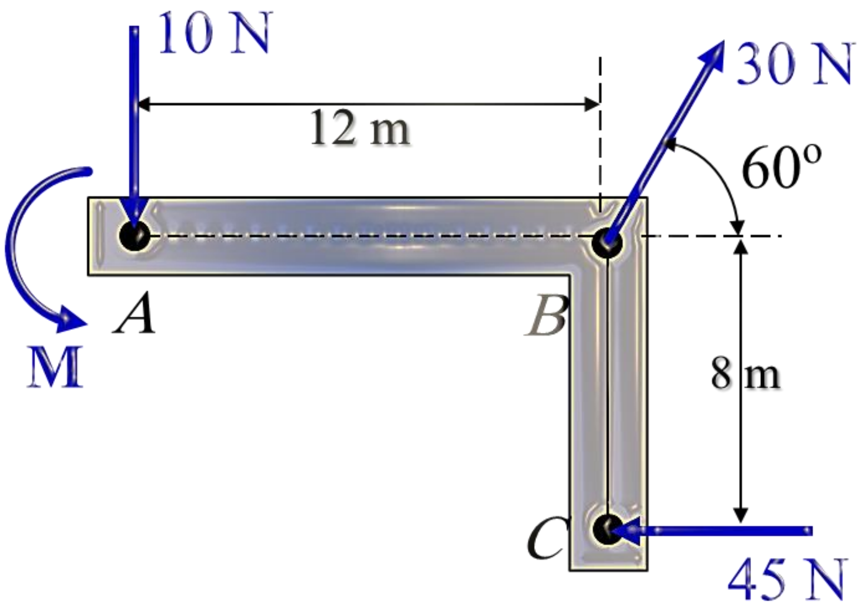
$\mathbf{F}_A = 375$ N  60^{o}, $\mathbf{F}_B = 625$ N  60^{o}

مثال ۱۱

- یک لنگر به بزرگی 54N.m و سه نیرو مطابق شکل به یک نبشی قلاب وارد می شوند،مطلوبست:

a) برآیند این سیستم نیرویی.

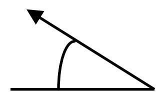
b) محل برآیند یا امتداد آن روی دو ضلع.



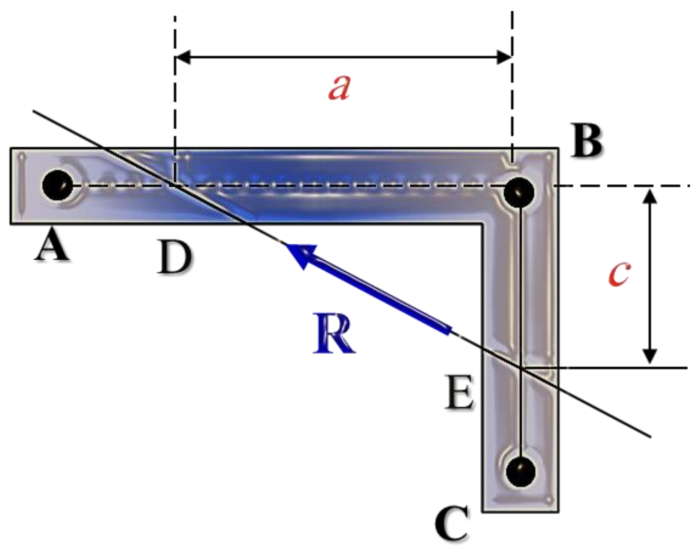
✓ برای تعیین برآیند این سیستم نیرویی باید مولفه های نیرویی را بدست آوریم:

$$\Sigma \mathbf{F}: \quad \mathbf{R} = (-10\,\mathbf{j}) + (-45\,\mathbf{i}) + (30 \cos 60^{o}\ \mathbf{i} + 30 \sin 60^{o}\,\mathbf{j})$$

$$= -(30\text{ N})\,\mathbf{i} + (15.98\text{ N})\,\mathbf{j}$$

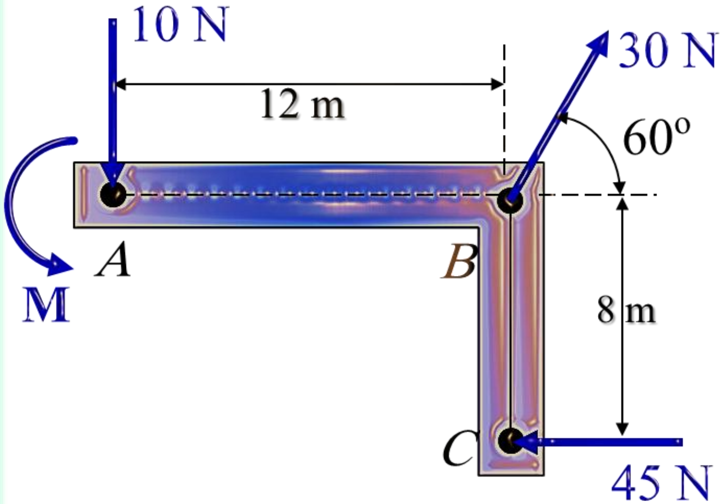


$\mathbf{R} = 34\text{ N} \qquad 28^{o}$



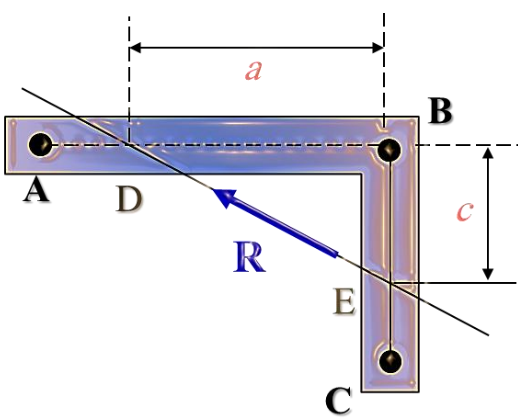
✓ تعیین فواصل a و c (مولفه های R)

ابتدا لنگر را B حساب می کنیم.



$$\Sigma M_B : \quad M_B = (54\ \text{N·m}) + (12\ \text{m})(10\ \text{N}) - (8\ \text{m})(45\ \text{N})$$

$$= -186\ \text{N·m}$$



$R = -(30\ \text{N})\,\mathbf{i} + (15.98\ \text{N})\,\mathbf{j}$

$$\Sigma M_B : \quad -186\ \text{N·m} = -a\,(15.98\ \text{N}) \qquad a = 11.64\ \text{m}$$

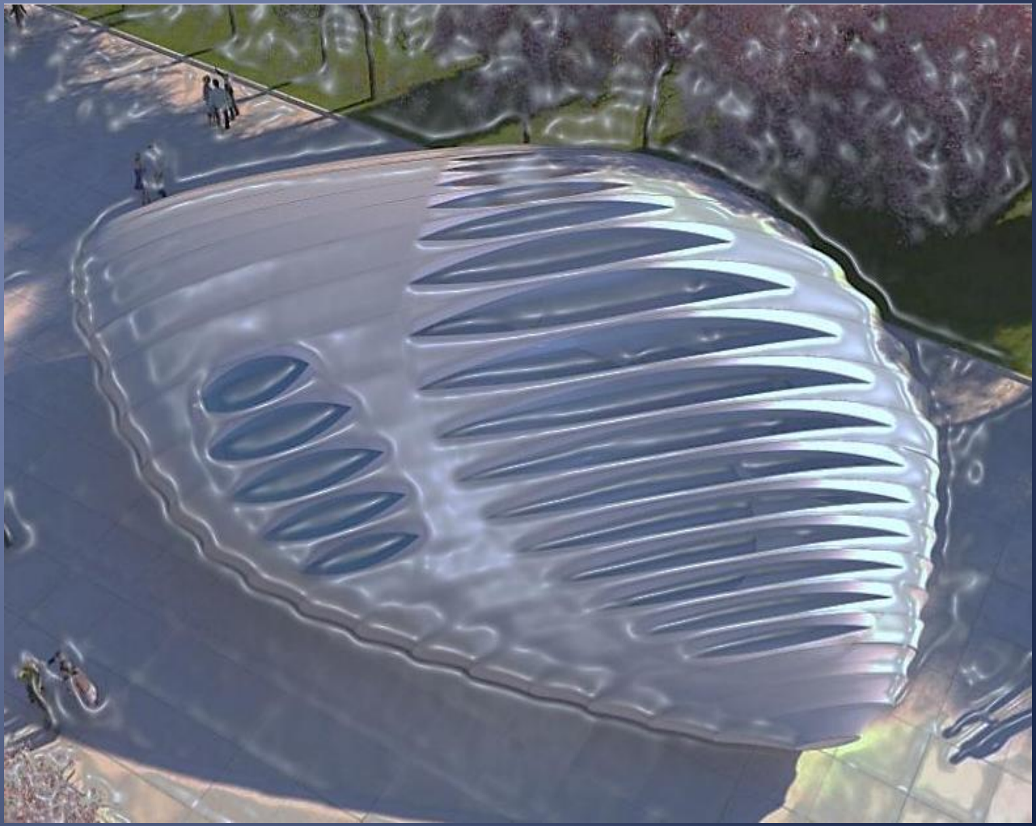
$$\Sigma M_B : \quad -186\ \text{N·m} = c\,(30\ \text{N}) \qquad c = 6.20\ \text{m}$$

4

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.SC.



تعادل اجسام صلب

- برای یک جسم صلب ،معادلات استاتیکی نیروهای خارجی و گشتاورها درحال تعادل می باشند و هیچ جابجایی یا چرخشی در جسم ایجاد نمی کنند.

- ذره یا جسم درحال تعادل ،ذره ای(یا جسمی) است که نسبت به دستگاه اینرسی یا درحال تعادل است یا نسبت به آن بطور یکنواخت حرکت می کند. دریک جسم درحال تعادل تمامی ذرات درحال تعادل می باشند.

- شرط لازم و کافی برای اینکه جسمی درحالت تعادل استاتیکی باشد اینست که برآیند تمام نیروها و کوپل هایی که یک دستگاه نیرویی را روی جسم تشکیل می دهند **صفر** باشد.

یعنی جمع برداری نیروها و گشتاور سیستم نیروها و کوپلها نسبت به هر نقطه ازفضا ، باید صفر باشد.

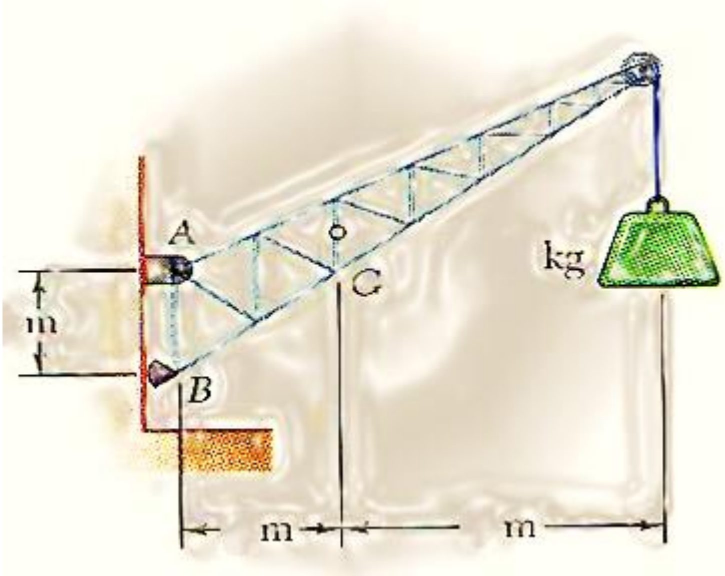
$$\boxed{\sum \vec{F} = 0} \quad \boxed{\sum \vec{M}_O = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) = 0}$$

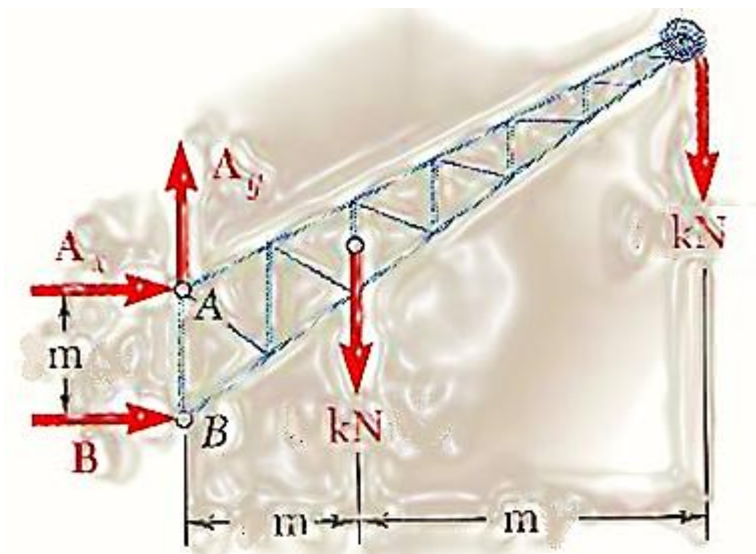
- با روشهای استاتیکی ، حداکثر شش کمیت اسکالر مجهول را درحالت کلی برای یک جسم آزاد می توان بدست آورد. (معادلات اصلی استاتیک)

$\sum F_x = 0$	$\sum F_y = 0$	$\sum F_z = 0$
$\sum M_x = 0$	$\sum M_y = 0$	$\sum M_z = 0$

Meysam4366@yahoo.com

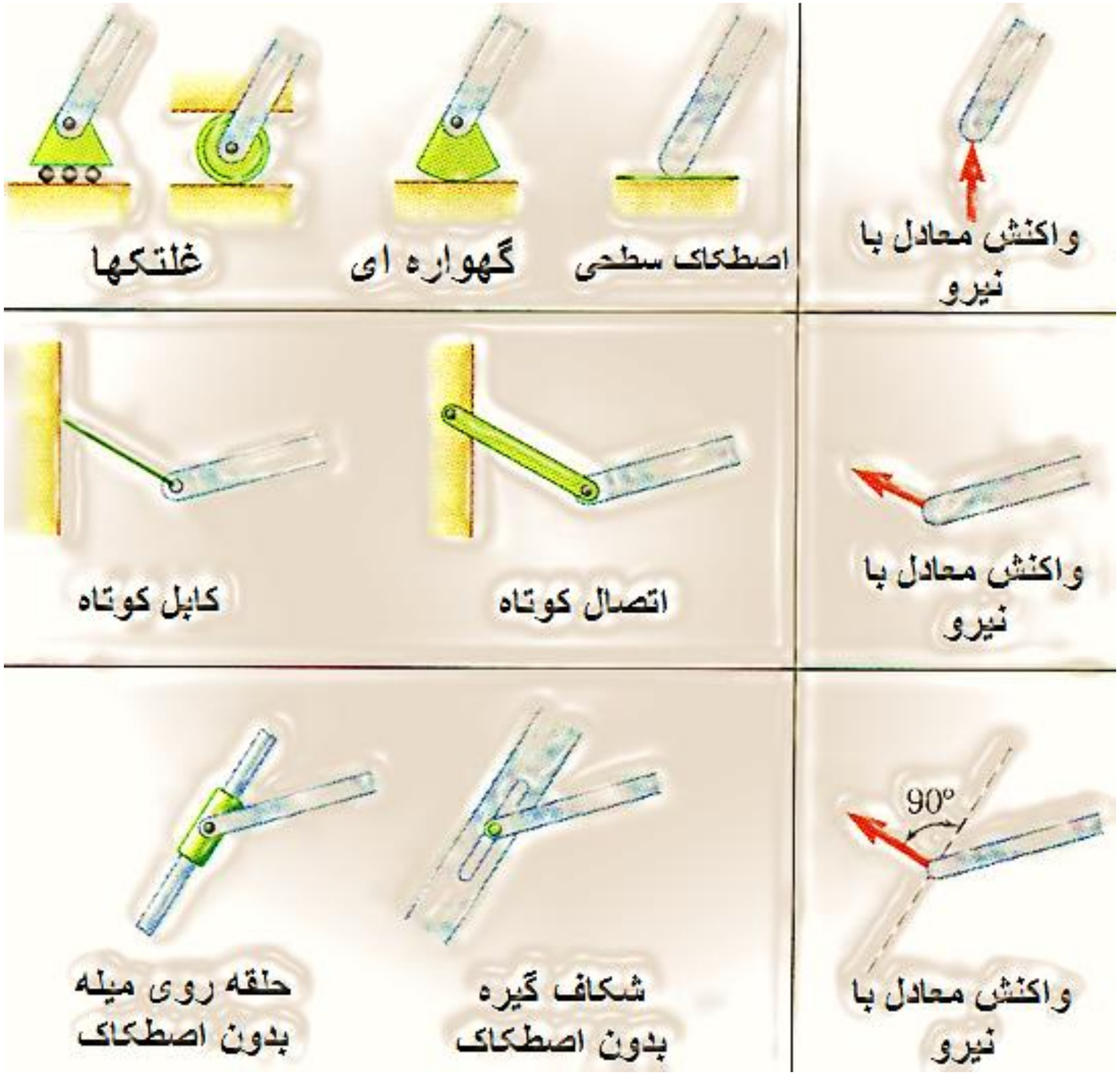
دیاگرام جسم آزاد



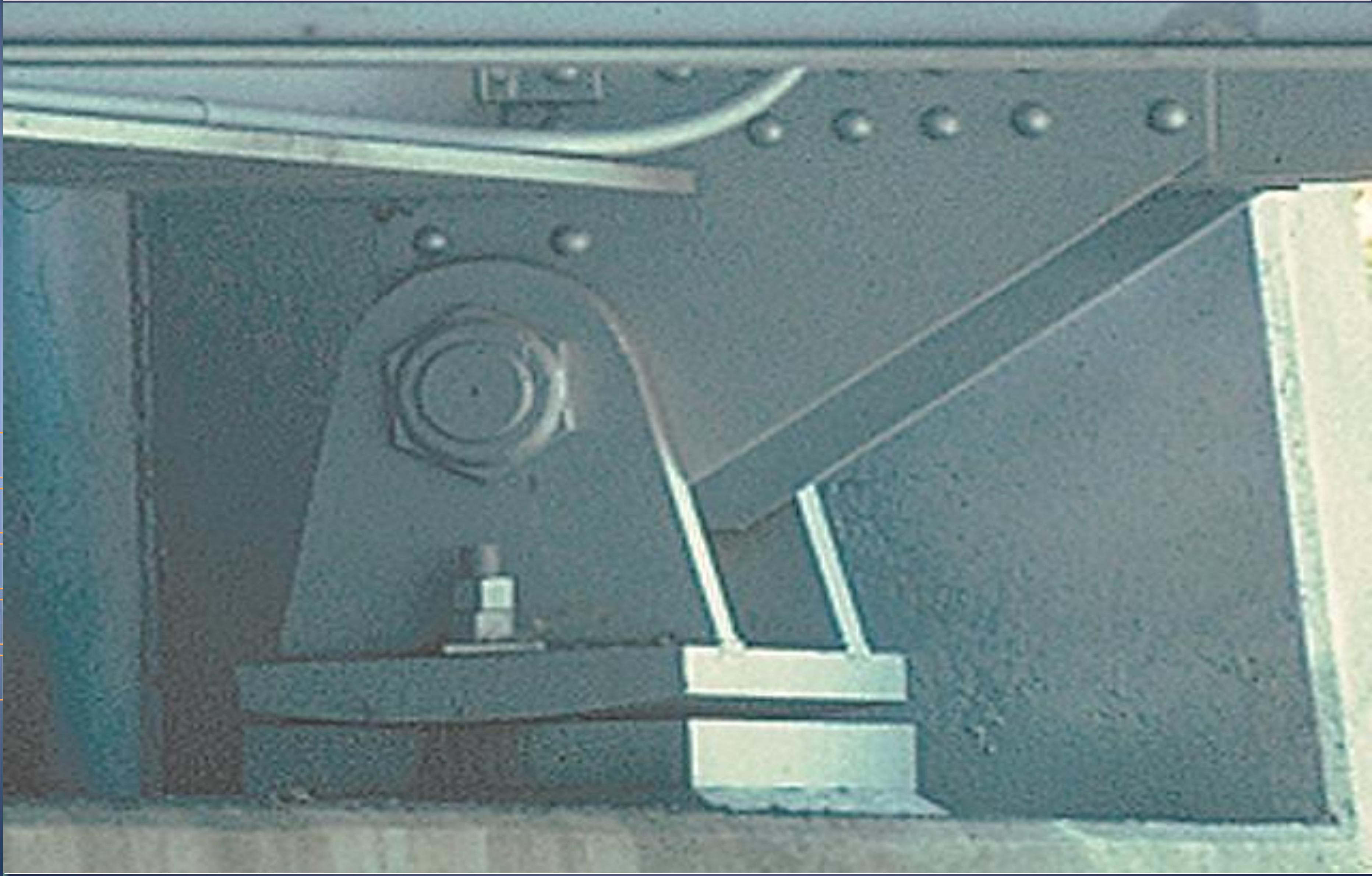


- اولین قدم در تحلیل معادلات استاتیک یک جسم صلب شناسایی تمام نیروهایی است که رو جسم عمل میکنند.این کار با رسم دیاگرام آزاد جسم صورت می گیرد.
- ابتدا جزء (یا تمام جسم) مورد بررسی را از دیگر قسمتها (اعمم از زمین) مجزا می کنیم.
- روی جسم نیروهای خارجی و وزن جسم و بزرگی و جهت آنها را قرار می دهیم.
- درمحل اتصال جسم با دیگر اجزا یا تکیه گاه نیروهای مجهول را قرار می دهیم.
- گشتاورها و نیروهای مورد نظر را با برقراری معادلات تعادل استاتیکی تعیین می کنیم.

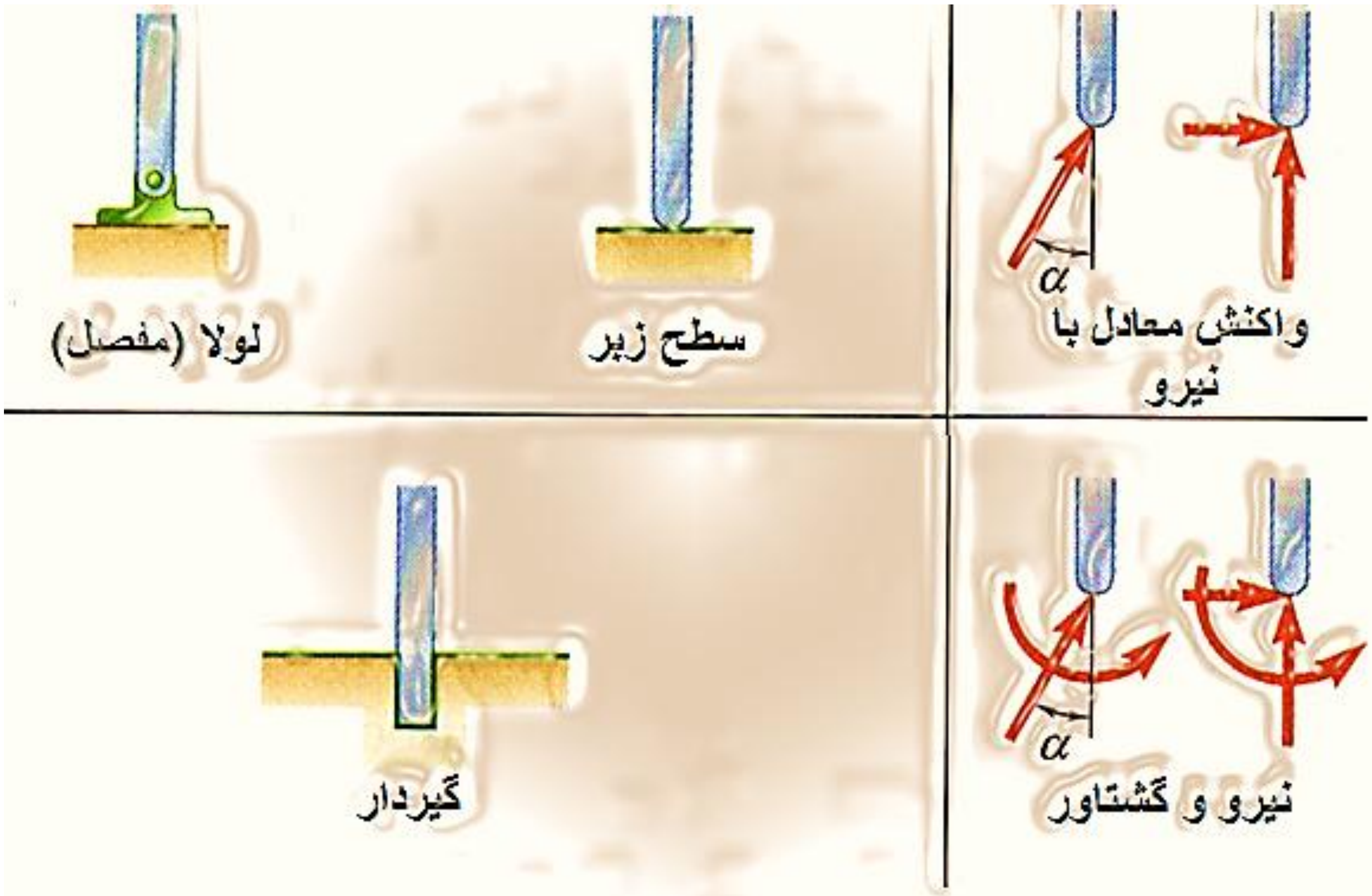
اتصال و واکنشها در تکیه گاه سازه های دو بعدی



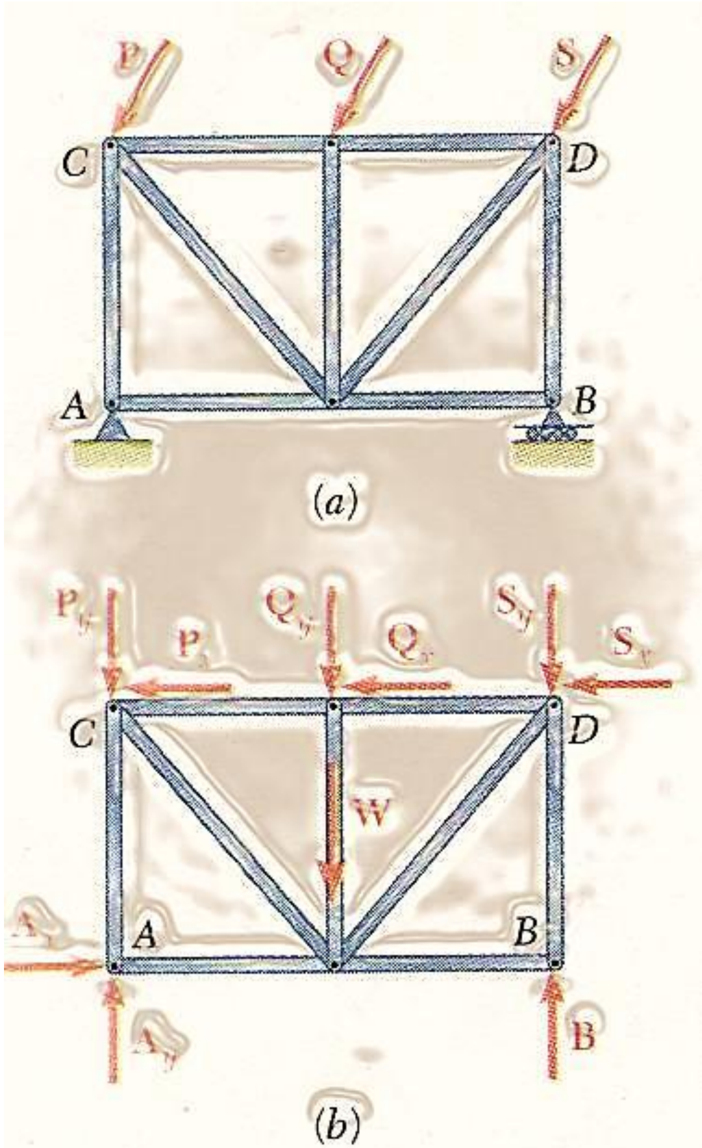
تکیه گاه با اتکاء گهواره ای استفاده شده در یک پل بزرگراهی



اتصال و واکنشها در تکیه گاه سازه های دو بعدی



تعادل در جسم صلب دو بعدی



- برای تمام نیروها و گشتاورهای موثر روی یک سازه دوبعدی

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

- معادلات تعادل

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

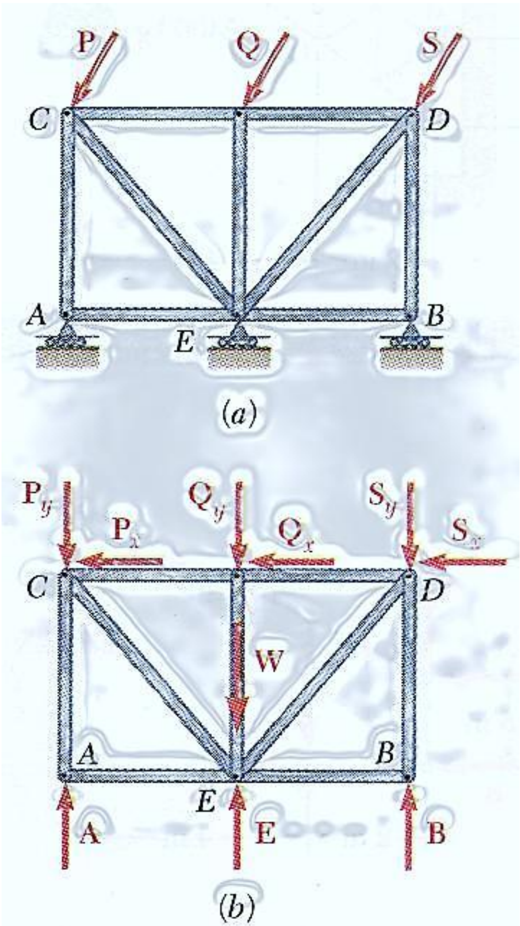
نقطه A می تواند هر جایی در فضا باشد.

- سه معادله برای تعداد فقط سه (و کمتر) مجهول حل شود.

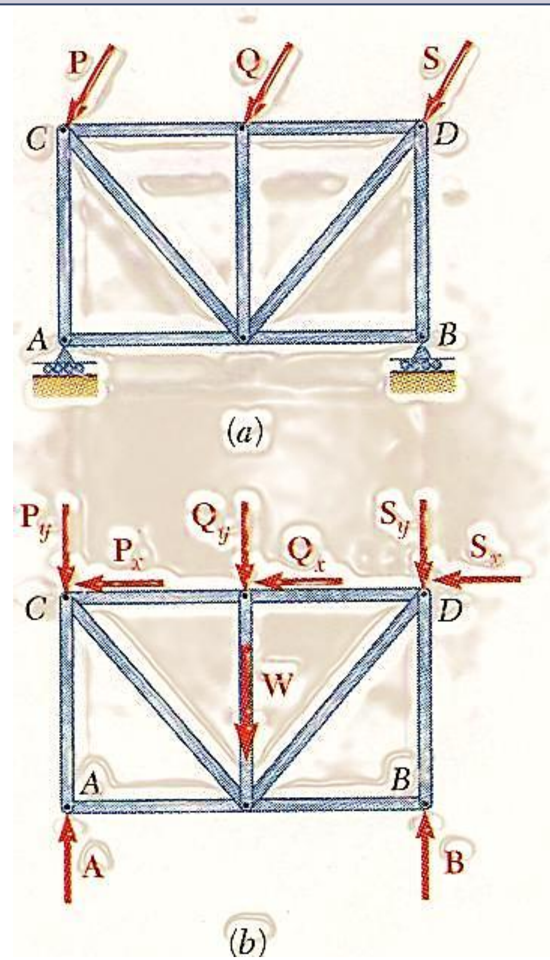
- به سه معادله نمی توان معادله دیگری افزود ،اما می توان معادله دیگری در آن جایگزین کرد.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$$

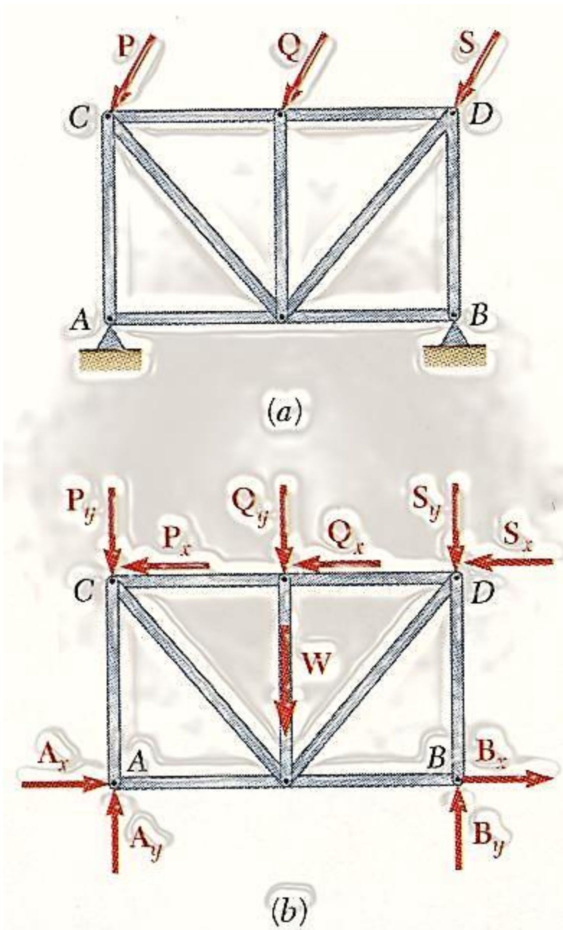
واکنشهای نامعین استاتیکی



- مجهولات برابر معادلات،قیود نامناسب



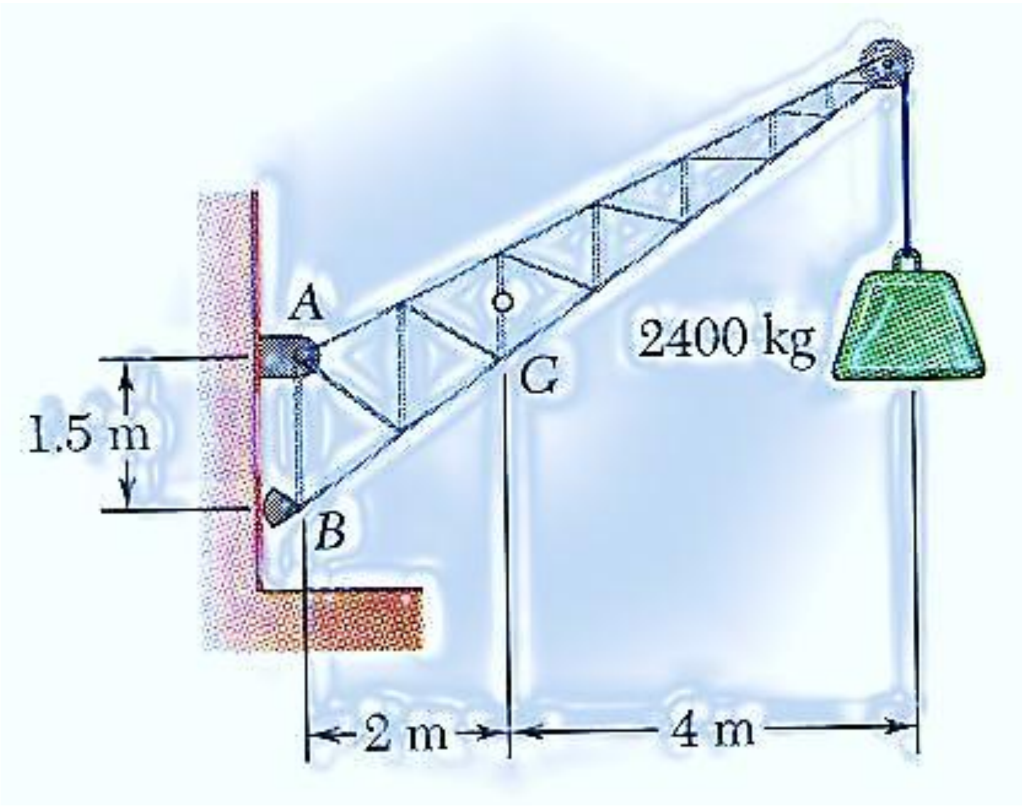
- مجهولات کمتر از معادلات،قیود جزئی



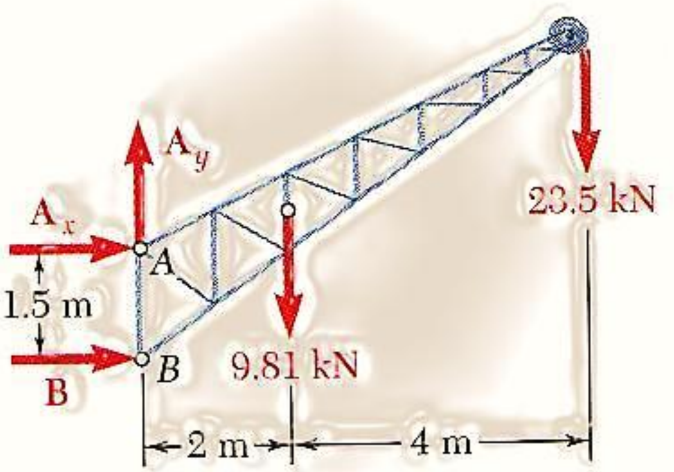
- مجهولات بیش از معادلات

مثال ۱

- جرثقیل ثابتی به جرم 1000kg برای بلند کردن وزنه ای به جرم 2400kg بکار میرود.جرثقیل در نقطه A بصورت مفصلی و در B بصورت گهواره ای به تکیه گاه متصل است.مرکز جرم جرثقیل نیز در نقطه G می باشد. مطلوبست:
  - واکنشهای تکیه گاهی جرثقیل.



مثال ۱



- ابتدا دیاگرام جسم آزاد جرثقیل را رسم می کنیم.
- معادلات تعادل استاتیکی مناسب را در محل نیروهای مجهول برقرار می کنیم .
- درنقطه A مجموع گشتاورها را برابر صفر قرار می دهیم:

$$\sum M_A = 0: \quad +B(1.5\text{m}) - 9.81\,\text{kN}(2\text{m}) - 23.5\,\text{kN}(6\text{m}) = 0$$

$$\boxed{B = +107.1\,\text{kN}}$$

- درنقطه A مجموع نیروهای افقی وعمودی را برابر صفر قرار می دهیم:

$$\sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$\boxed{A_x = -107.1\,\text{kN}}$$

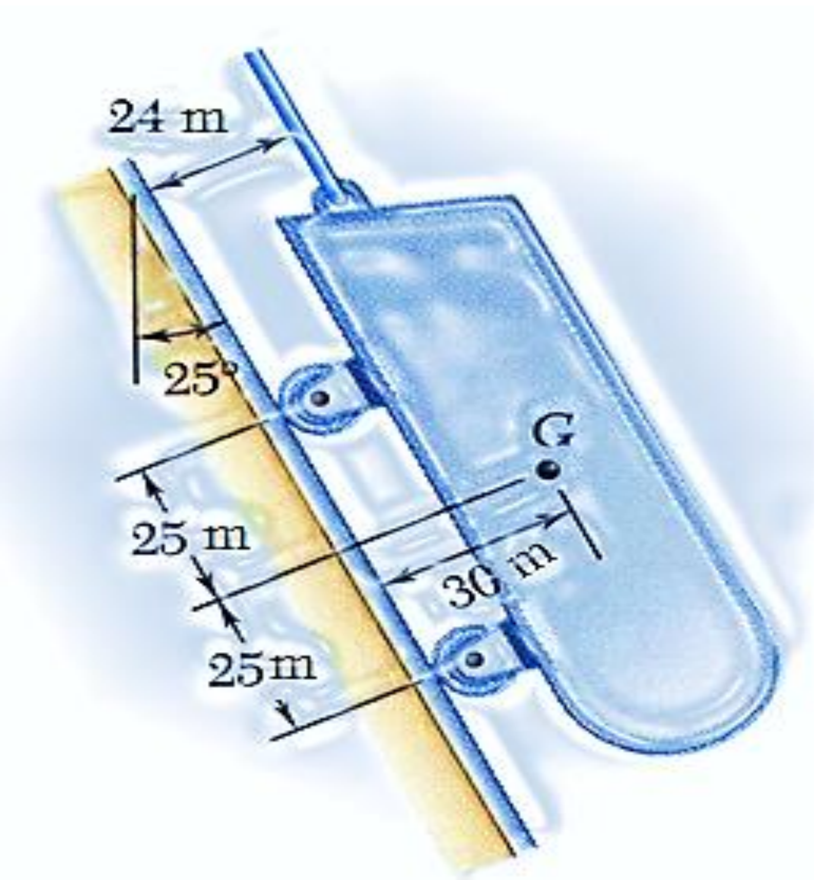
$$\sum F_y = 0: \quad A_y - 9.81\,\text{kN} - 23.5\,\text{kN} = 0$$

$$\boxed{A_y = +33.3\,\text{kN}}$$

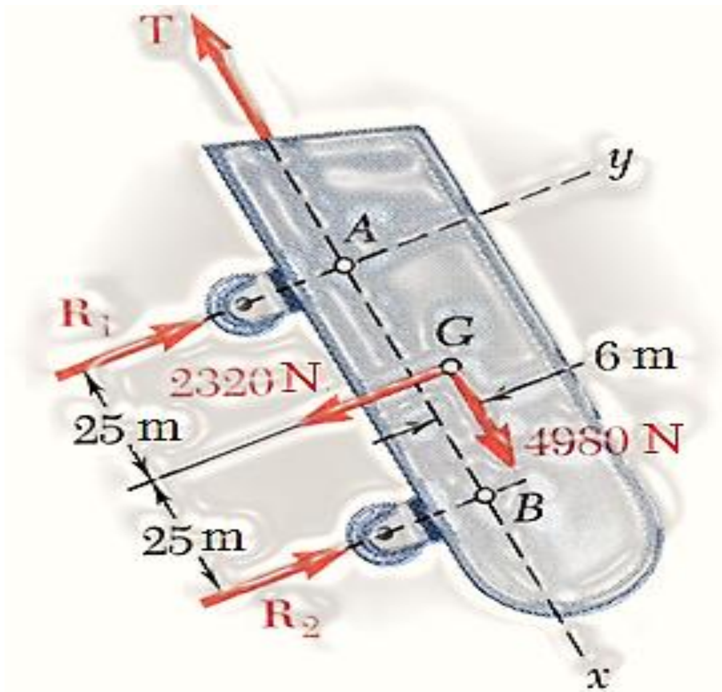
مثال ۲

❑ گاری مطابق شکل در یک سطح شیبدار به سمت بالا کشیده می شود، وزن گاری 5500Nاست و در نقطه G اعمال می شود ،مطلوبست:

- کشش موجود در کابل و واکنشهای تگیه گاهی در محل چرخهای گاری.



مثال ۲



✓ دیاگرام جسم آزاد

✓ تجزیه بردار وزن

$$W_x = +(5500\ \text{N})\cos 25^\circ = +4980\ \text{N}$$

$$W_y = -(5500\ \text{N})\sin 25^\circ = -2320\ \text{N}$$

✓ واکنشهای تکیه گاهی درمحل چرخها:

$$\sum M_A = 0: \quad -(2320\ \text{N})25\text{m} - (4980\ \text{N})6\text{m} + R_2(50\ \text{m}) = 0$$

$$\boxed{R_2 = 1758\ \text{N}}$$

$$\sum M_B = 0: \quad +(2320\ \text{N})25\text{m} - (4980\ \text{N})6\text{m} - R_1(50\ \text{m}) = 0$$

$$\boxed{R_1 = 562\ \text{N}}$$

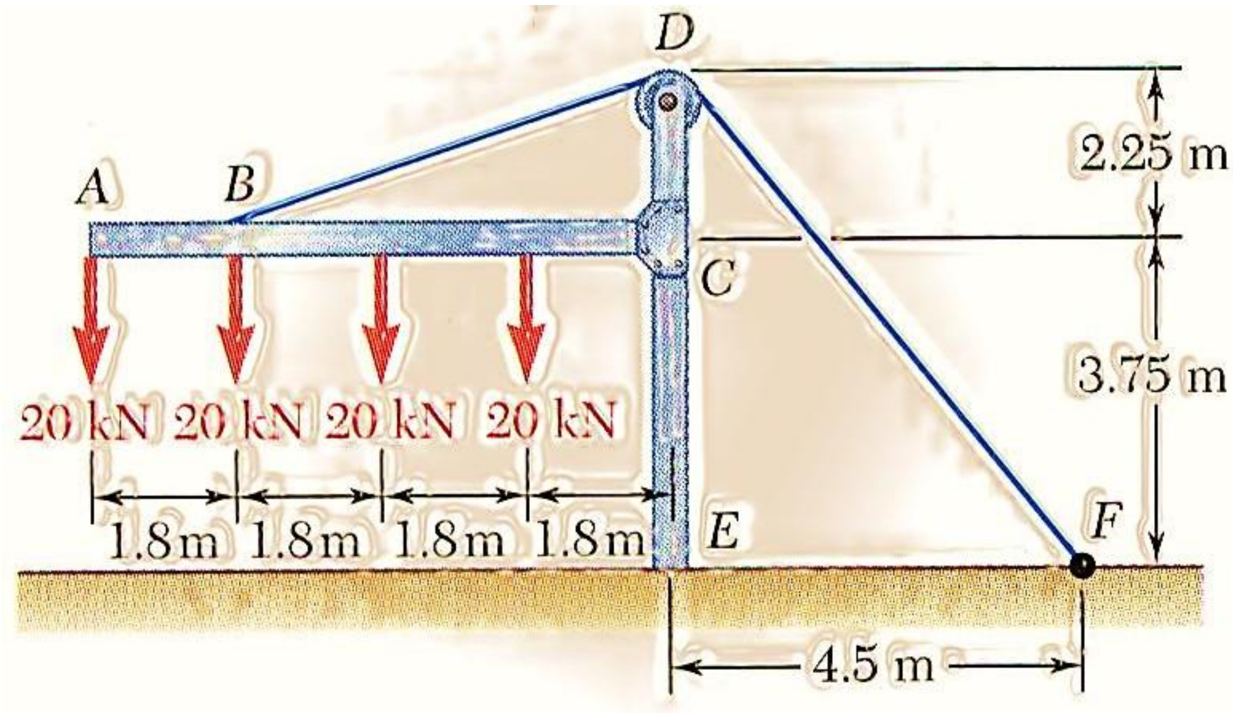
✓ کشش در کابل:

$$\sum F_x = 0: \quad +4980\text{N} - \text{T} = 0$$

$$\boxed{T = +4980\ \text{N}}$$

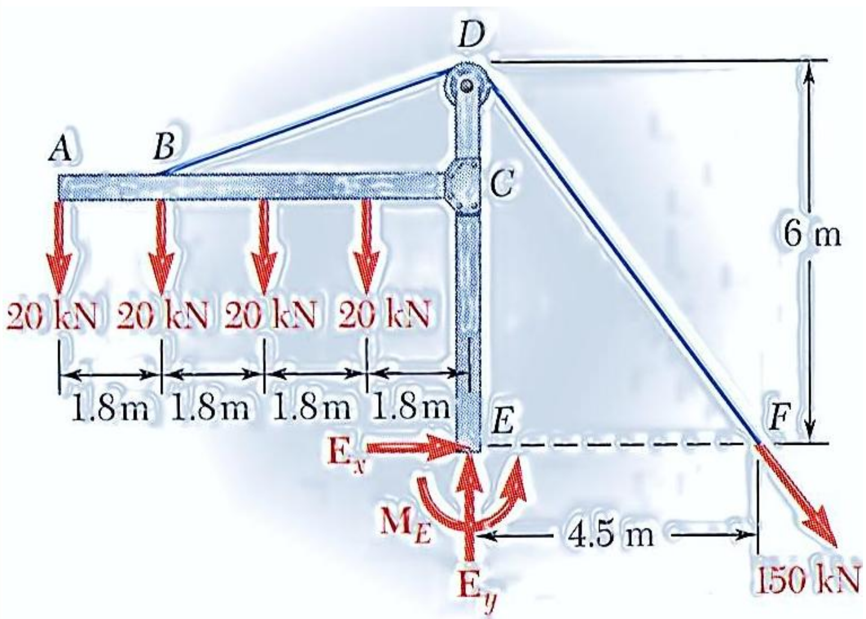
مثال ۳

- برای مهارسقف یک سازه از یک کابل استفاده می شود.اگر کشش موجود در کابل 150 kN باشد،مطلوبست:
  - واکنش تکیه گاهی در E.



مثال ۳

- ✓ دیاگرام جسم آزاد
- ✓ با برقراری معادلات تعادل در سازه دو بعدی:



$$\sum F_x = 0: \quad E_x + \frac{4.5}{7.5}(150\,\text{kN}) = 0$$

$$\boxed{E_x = -90.0\,\text{kN}}$$

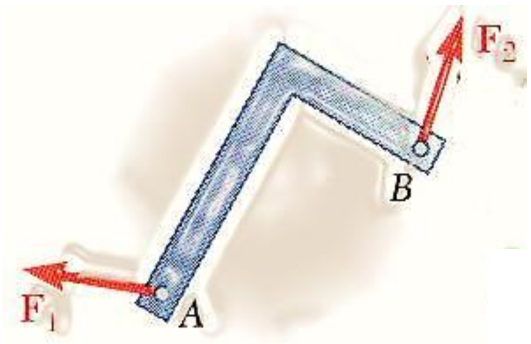
$$\sum F_y = 0: \quad E_y - 4(20\,\text{kN}) - \frac{6}{7.5}(150\,\text{kN}) = 0$$

$$\boxed{E_y = +200\,\text{kN}}$$

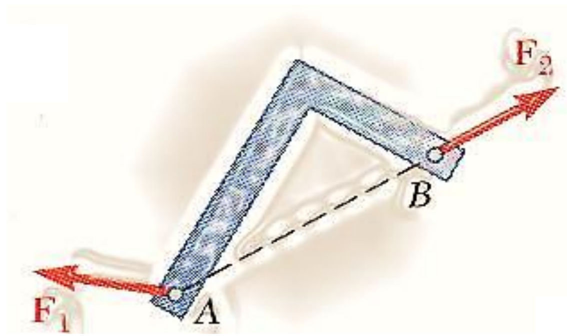
$$\sum M_E = 0: \ +20\,\text{kN}(7.2\,\text{m}) + 20\,\text{kN}(5.4\,\text{m}) + 20\,\text{kN}(3.6\,\text{m}) + 20\,\text{kN}(1.8\,\text{m}) - \frac{6}{7.5}(150\,\text{kN})4.5\,\text{m} + M_E = 0$$

$$\boxed{M_E = 180.0\,\text{kN}\cdot\text{m}}$$

تعادل در اجسام دو نیرویی

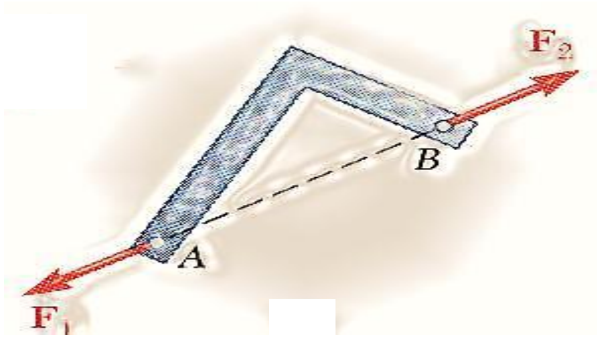


- میله ای را تحت اثر دو نیروی $\mathbf{F_1}$ و $\mathbf{F_2}$ درنظربگیرید.



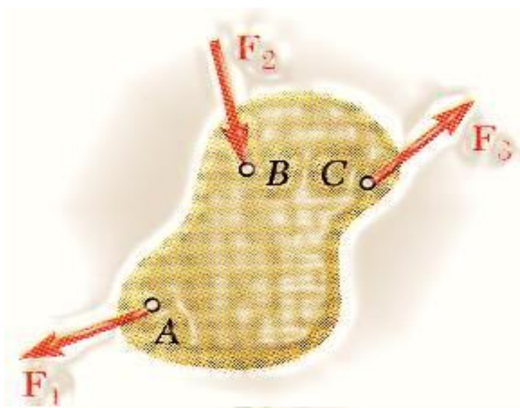
- وقتی معادله تعادل لنگر حول نقطه A صفر است ،یعنی امتداد نیروی F_2 باید از نقطه A بگذرد.

- بطور مشابه وقتی درمعادله تعادل لنگر حول نقطه B صفر است ،یعنی امتداد نیروی F_1 باید از نقطه B بگذرد.

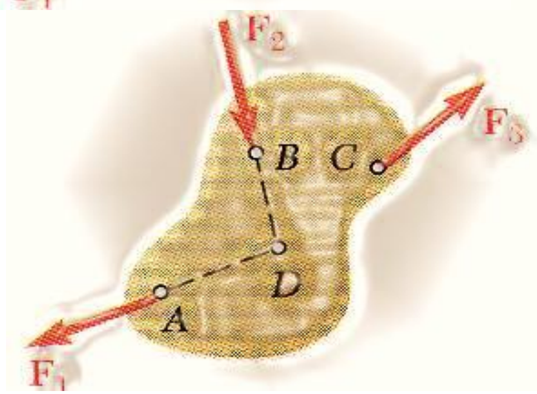


- **عضو دو نیرویی** ، عضوی است که درآن نیروها مساوی و درخلاف جهت یکدیگرباشند و خطوط حامل آنها نیز منطبق برهم باشد.وقتی عضو راست باشد، آن را فشاری یا کششی گویند.

تعادل در اجسام سه نیرویی

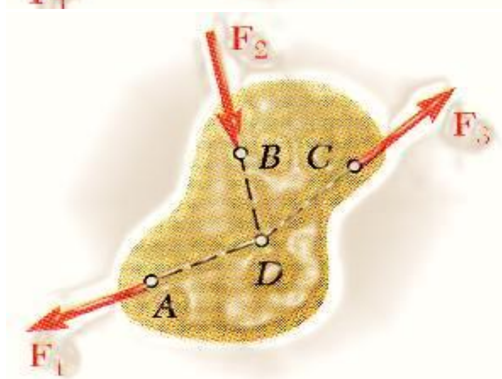


- جسمی را تحت اثر سه نیروی $\mathbf{F_1}$ و $\mathbf{F_2}$ و $\mathbf{F_3}$ درسه نقطه نظربگیرید.



- فرض می شود امتداد دو نیروی F_1 و F_2 از نقطه D میگذرد،یعنی گشتاوری حول این نقطه ایجاد نمی کنند.

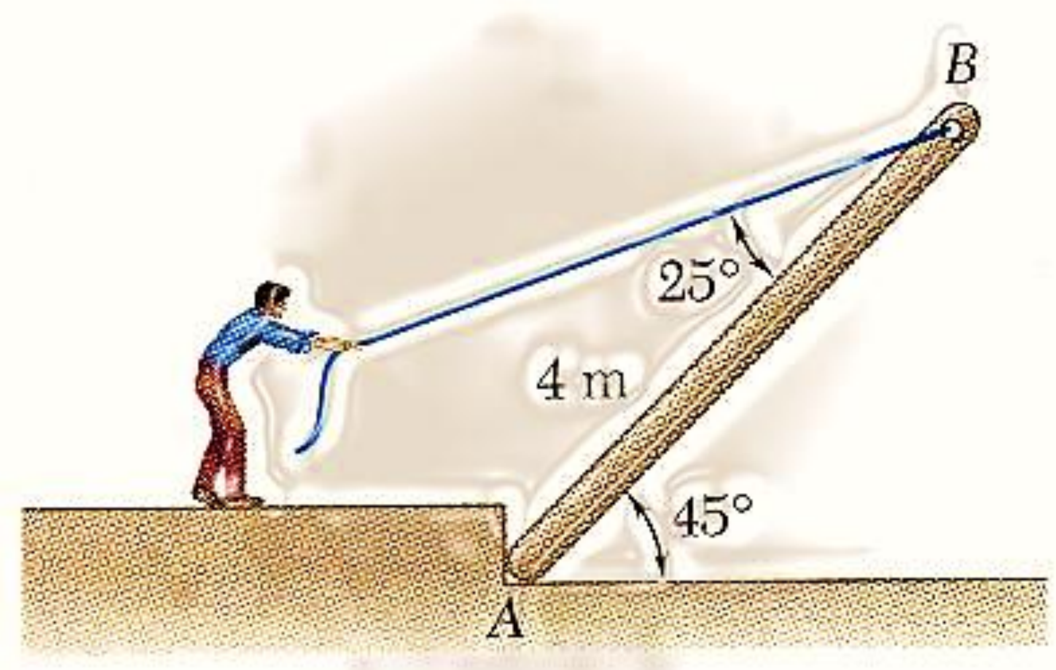
- برای آنکه معادله تعادل لنگر در این جسم صفر باشد باید امتداد اثر نیروی F_3 نیز ازاین نقطه گذر کند.



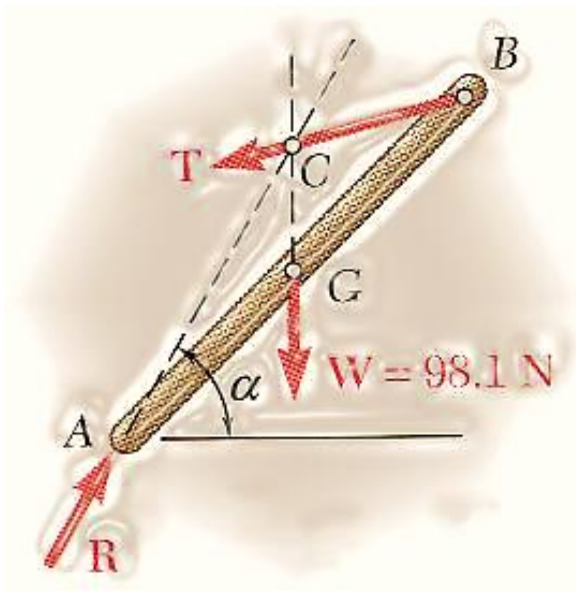
- در جسم سه نیرویی علاوه براینکه خط اثر سه نیرو در یک نقطه همرس است ، مجموع بزرگی آنها نیز برابر صفر می شود.

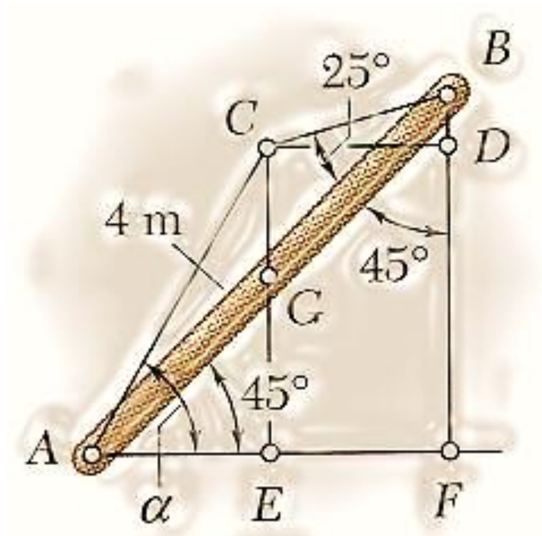
مثال ۴

- ❑ تیرچه ای به وزن 10 kg توسط شخصی با طنابی که به انتهای آن متصل است ،کشیده می شود، مطلوبست:
  - کشش موجود در طناب .



مثال ۴





- ✓ دیاگرام جسم آزاد تیرچه
- ✓ تعیین جهت واکنش R

$$AF = AB\cos 45 = (4\,\text{m})\cos 45 = 2.828\,\text{m}$$

$$CD = AE = \tfrac{1}{2}\,AF = 1.414\,\text{m}$$

$$BD = CD\cot(45+25) = (1.414\,\text{m})\tan 20 = 0.515\,\text{m}$$

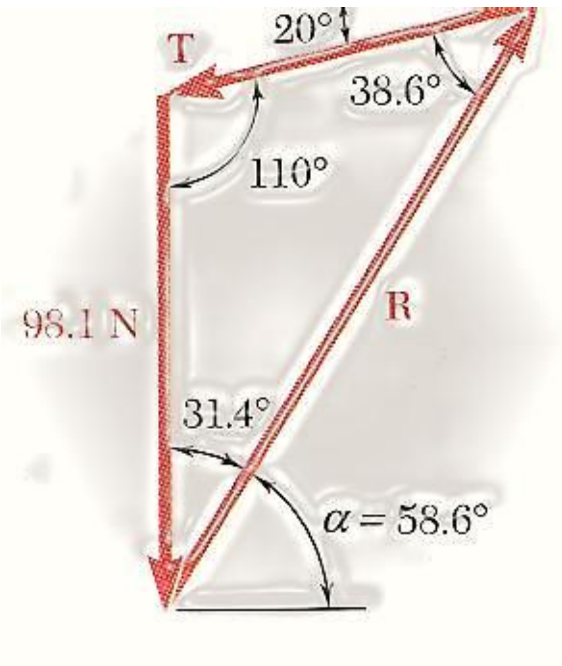
$$CE = BF - BD = (2.828 - 0.515)\text{m} = 2.313\,\text{m}$$

$$\tan\alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313}{1.414} = 1.636$$

$$\boxed{\alpha = 58.6^\circ}$$

مثال ۴

✓ تعیین بزرگی R.



$$\frac{T}{\sin 31.4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98.1\ \text{N}}{\sin 38.6^\circ}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T &= 81.9\ \text{N} \\ R &= 147.8\ \text{N} \end{aligned}}$$

تعادل در جسم صلب سه بعدی

- برای بیان شرایط تعادل یک جسم صُلب در سه بُعد اصلی به شِش مُعادله اِسکالِر نیازمَندیم.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

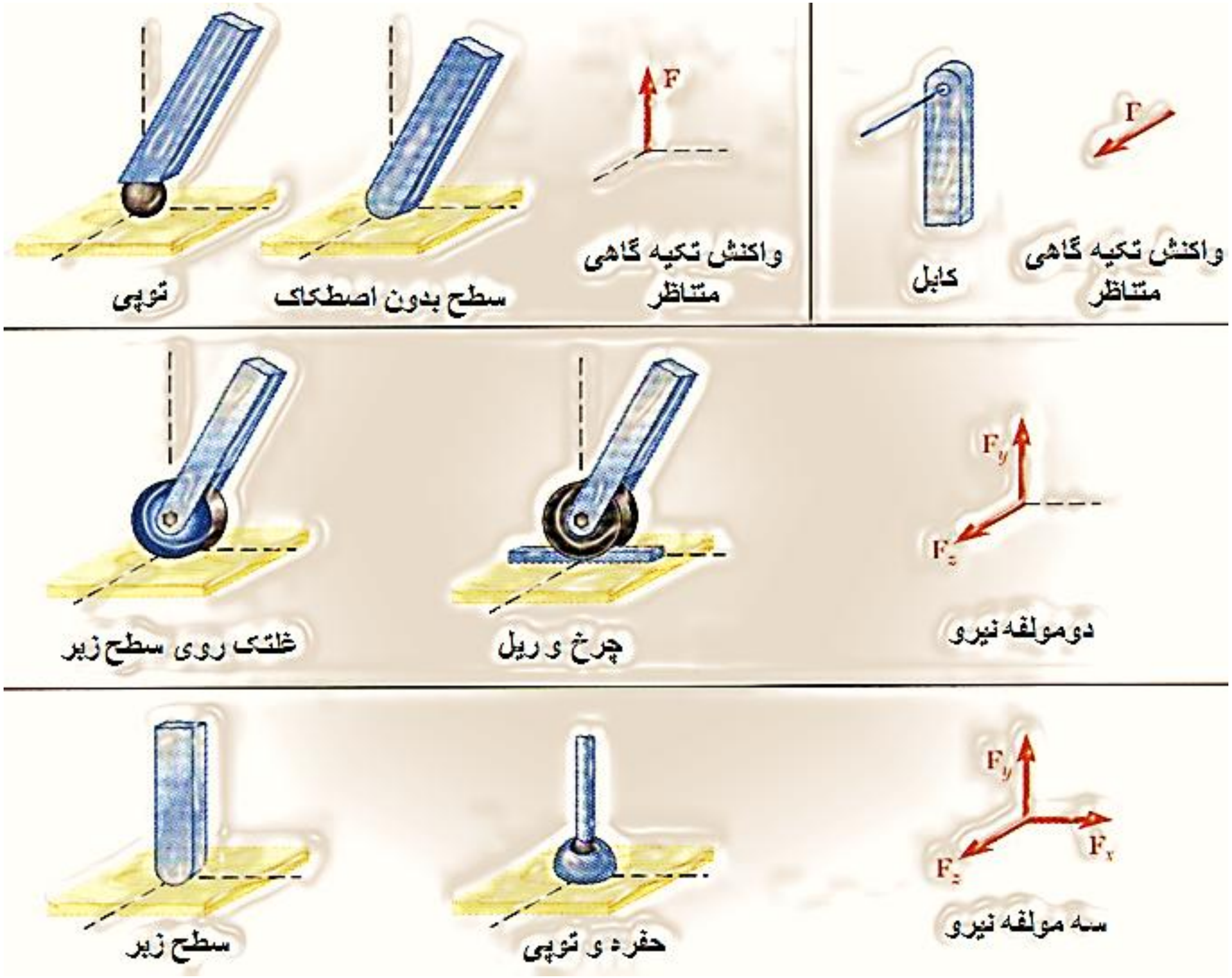
- این معادلات برای حل بیش از شش مجهول اصلی عکس العمل در تکیه گاهها یا نیرو دراتصالات قابل کاربرد نیستند.

- اگر تعداد این مجهولات بیش از معادله های مستقل موجود باشد،هیچ عمل جبری به حل مجهولات جسم آزاد انتخاب شده نخواهد انجامید.

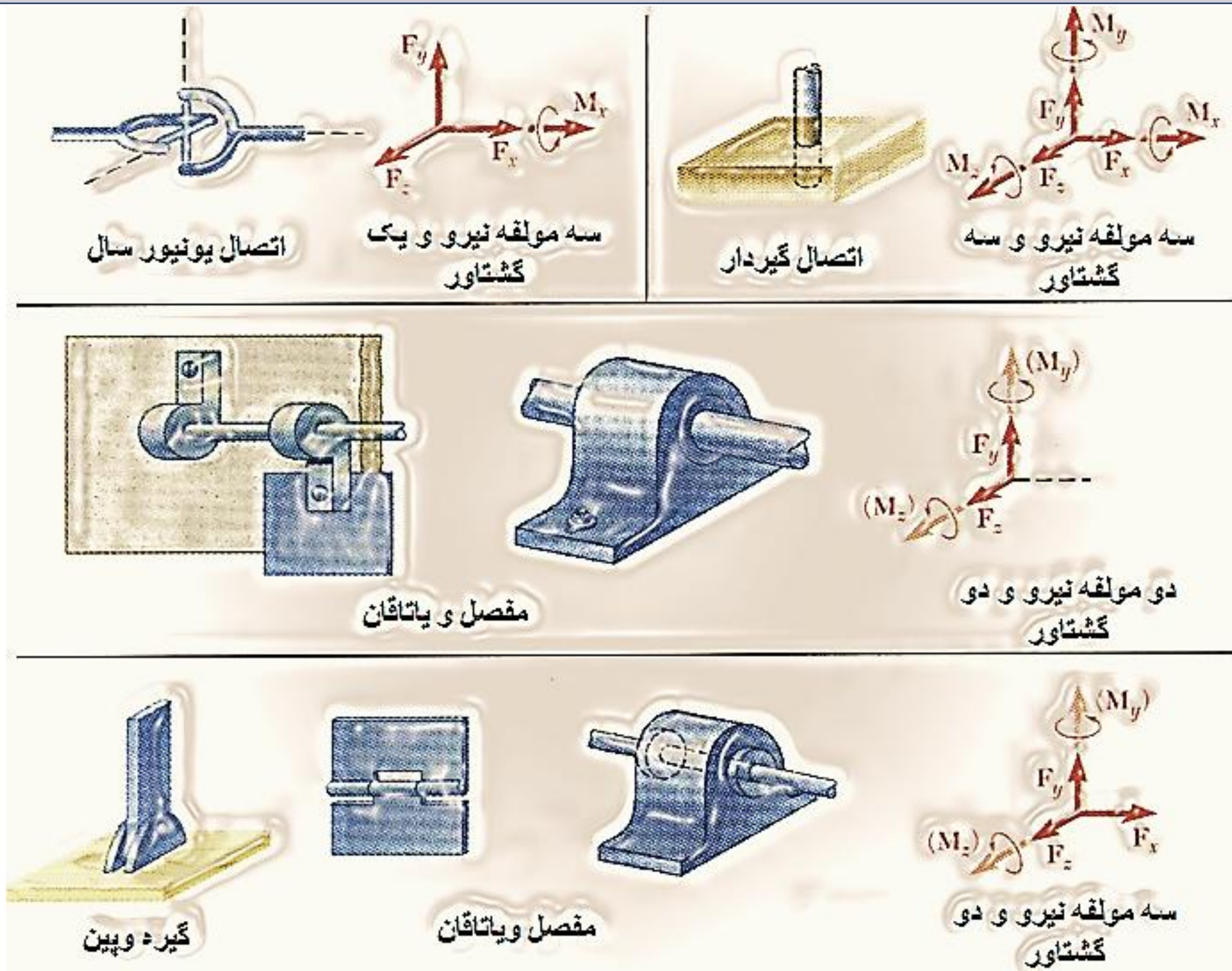
- حالتهای خاص تعادل:

	ساده ترین برآیند
I. سیستم نیروهای متقاطع(سه بعدی) (نیازمند سه معادله مستقل تعادل) ⟵	یک نیرو
II. سیستم نیروهای هم صفحه (نیازمند سه معادله مستقل تعادل) ⟵	یک نیرو یا یک گشتاور جفت
III. نیروهای موازی در فضا (سه بعدی) (نیازمند سه معادله مستقل تعادل) ⟵	یک نیرو یا یک گشتاور جفت

اتصال و واکنشها در تکیه گاه سازه های سه بعدی



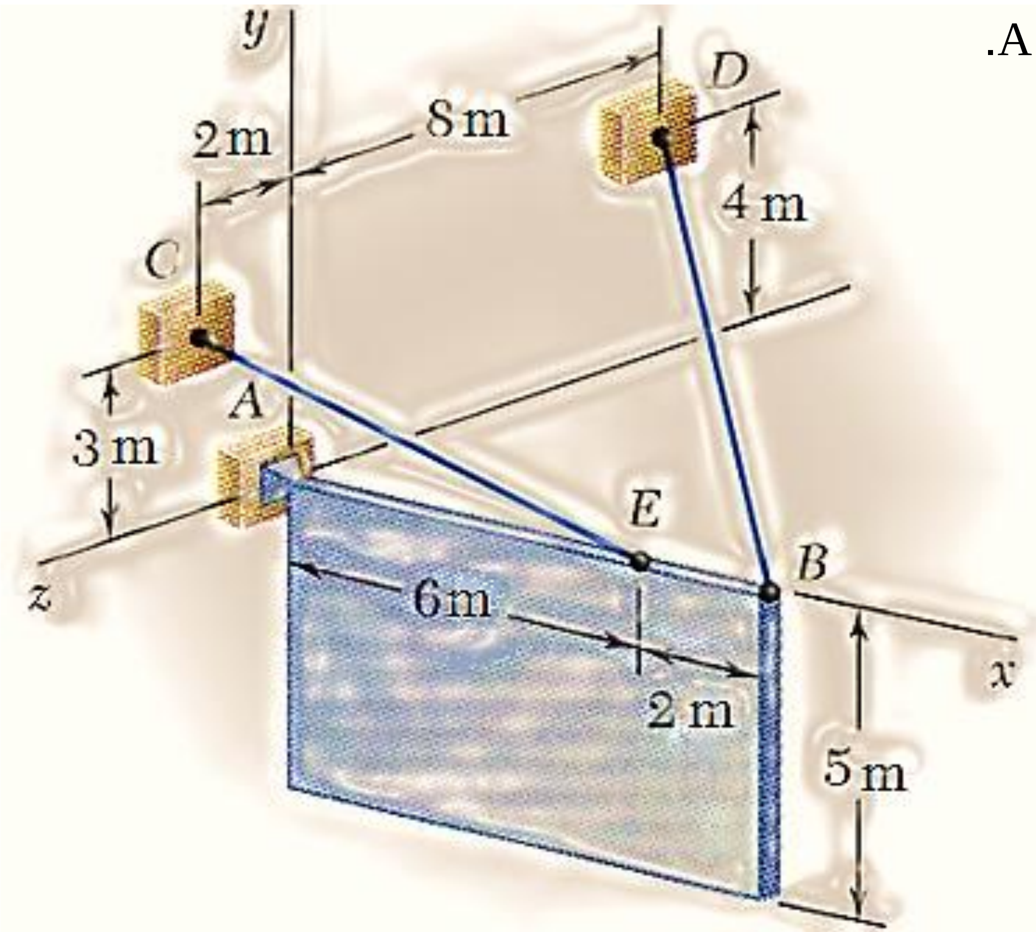
اتصال و واکنشها در تکیه گاه سازه های سه بعدی



اتصال Universal (قفل گاردان)

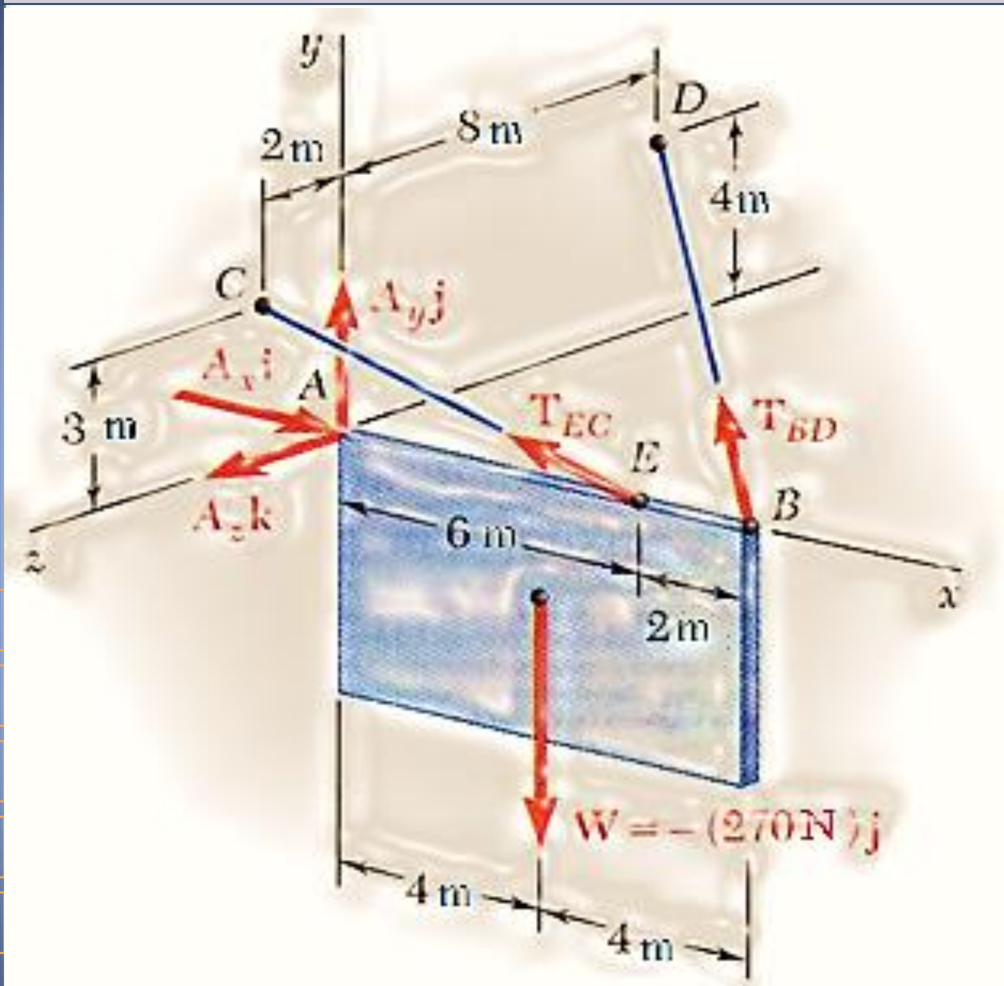
مثال ۵

- تابلویی به وزن مخصوص 270N که در نقاط E و B بوسیله سیستم کابل وتوپی به تکیه گاه مهار شده است مطلوبست:



- کشش موجود در کابلها و واکنش تکیه گاهی A.

مثال ۵



✓ باتوجه به پنج مجهول ،سازه ازنظر استاتیکی معیین است.

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD}\frac{\vec{r}_D - \vec{r}_B}{\left|\vec{r}_D - \vec{r}_B\right|}$$

$$= T_{BD}\frac{-8\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}}{12}$$

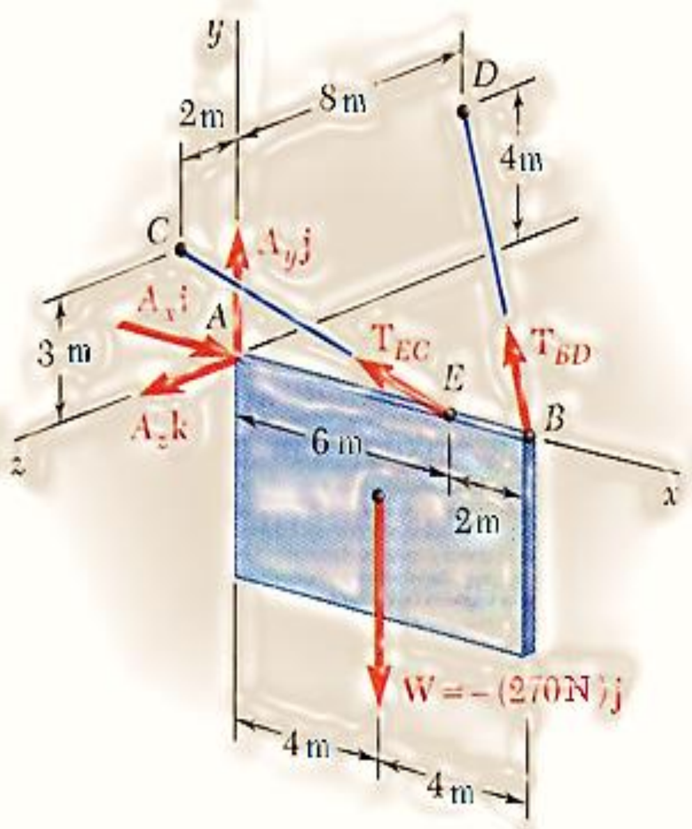
$$= T_{BD}\left(-\tfrac{2}{3}\vec{i} + \tfrac{1}{3}\vec{j} - \tfrac{2}{3}\vec{k}\right)$$

$$\vec{T}_{EC} = T_{EC}\frac{\vec{r}_C - \vec{r}_E}{\left|\vec{r}_C - \vec{r}_E\right|}$$

$$= T_{EC}\frac{-6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}}{7}$$

$$= T_{EC}\left(-\tfrac{6}{7}\vec{i} + \tfrac{3}{7}\vec{j} + \tfrac{2}{7}\vec{k}\right)$$

مثال ۵



$$\sum \vec{F} = \vec{A} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{EC} - (270\ \text{N})\vec{j} = 0$$

$$\vec{i}: \quad A_x - \tfrac{2}{3}T_{BD} - \tfrac{6}{7}T_{EC} = 0$$

$$\vec{j}: \quad A_y + \tfrac{1}{3}T_{BD} + \tfrac{3}{7}T_{EC} - 270\ \text{N} = 0$$

$$\vec{k}: \quad A_z - \tfrac{2}{3}T_{BD} + \tfrac{2}{7}T_{EC} = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = \vec{r}_B \times \vec{T}_{BD} + \vec{r}_E \times \vec{T}_{EC} + (4\ \text{m})\vec{i} \times (-270\ \text{N})\vec{j} = 0$$

$$\vec{j}: \quad 5.333T_{BD} - 1.714T_{EC} = 0$$

$$\vec{k}: \quad 2.667T_{BD} + 2.571T_{EC} - 1080\ \text{N} = 0$$

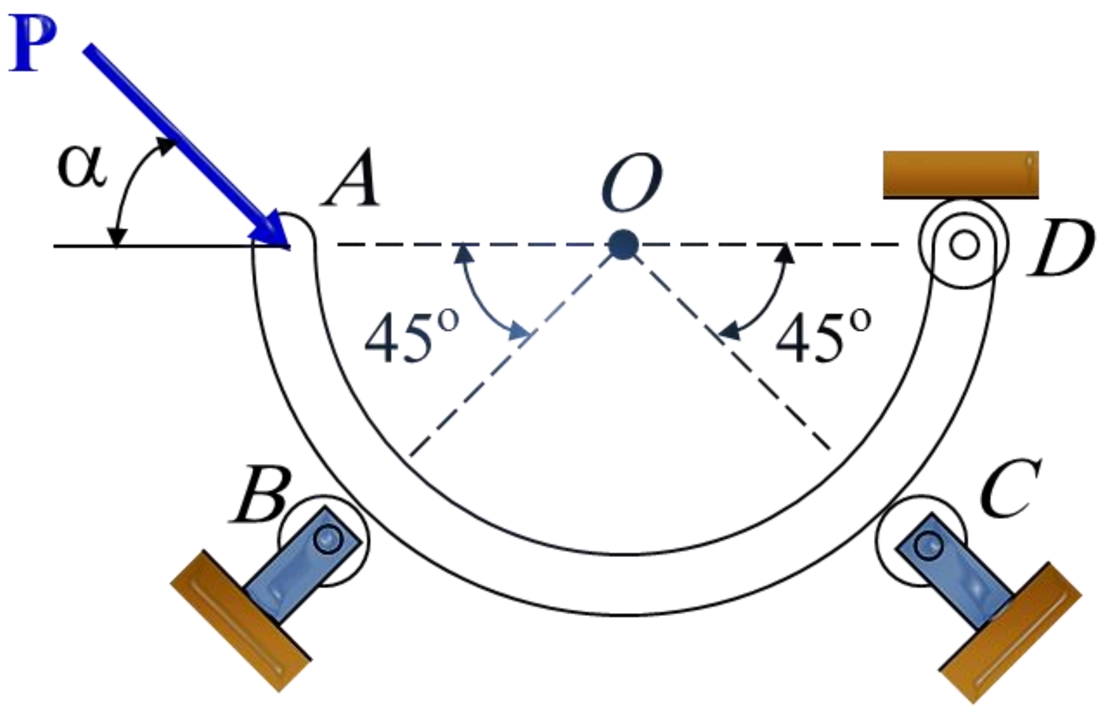
✓ با حل ۵ معادله فوق:

$$\boxed{\begin{array}{l} T_{BD} = 101.3\ \text{N} \quad T_{EC} = 315\ \text{N} \\ \vec{A} = (338\ \text{N})\vec{i} + (101.2\ \text{N})\vec{j} - (22.5\ \text{N})\vec{k} \end{array}}$$

مثال ۶

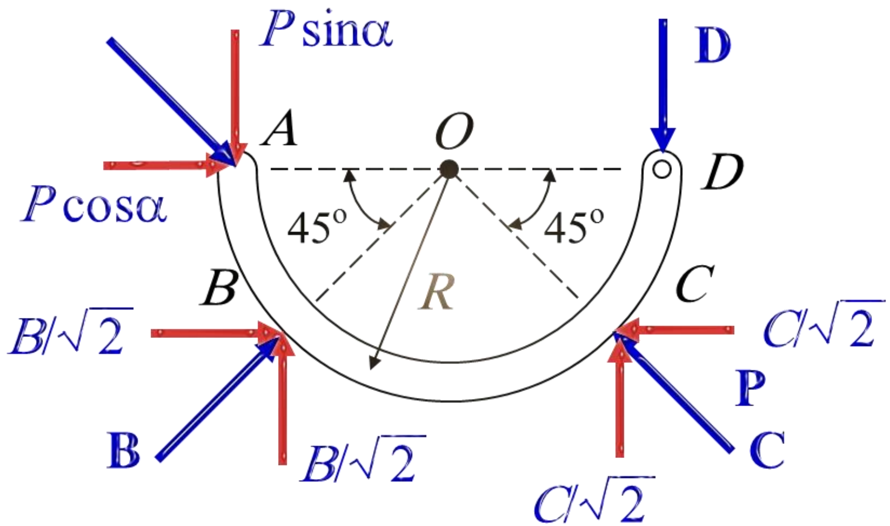
- ❑ میلهٔ نیم دایره ABCD توسط غلتکهایی در B و C و D مهار شده است.خط اثر واکنشهای این تکیه گاهها باهم زاویه 45 درجه می سازند، مطلوبست:

  - واکنش تکیه گاهی این سه تکیه گاه.



مثال ۶

✓ دیاگرام جسم آزاد میله :



✓ معادلات تعادل استاتیکی:

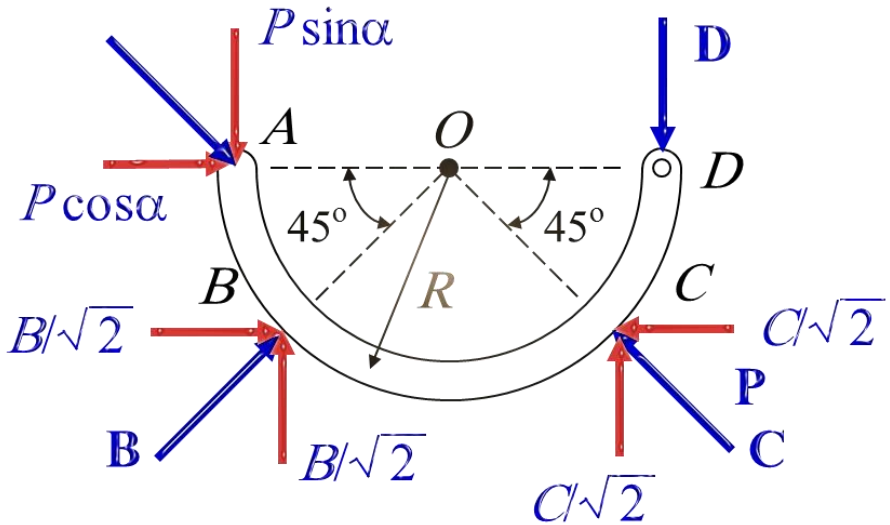
$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = 0: \quad (P\sin\alpha)\,R - D(R) = 0 \qquad D = P\sin\alpha \tag{1}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0: \quad P\cos\alpha + B/\sqrt{2} - C/\sqrt{2} = 0 \tag{2}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -P\sin\alpha + B/\sqrt{2} + C/\sqrt{2} - P\sin\alpha = 0$$

$$-2P\sin\alpha + B/\sqrt{2} + C/\sqrt{2} = 0 \tag{3}$$

مثال ۶



✓ معادلات تعادل استاتیکی:

$$(2)+(3) \qquad P(\cos\alpha - 2\sin\alpha) + 2\, B/\sqrt{2} = 0$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin\alpha - \cos\alpha)\, P \qquad (4)$$

$$(2)-(3) \qquad P(\cos\alpha + 2\sin\alpha) - 2\, C/\sqrt{2} = 0$$

$$C = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sin\alpha + \cos\alpha)\, P \qquad (5)$$

مثال ۶

✓ با حل معادلات تعادل :

$\alpha = 45^\circ$ برای

$\sin\alpha = \cos\alpha = 1/\sqrt{2}$

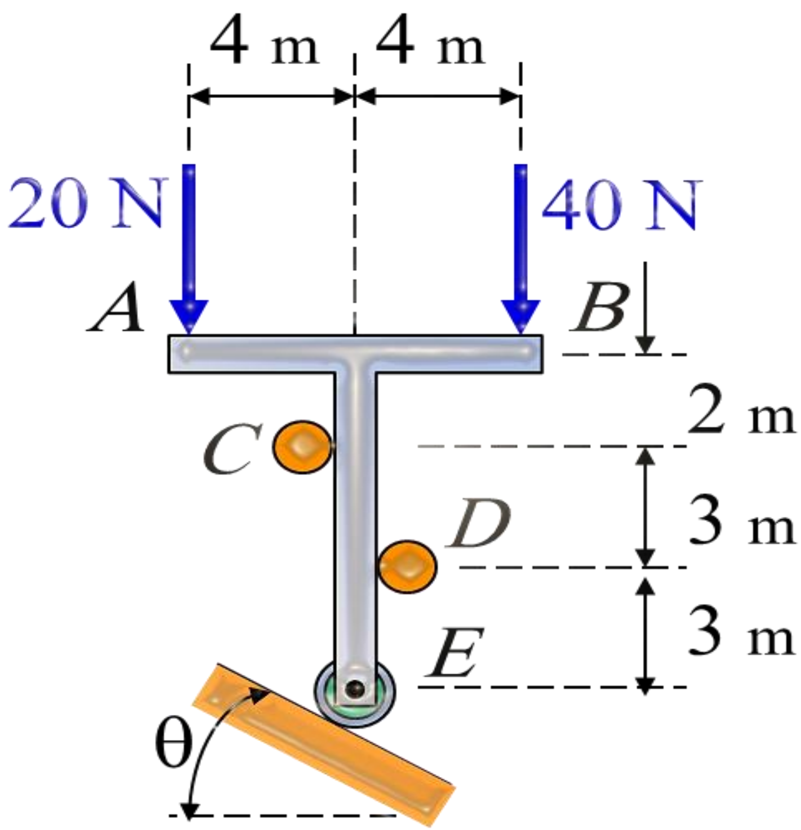
$$\text{EQ. (4)}: \quad B = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)P = \frac{1}{2}P; \qquad \boxed{\mathbf{B} = \frac{1}{2}P \angle 45^\circ}$$

$$\text{EQ. (5)}: \quad C = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)P = \frac{3}{2}P; \qquad \boxed{\mathbf{C} = \frac{3}{2}P \angle 45^\circ}$$

$$\text{EQ. (1)}: \quad D = P/\sqrt{2} \qquad \boxed{\mathbf{D} = \mathrm{P}/\sqrt{2} \downarrow}$$

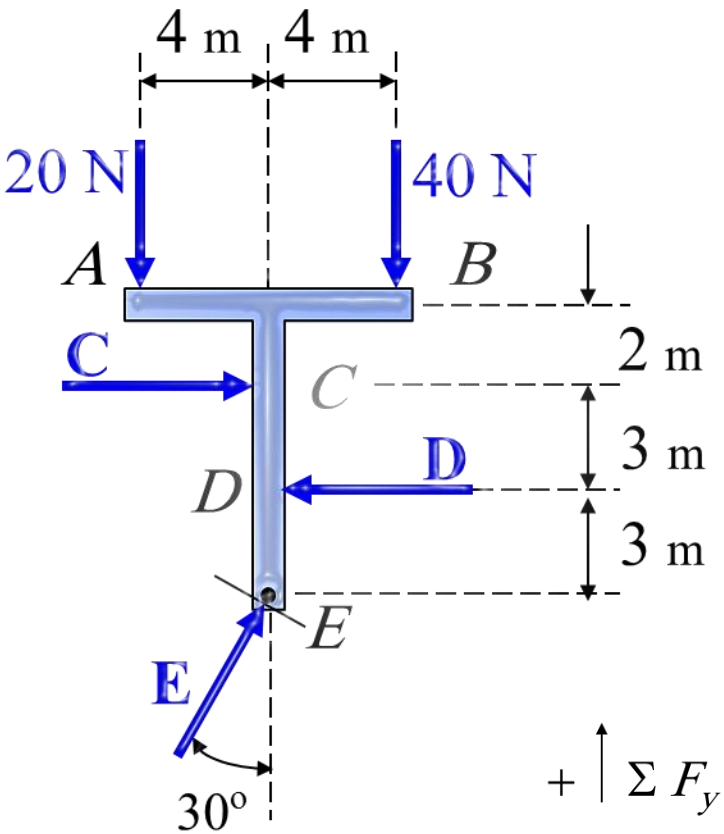
مثال ۷

- نیمرخ T شکل نشان داده شده در شکل بوسیله چرخ کوچکی در E و دو میخ چوبی درنقاط D و C حمایت میگردد.باصرفنظر از اثر اصطکاک بین چرخ و سطح، واکنشهای تکیه گاهی را در نقاط مزبور در شرایطی که زاویه θ=30º است ،تعیین نمایید.



مثال ۷

✓ دیاگرام جسم آزاد :



✓ معادلات تعادل استاتیکی:

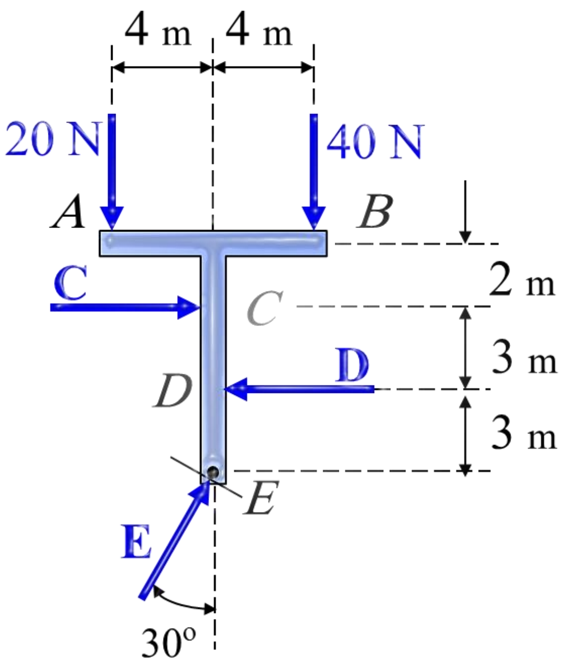
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E\cos 30^\circ - 20 - 40 = 0$$

$$E = \frac{60\text{ N}}{\cos 30^\circ} = 69.28\text{ N}$$

$$\boxed{\mathbf{E} = 69.3\text{ N} \quad \measuredangle\ 60^\circ}$$

مثال ۷

✓ معادلات تعادل استاتیکی:



$$\overset{+}{\circlearrowleft} \Sigma M_D = 0:$$

$$(20\text{ N})(4\text{ m}) - (40\text{ N})(4\text{ m}) - C(3\text{ m}) + E\sin 30^\circ\,(3\text{ m}) = 0$$

$$-80 - 3C + 69.28\,(0.5)(3) = 0$$

$$C = 7.974\text{ N} \qquad \boxed{\mathbf{C} = 7.97\text{ N} \longrightarrow}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0:$$

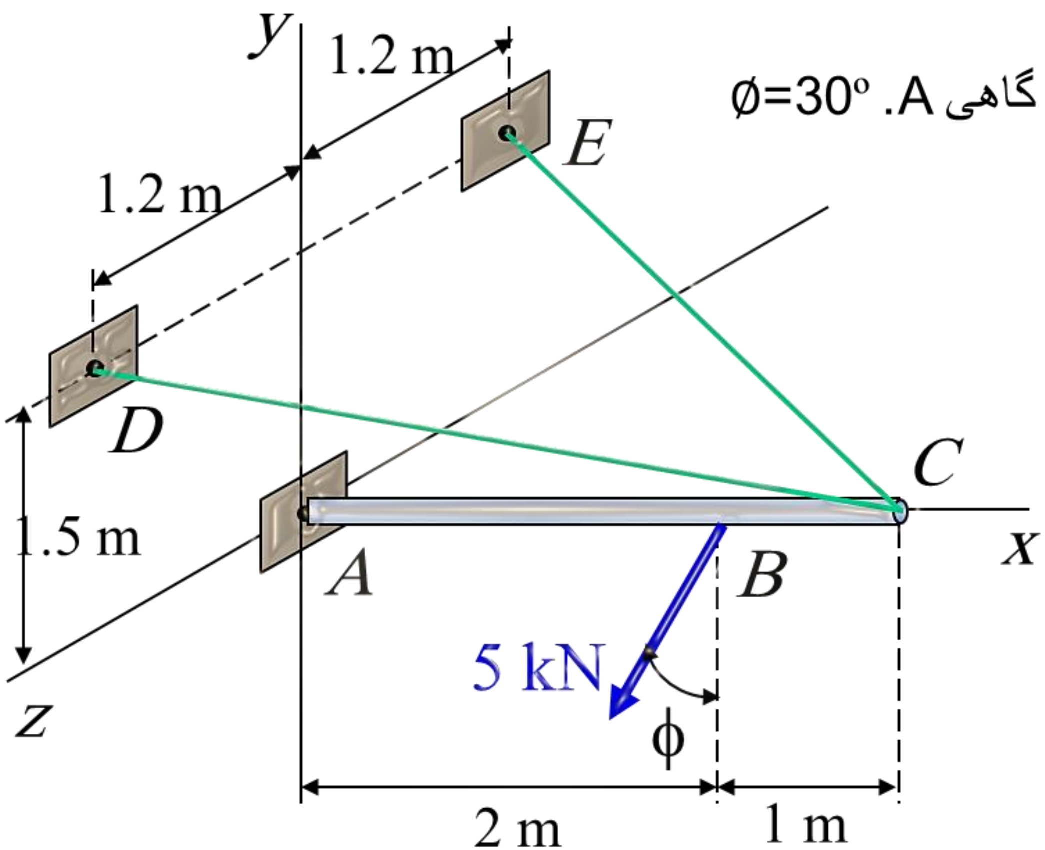
$$E\sin 30^\circ + C - D = 0$$

$$(69.28\text{ N})(0.5) + 7.974\text{ N} - D = 0$$

$$\boxed{\mathbf{D} = 42.6\text{ N} \longleftarrow}$$

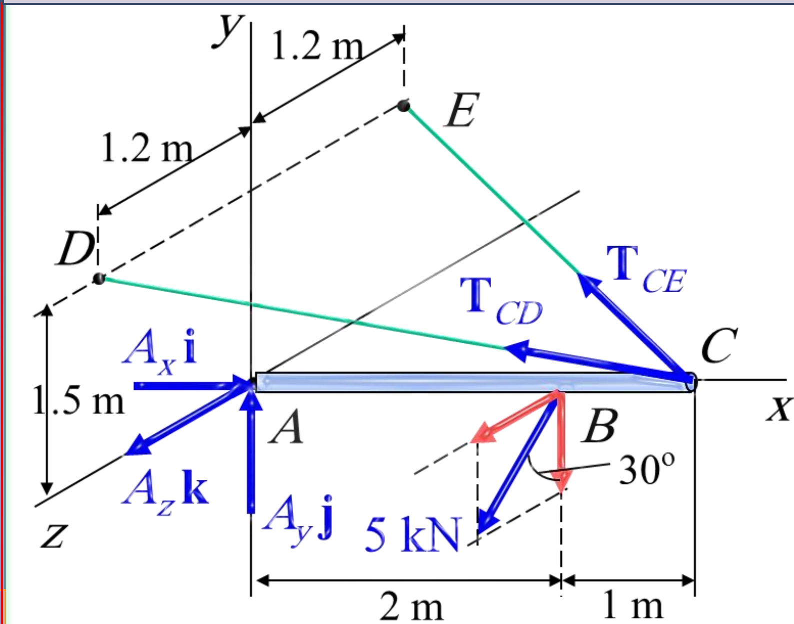
مثال ۸

- میله AC بوسیله یک توپی در انتهای خود به دیوار متصل است وتوسط دو کابل مهار شده است با توجه به شرایط بارگذاری نشان داده شده،مطلوبست :



- کشش موجود در کابلها و واکنش تکیه گاهی A. $\phi=30^{o}$

مثال ۸



- ✓ دیاگرام جسم آزاد :
- ✓ معادلات تعادل استاتیکی شش و مجهولات پنج مورد می باشد.اما گشتاور در AC صفر است:

$$\Sigma M_{AC} = 0$$

$$r_{B/A} = 2\,i \qquad r_{C/A} = 3\,i$$

بار در B, $\mathbf{F}_B = -(5\cos 30^\circ)\,\mathbf{j} + (5\sin 30^\circ)\,\mathbf{k} = -4.33\,\mathbf{j} + 2.5\,\mathbf{k}$

$$\overrightarrow{CD} = -3\,\mathbf{i} + 1.5\,\mathbf{j} + 1.2\,\mathbf{k} \qquad CD = 3.562\text{ m}$$

$$\mathbf{T}_{CD} = T_{CD}\,\frac{\overrightarrow{CD}}{CD} = \frac{T_{CD}}{3.562}\,(-3\,\mathbf{i} + 1.5\,\mathbf{j} + 1.2\,\mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}_{CE} = T_{CE}\,\frac{\overrightarrow{CE}}{CE} = \frac{T_{CD}}{3.562}\,(-3\,\mathbf{i} + 1.5\,\mathbf{j} - 1.2\,\mathbf{k})$$

مثال ۸

$$\Sigma M_A = 0: \quad \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{T}_{CD} + \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{T}_{CE} + \mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1.5 & 1.2 \end{vmatrix} \frac{T_{CD}}{3.562} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1.5 & -1.2 \end{vmatrix} \frac{T_{CE}}{3.562} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4.33 & 2.5 \end{vmatrix} = 0$$

✓ ضرایب بردارهای واحد برابر صفر:

$$\mathbf{j}: -3.6\frac{T_{CD}}{3.562} + 3.6\frac{T_{CE}}{3.562} - 5 = 0$$

$$-3.6\ T_{CD} + 3.6\ T_{CE} - 17.81 = 0 \qquad (1)$$

$$\mathbf{k}: \ 4.5\frac{T_{CD}}{3.562} + 4.5\frac{T_{CE}}{3.562} - 8.66 = 0$$

$$4.5\ T_{CD} + 4.5\ T_{CE} = 30.85 \qquad (2)$$

$$\boxed{T_{CE} = 5.90 \text{ kN}}$$

$$\boxed{T_{CD} = 0.954 \text{ kN}}$$

مثال ۸

✓ معادلات تعادل استاتیکی :

$$\Sigma F = 0: \; A + T_{CD} + T_{CE} + F_B = 0$$

$$\mathbf{i}: \quad A_x + \frac{0.954}{3.562}(-3) + \frac{5.902}{3.562}(-3) = 0$$

$$A_x = 5.77 \text{ kN}$$

$$\mathbf{j}: \quad A_y + \frac{0.954}{3.562}(1.5) + \frac{5.902}{3.562}(1.5) - 4.33 = 0 \qquad A_y = 1.443 \text{ kN}$$

$$\mathbf{k}: \quad A_z + \frac{0.954}{3.562}(1.2) + \frac{5.902}{3.562}(-1.2) + 2.5 = 0 \qquad A_z = -0.833 \text{ kN}$$

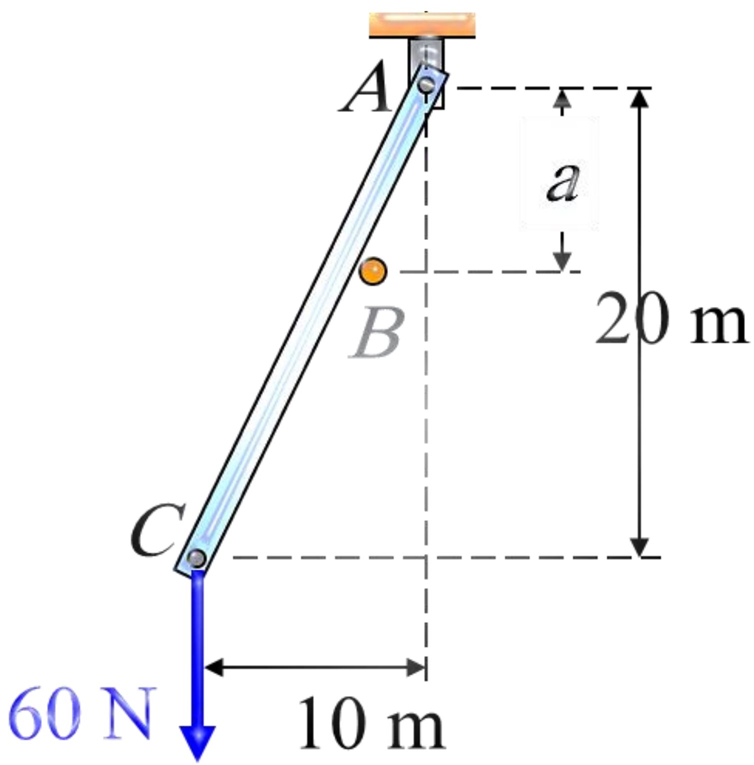
A = (5.77 kN) i + (1.443 kN) j - (0.833 kN) k

مثال ۹

- ❑ میله AC بصورت مفصلی در A و در B روی یک میخ چوبی تکیه دارد،باصرفنظر از اثرات اصطکاک مطلوبست:

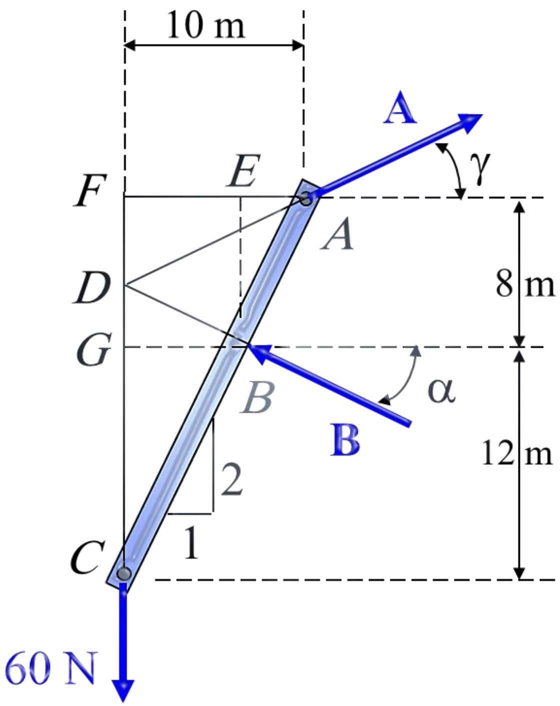
i. واکنش تکیه گاهی در A و B وقتی a=8m است.

ii. اگر واکنش تکیه گاهی در A فقط افقی باشد،مقدار a چقدر است؟ بزرگی واکنشهای تکیه گاهی را نیز تعیین کنید.



مثال ۹

.i a = 8 m



✓ دیاگرام جسم آزاد :

$$AE = EB = \frac{1}{2}(8) = 4\ \text{m}$$

$$EF = BG = 10 - 4 = 6\ \text{m}$$

$$DG = \frac{1}{2} BG = \frac{1}{2}(6) = 3\ \text{m}$$

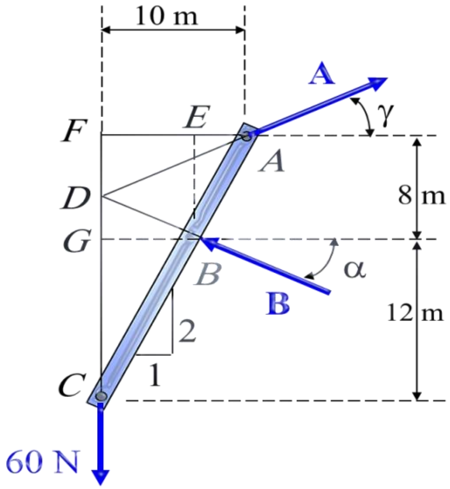
$$FD = FG - DG = 8 - 3 = 5\ \text{m}$$

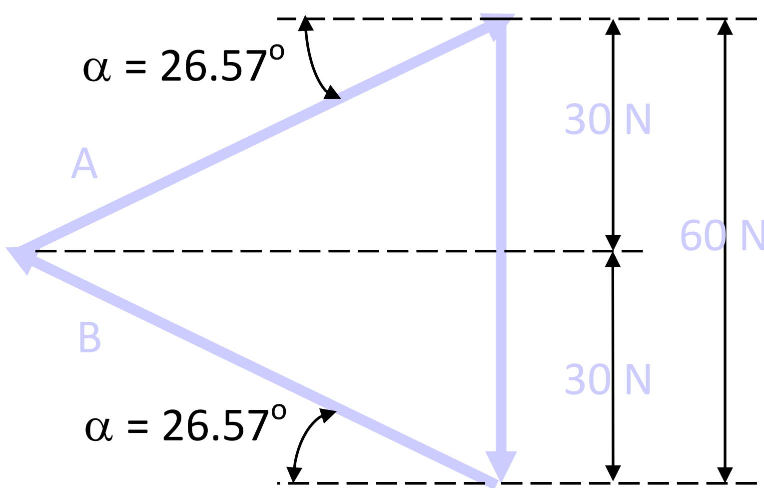
$$\tan \gamma = \frac{FD}{AF} = \frac{5}{10} \; ; \qquad \gamma = 26.57^{o}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 26.57^{o}$$

مثال ۹





$$A = B = \frac{30\ \text{N}}{\sin 26.57^{o}} = 67.08\ \text{N}$$

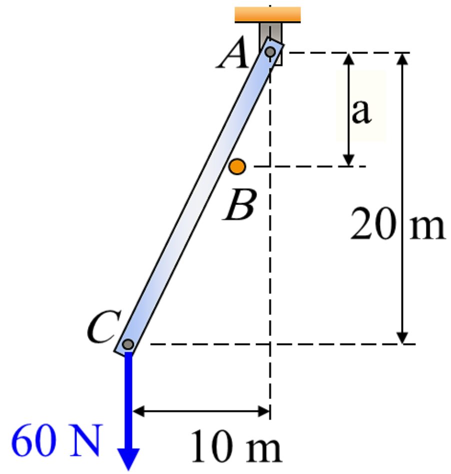
$\boxed{A = 67.1\ \text{N}}$ 26.6°

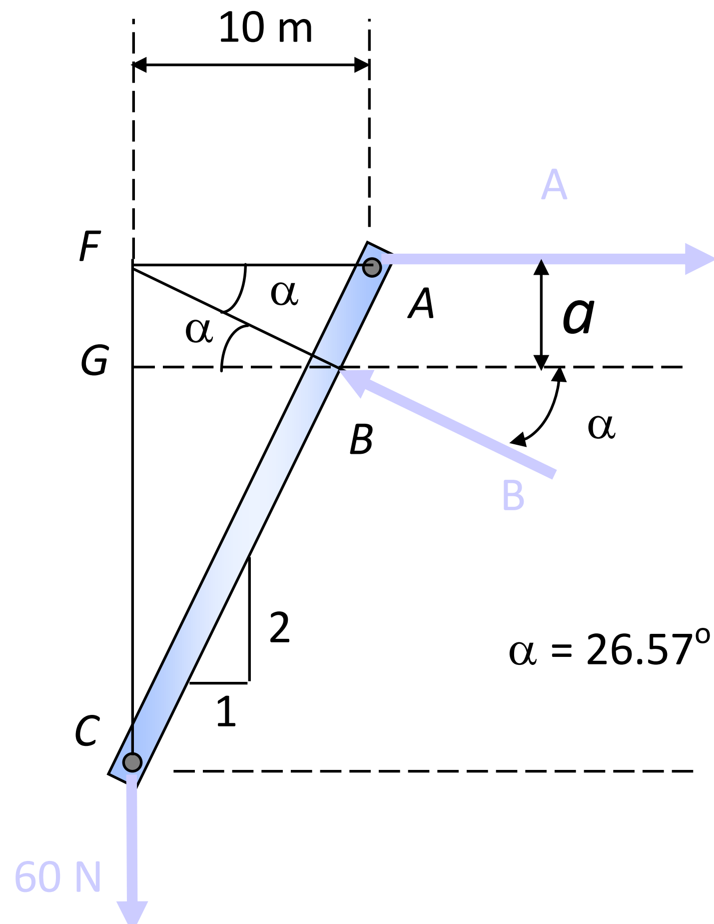
$\boxed{B = 67.1\ \text{N}}$ 26.6°

مثال ۹

ii. وقتی واکنش در تکیه گاه A افقی است.

✓ دیاگرام جسم آزاد :





$\Delta\, ABF: \quad BF = AF \cos\alpha$

$\Delta\, BFG: \quad FG = BF \sin\alpha$

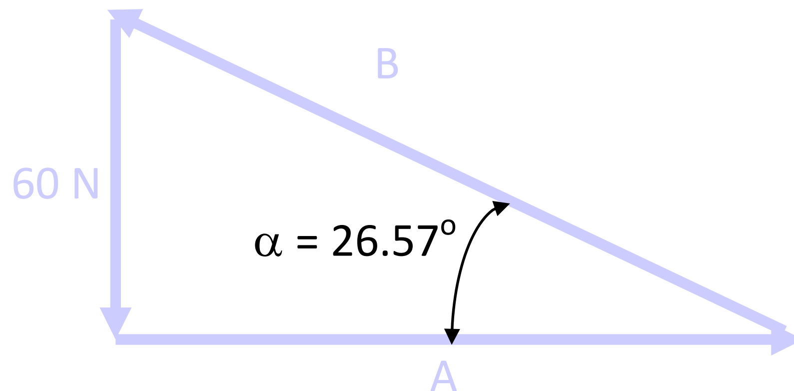
$a = FG = AF \cos\alpha \sin\alpha$

$a = (10\text{ m}) \cos 26.57^{\circ} \sin 26.57^{\circ}$

$a = 4.00\text{ m}$

مثال ۹

✓ بزرگی واکنشهای تکیه گاهی:



$$A = \frac{60\ \text{N}}{\tan\alpha} = 120\ \text{N} \qquad \boxed{A = 120.0\ \text{N} \rightarrow}$$

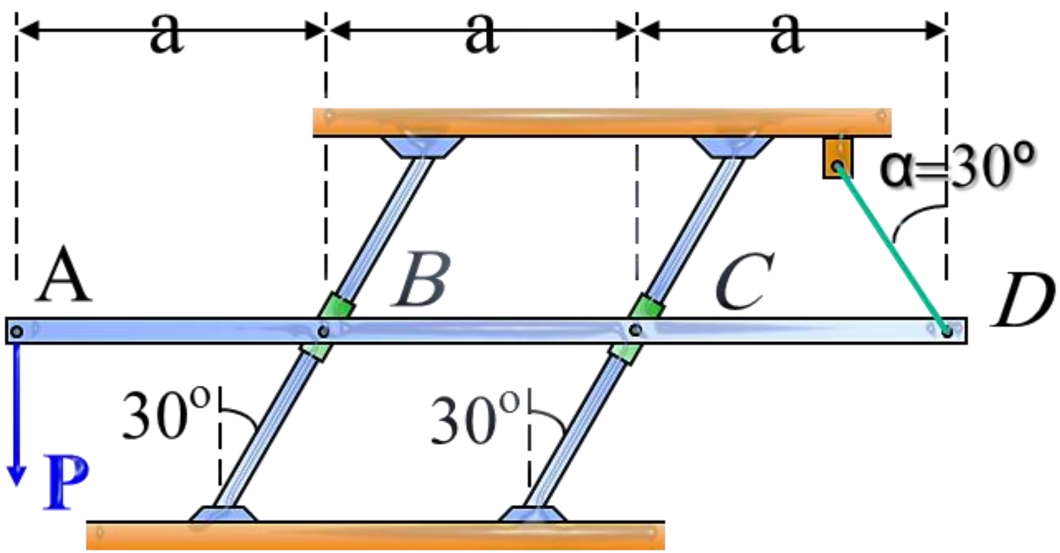
$$B = \frac{60\ \text{N}}{\sin\alpha} = 134.16\ \text{N} \qquad \boxed{B = 134.2\ \text{N} \;\angle\; 26.6^\circ}$$

مثال ۱۰

- میله AD در نقاط B و C توسط حلقه به میله ای متصل شده است که فقط حرکت را درامتداد میله میسر میسازد.(سیستم حلقه و میله بدون اصطکاک) میله AD در A تحت بار P قرار می گیرد ودرD توسط یک کابل مهار می شود.مطلوبست:

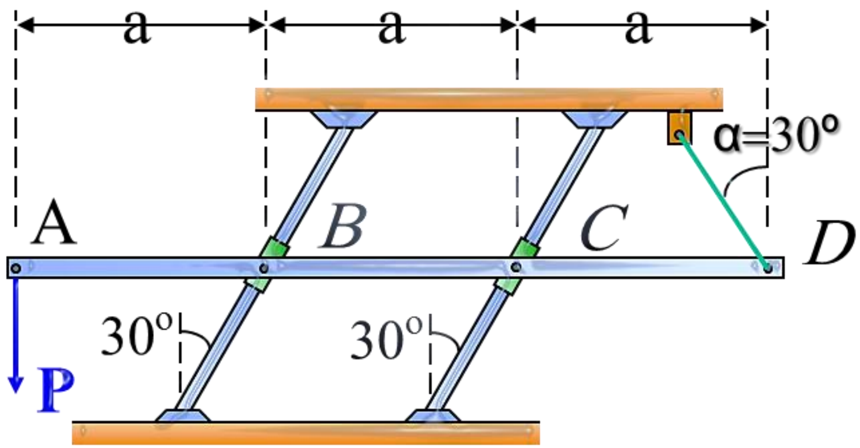
I. بزرگی نیروی کششی در کابل.

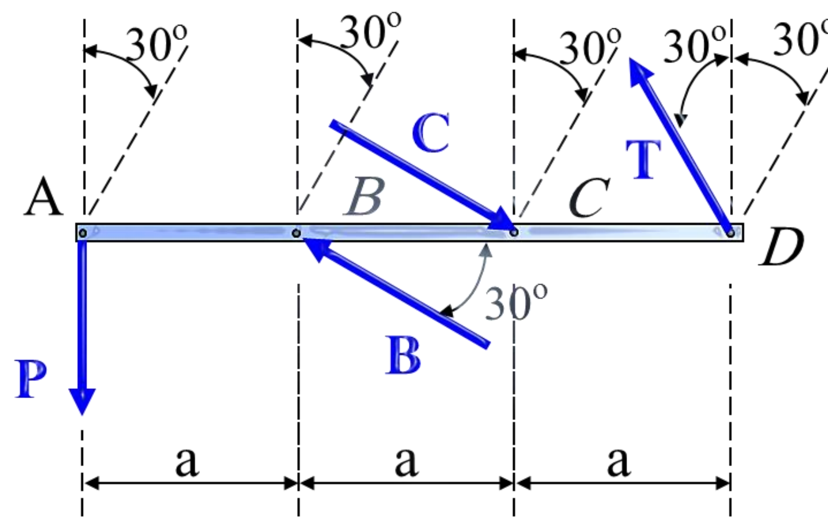
II. واکنش در B و C.



مثال ۱۰

✓ دیاگرام جسم آزاد :





✓ نوشتن معادلات تعادل وحل مجهولات:

$$30^\circ \nearrow \quad \Sigma F = 0: \quad -P\cos 30^\circ + T\cos 60^\circ = 0$$

$$T = P\frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = P\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}$$

$$\boxed{T = \sqrt{3}\,P}$$

Meysam4366@yahoo.com

مثال ۱۰

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad P\,a - (C \sin 30^o)\,a + T \cos 30^o\,(2a) = 0$$

$$P\,a - \left(\frac{1}{2}C\right)a + \sqrt{3}\,P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)2a = 0$$

$$-\frac{1}{2}C + (1+3)\,P = 0; \qquad C = 8\,P \qquad \boxed{\mathbf{C} = 8\,P \quad \searrow 30^o}$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F = 0: \quad -B \cos 30^o + C \cos 30^o - T \sin 30^o = 0$$

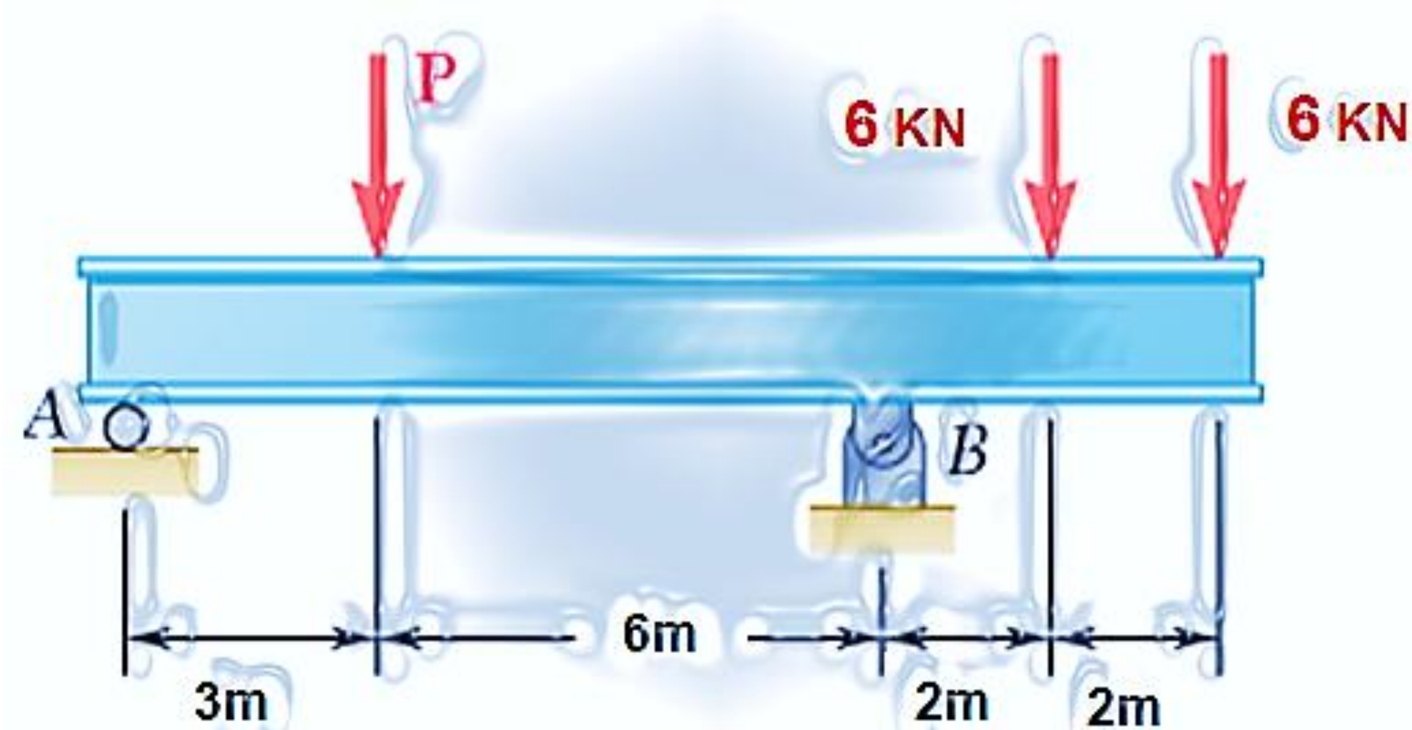
$$-B\frac{\sqrt{3}}{2} + 8\,P\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,P\left(\frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$B = 7\,P \qquad \boxed{\mathbf{B} = 7\,P \quad \nwarrow 30^o}$$

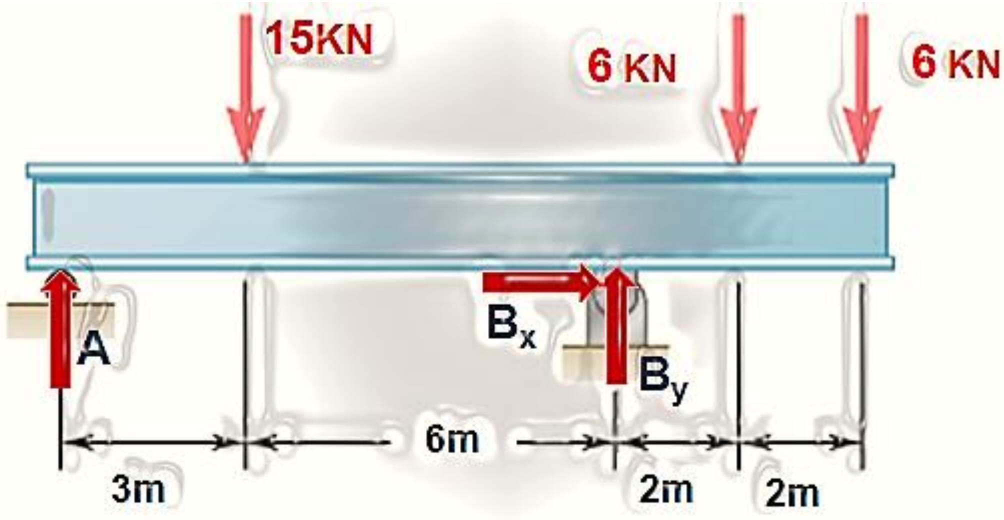
مثال ۱۱

❑ روی تیر AB سه بار مانند شکل اثر می کنند.اگر از وزن تیر صرفنظر شود.مطلوبست:

▪ واکنش تکیه گاهی در A و B وقتی P=15KN است.



مثال ۱۱



✓ نوشتن معادلات تعادل :

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\boxed{B_x = 0}$$

✓ می توان هم از معادلات ΣF_yوهم از معادلات ΣM به واکنشهای تکیه گاهی رسید:

$$\sum \vec{M}_A = 0$$

$$(-15\ \text{KN})(3\ \text{m}) + B_y(9\ \text{m}) - (6\ \text{KN})(11\ \text{m}) - (6\ \text{KN})(13\ \text{m}) = 0$$

$$\boxed{B_y = 21.0\ \text{KN}}$$

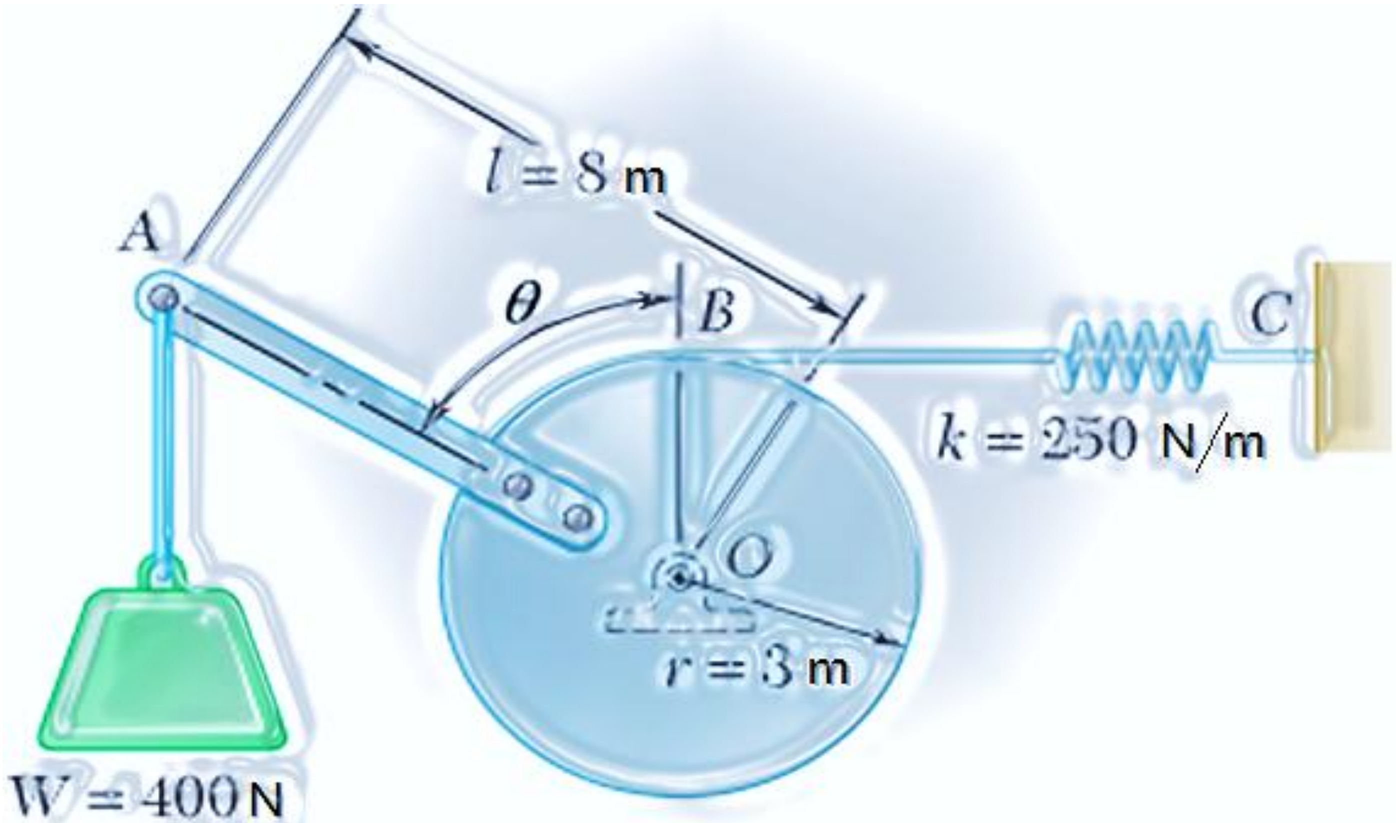
$$\sum \vec{M}_B = 0$$

$$-A(9\ \text{m}) + (15\ \text{KN})(6\ \text{m}) - (6\ \text{KN})(2\ \text{m}) - (6\ \text{KN})(4\ \text{m}) = 0$$

$$\boxed{A = 6.00\ \text{KN}}$$

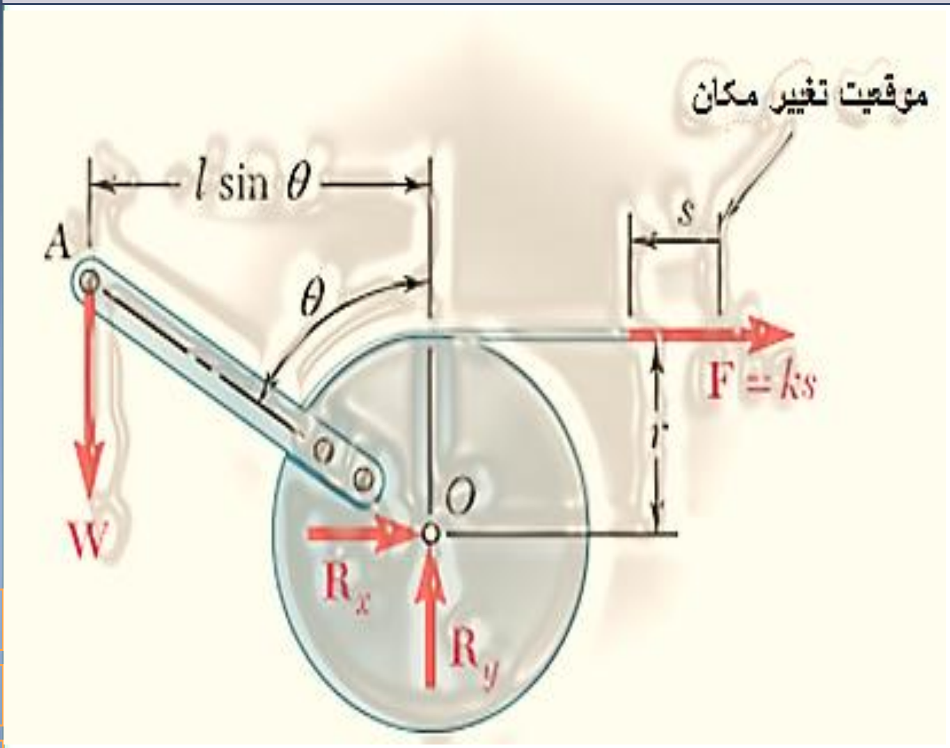
مثال ۱۲

- وزنه 400N به اهرمی در نقطه A متصل است.اهرم نیز به صفحه دایره ای شکلی که به یاتاقان O و فنر BC به سختی 250N/m متصل است،مطلوبست:
  - زاویه θ در حالت تعادل.



مثال ۱۲

✓ معادله تعادل ΣM حول نقطه O :



$$s = r\theta$$

$$F = ks = kr\theta$$

$$\sum M_0 = 0$$

$$Wl \sin \theta - r(kr\theta) = 0$$

$$\sin \theta = \frac{kr^2}{Wl}\theta = \frac{250 * 3^2}{400 * 8}\theta$$

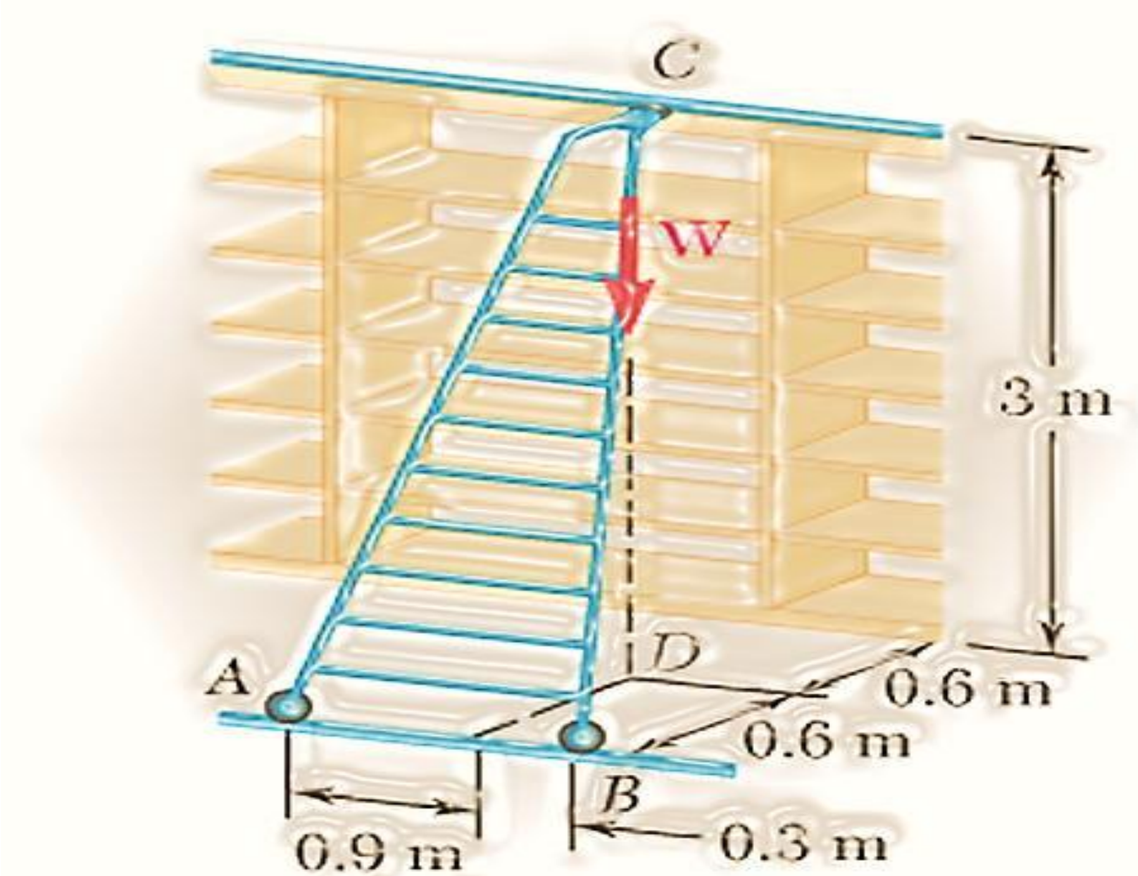
$$\sin \theta = 0.703\theta$$

$$\theta = 80.3^0, \quad 0^0$$

مثال ۱۳

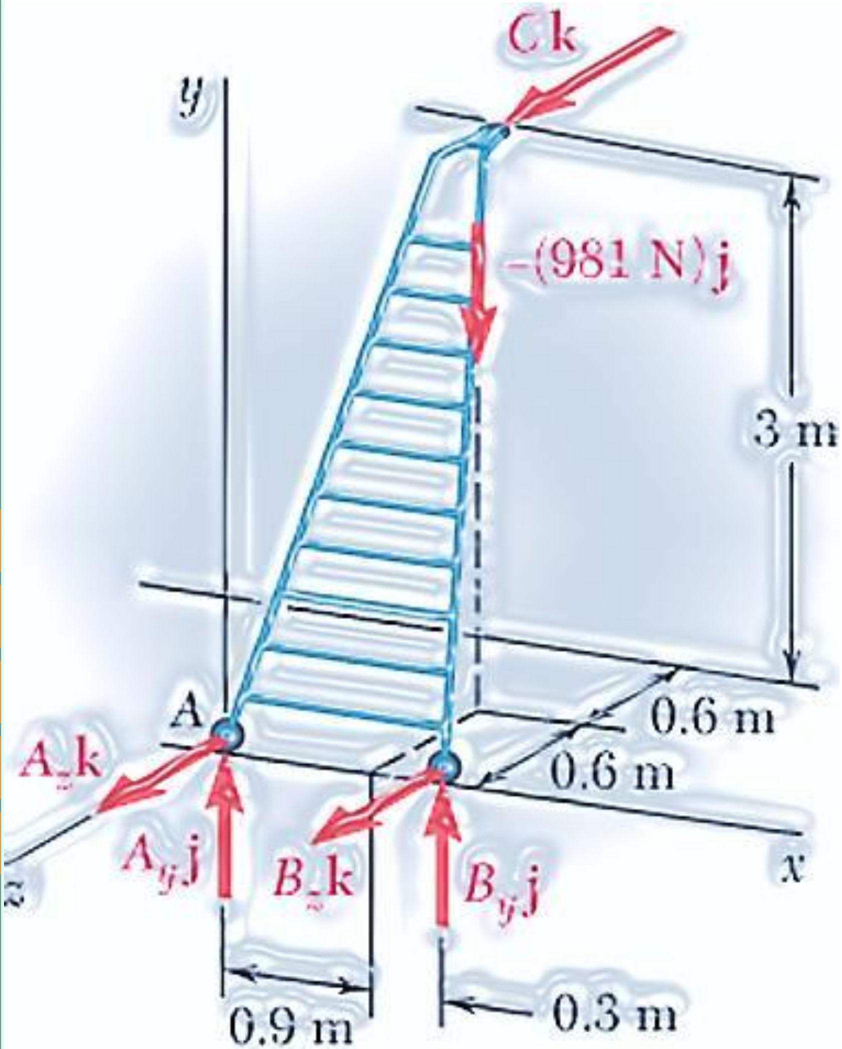
- نردبانی 20kg برای دسترسی به قفسه های کتاب درکتابخانه مورد استفاده قرار می گیرد.نردبان در Aو B توسط دو چرخ روی ریل و یک چرخ مهار شده در ریل در نقطه C تکیه دارد،اگر وزن کتابدار 80kg باشد،مطلوبست:

  - واکنشهای تکیه گاهی ،وقتی کتابدار روی نردبان است.(W در مرکز جرم وارد شده است)



مثال ۱۲

- ✓ دیاگرام واکنشها:



- ✓ باحل پنج معادله برای مجهولات می توان به جوابها رسید و پنج مجهول را بدست آورد:

$$W = -m g\vec{j} = -(80+20)(9.81)\vec{j} = -981\vec{j}$$

$$\sum F = 0$$

$$A_y\vec{j} + A_z\vec{k} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k} - 981\vec{j} + C\vec{k} = 0$$

$$A_y + B_y - 981 = 0$$

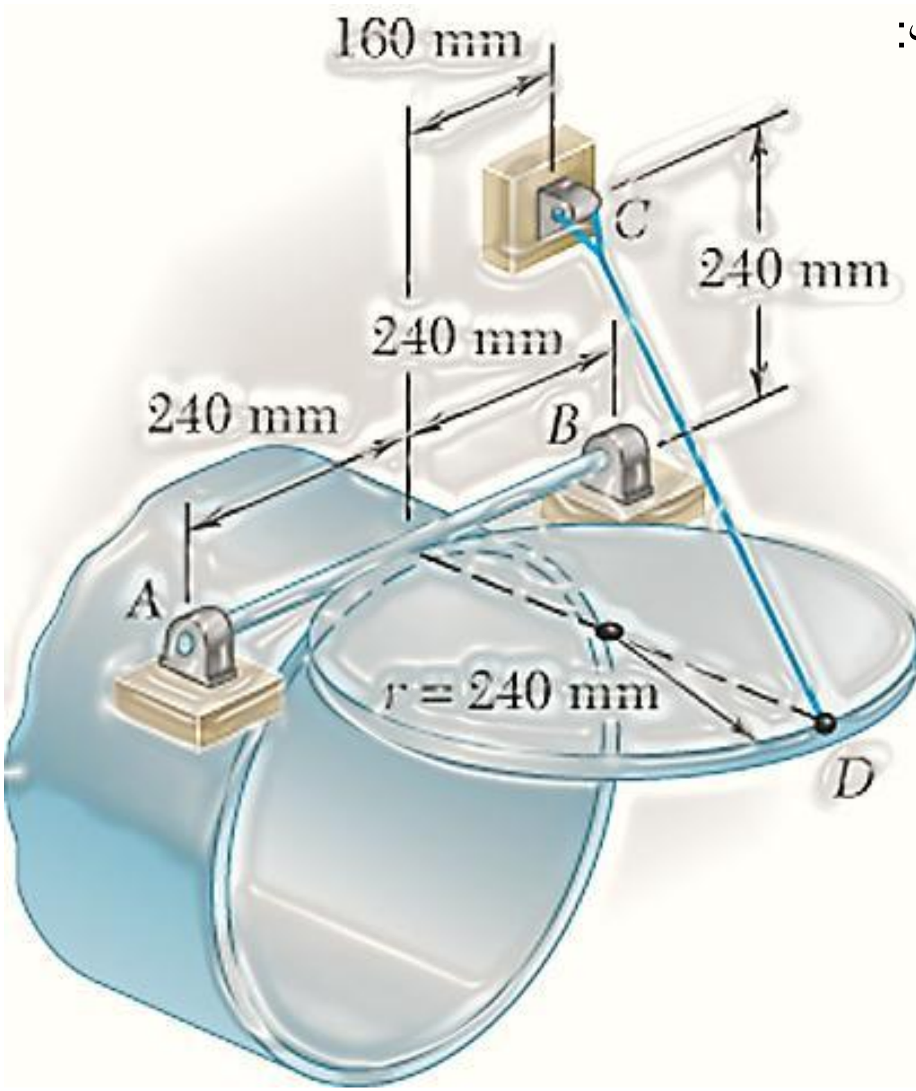
$$A_z + B_z + C = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$1.2\vec{i} \times \left(B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right) + \left(0.9\vec{i} - 0.6\vec{k}\right) \times \left(-981\vec{j}\right)$$
$$+ \left(0.6\vec{i} + 3\vec{j} - 1.2\vec{k}\right) \times \left(C\vec{k}\right) = 0$$

مثال ۱۳

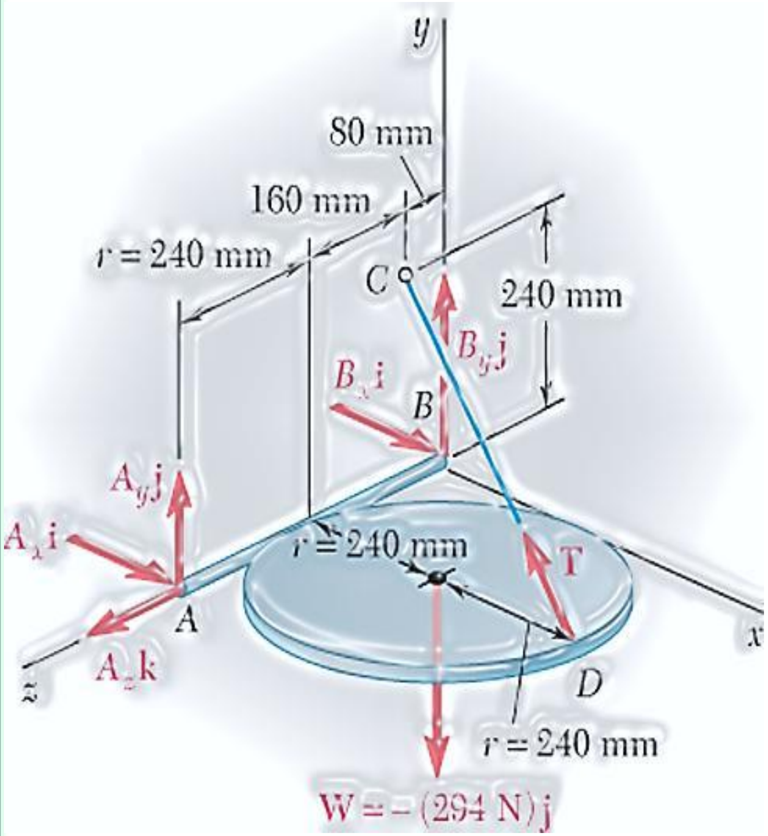
❑ درپوش یک لوله به شعاع 240mm و وزن 30kg توسط محور AB وکابل CD مهار شده است،مطلوبست:



- واکنشهای تکیه گاه A و B و کشش موجود در کابل.

مثال ۱۳

✓ دیاگرام واکنشها:



$$W = -mg\vec{j} = -(30)(9.81)\vec{j} = -294\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{DC} = -480\vec{i} + 240\,\vec{j} - 160\vec{k}$$

$$DC = 560\,mm$$

$$\vec{T} = T\frac{\overrightarrow{DC}}{DC} = -\frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{2}{7}\vec{k}$$

$$\sum F = 0$$

$$A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} + B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + \vec{T} - 294\vec{j} = 0$$

$$\left(A_x + B_x - \frac{6}{7}T\right)\vec{i} + \left(A_y + B_y + \frac{3}{7}T - 294\right)\vec{j}$$

$$\left(A_z - \frac{2}{7}T\right)\vec{k} = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

$$2r\vec{k} \times \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) + \left(2r\vec{i} + r\vec{k}\right) \times \left(-\frac{6}{7}T\vec{i} + \frac{3}{7}T\vec{j} - \frac{2}{7}T\vec{k}\right)$$

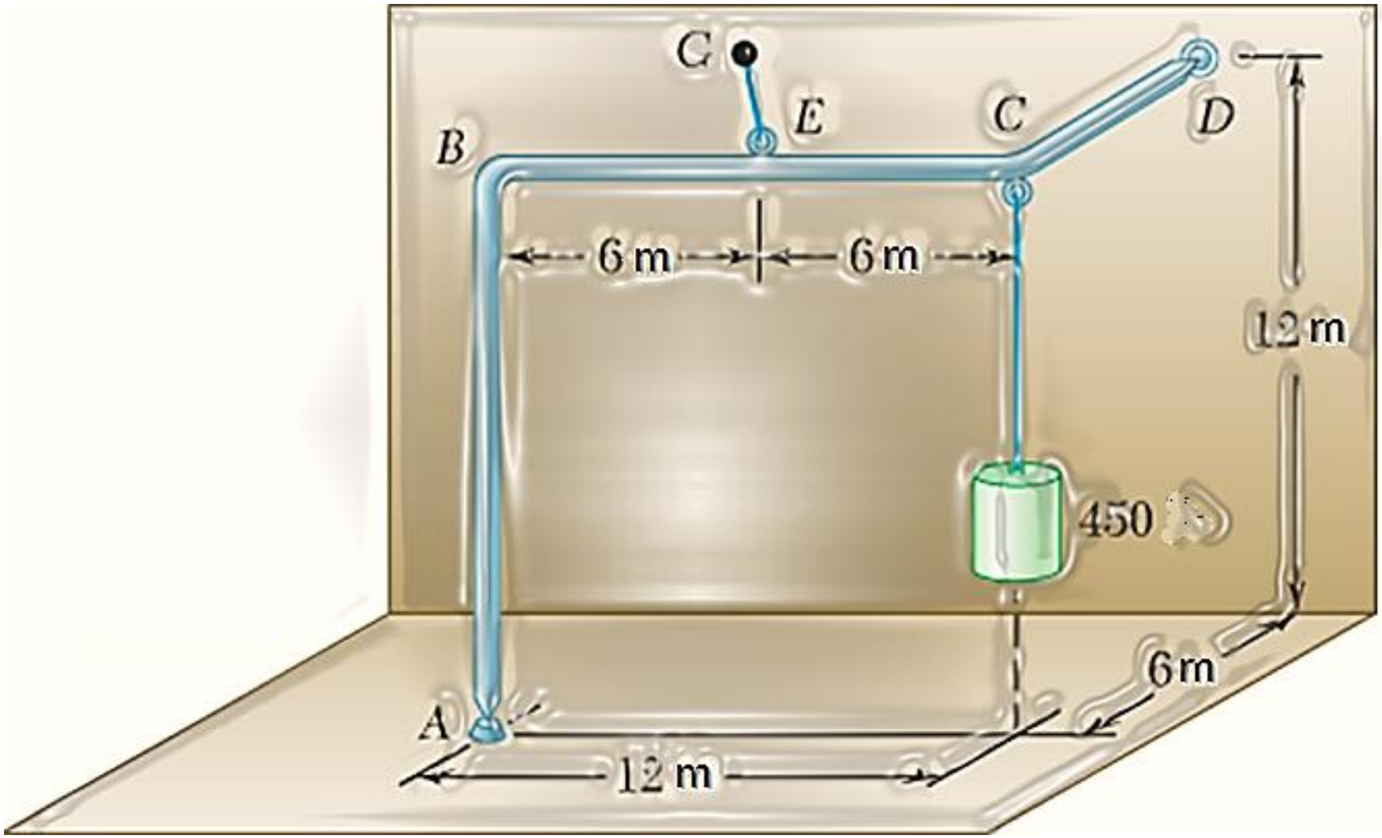
$$+\left(r\vec{i} + r\vec{k}\right) \times \left(-294\vec{k}\right) = 0$$

✓ باحل شش معادله برای مجهولات می توان به جوابها رسید و شش مجهول را بدست آورد:

مثال ۱۴

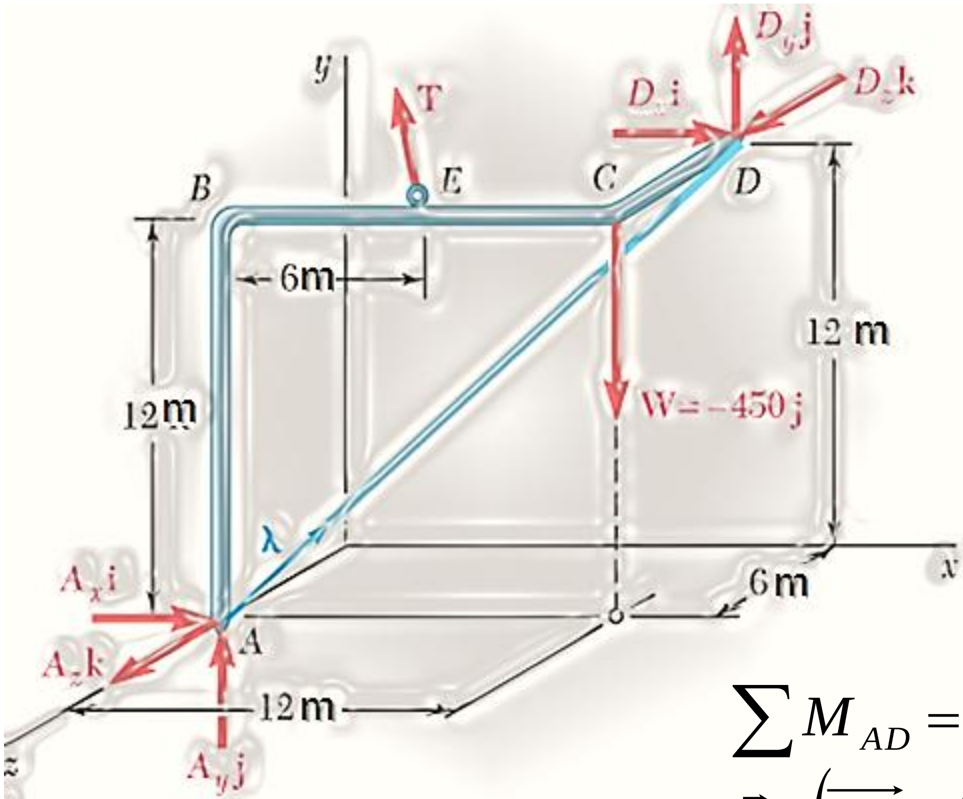
- وزنه 450N توسط سیمی به نقطه C از قاب صلب ABCD متصل است.قاب در A و D با سیستم حفره و توپی به تکیه گاه متصل است ،علاوه برآن در نقطه E با یک کابل مهار شده است،مطلوبست:

  - تعیین نقطه ای که حداقل میزان کشش به کابل GE وارد می شود.



مثال ۱۴

✓ دیاگرام واکنشها:



$$\sum M_{AD} = 0$$

$$\vec{\lambda} \bullet \left(\overrightarrow{AE} \times \vec{T} \right) + \vec{\lambda} \bullet \left(\overrightarrow{AC} \times \vec{W} \right) = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \times \vec{W} = \left(12\vec{i} + 12\vec{j} \right) \times \left(-450\vec{j} \right) = -5400\vec{k}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \frac{12\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k}}{18}$$

مثال ۱۴

$$\vec{\lambda} \bullet \left(\overrightarrow{AE} \times \vec{T}\right) = \left(\frac{12\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k}}{18}\right) \bullet \left(-5400\vec{k}\right) = -1800$$

$$\vec{\lambda} \bullet \left(\overrightarrow{AE} \times \vec{T}\right) = \vec{T} \bullet \left(\vec{\lambda} \times \overrightarrow{AE}\right)$$

$$T\left(\frac{12\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k}}{18}\right) \bullet \left[\left(\frac{12\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k}}{18}\right) \times \left(6\vec{i} + 12\vec{j}\right)\right] = -1800$$

$$6T = -1800$$

$$\boxed{T_{\min} = -200\vec{i} + 100\vec{j} - 200\vec{k}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EG} = (x-6)\vec{i} + (y-12)\vec{j} + (0-6)\vec{k}}$$

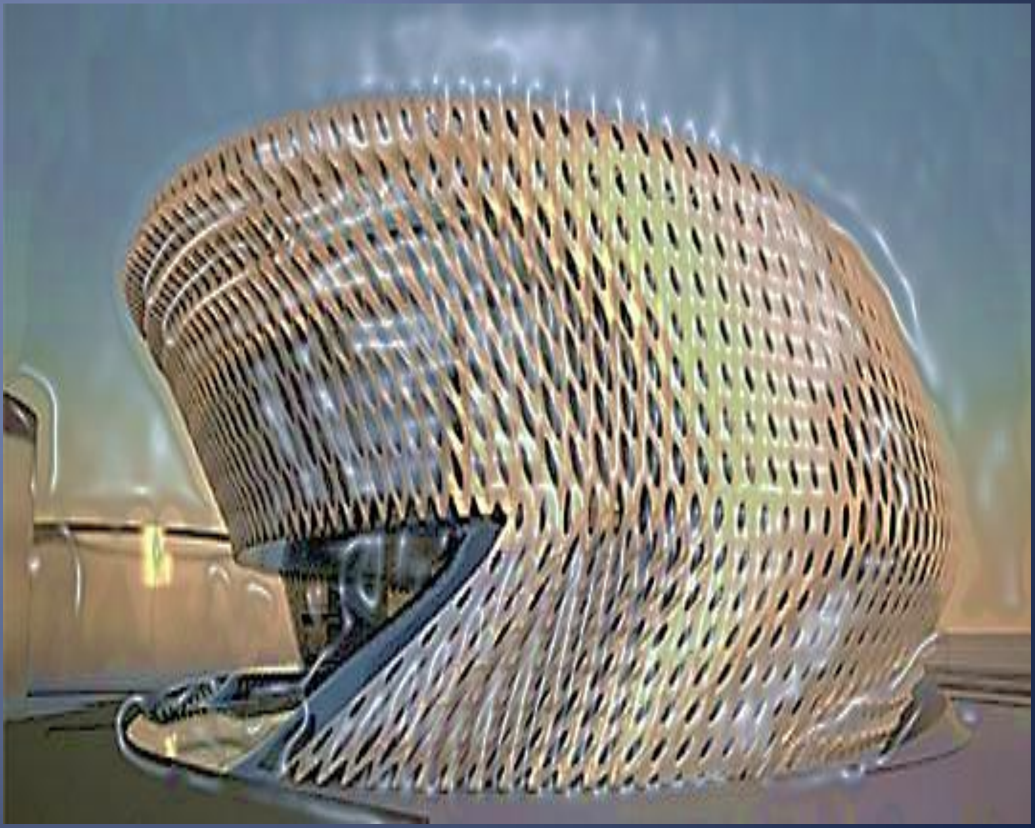
x=0, y=15 m

5

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

By : Eng. Meysam B



نيروهاي گسترده؛

مركزهاي هندسي ومركزهاي گراني

- زمین نیروی گرانشی خود را به نقطه ای از ذره وارد می کند،که به آن مرکز ثقل ذره گویند.در یک جسم یا سازه برآیند تمام مراکز ثقل ذرات یک نیرو است که به مرکز جرم جسم یا سازه وارد می شود.

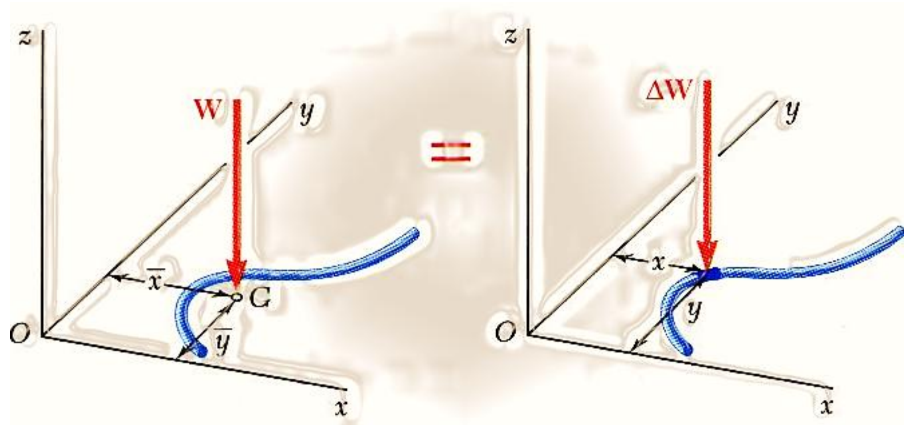
- مرکز سطح یک مساحت شبیه مرکز ثقل یک جسم است و مفهوم گشتاور اول سطح به این موضوع اشاره دارد.در واقع کل مساحت جسم در مرکز سطح متمرکز است.

- گشتاورهای اول یک سطح نسبت به هریک از محورهای مرکزی آن باید مساوی صفر باشد

- تعیین این نقطه در سطح و یا حجم از جسمی با تئوری پاپوس-گلدینوس (Theorems of Pappus-Guldinus) انجام گرفته است.

مرکز ثقل اجسام دو بعدی

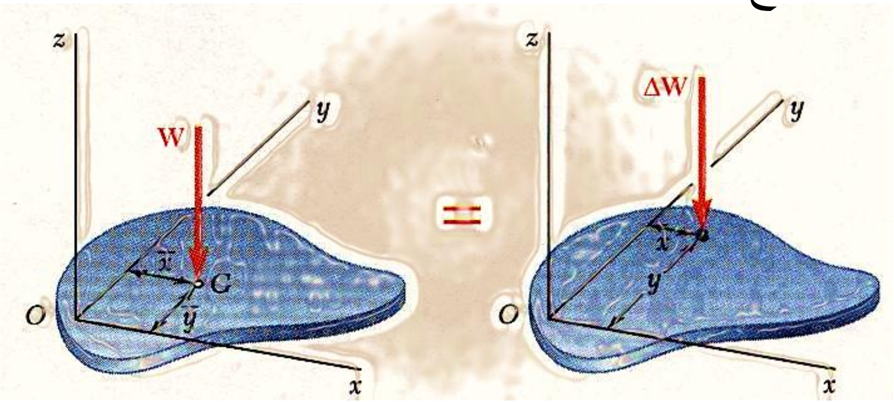
• مرکز ثقل در یک مفتول



$$\sum M_y \quad \bar{x}W = \sum x\Delta W = \int x\,dW$$

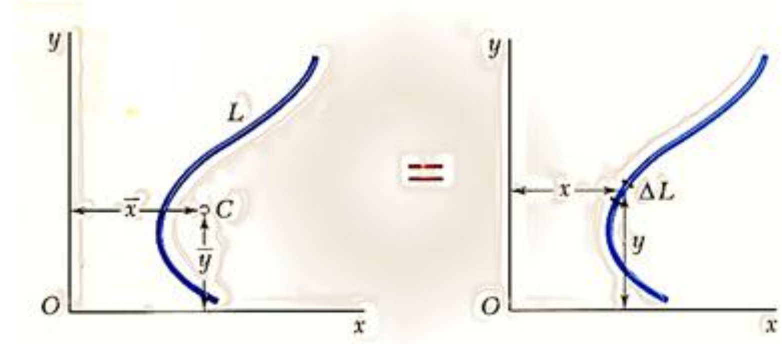
$$\sum M_y \quad \bar{y}W = \sum y\Delta W = \int y\,dW$$

• مرکز ثقل در یک سطح



مرکزثقل و گشتاور اول سطوح و خطوط

- مرکز ثقل یک سیم



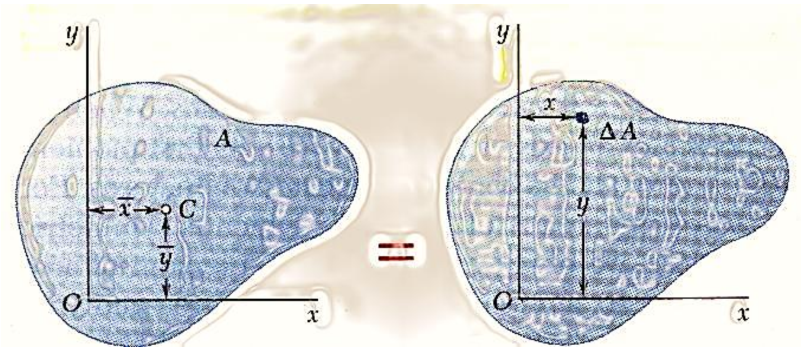
$$\bar{x}W = \int x\,dW$$

$$\bar{x}(\gamma La) = \int x(\gamma a)dL$$

$$\bar{x}L = \int x\,dL$$

$$\bar{y}L = \int y\,dL$$

- مرکز ثقل یک سطح



$$\bar{x}W = \int x\,dW$$

$$\bar{x}(\gamma At) = \int x(\gamma t)dA$$

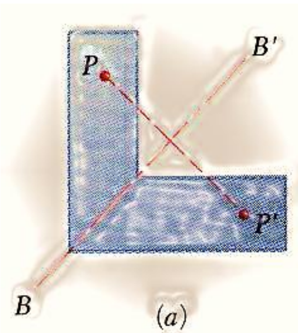
$$\bar{x}A = \int x\,dA = Q_y$$

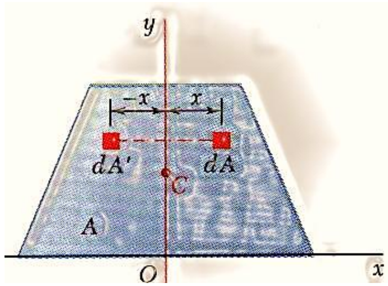
$= y$ گشتاور اول مرتبط با

$$\bar{y}A = \int y\,dA = Q_x$$

$= x$ گشتاور اول مرتبط با

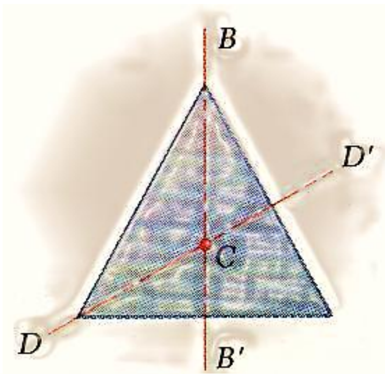
گشتاور اول سطوح و خطوط





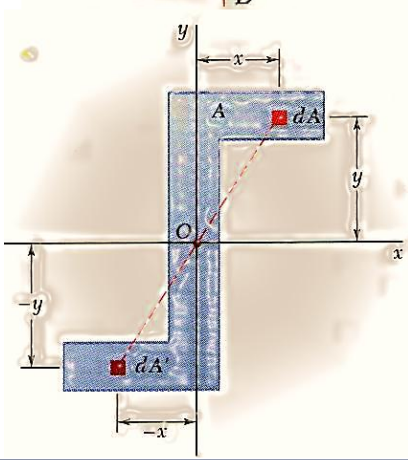
- سطحی متقارن است که درآن برای نقطه ای مانند P نسبت به محورBB' نقطه ای مانند P' وجود داشته باشد طوریکه اگر آن سطح را حول محور تا کنیم و دو قسمت برابر بدست آوریم ،نقطه P روی نقطه P' قرار گیرد.

- گشتاور اول یک سطح نسبت به خط تقارن برابر صفر است.



- اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد مرکزسطح آن روی همان محور خواهد بود.

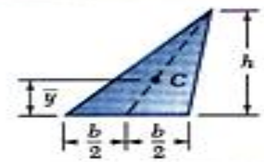
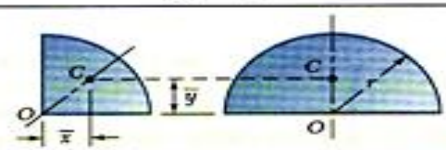
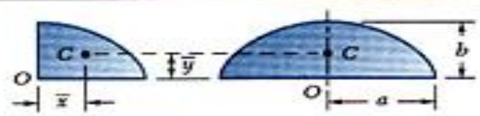
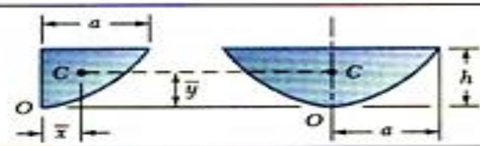
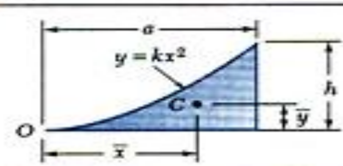
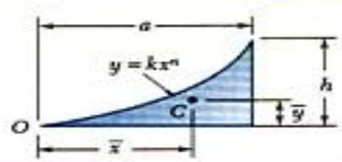
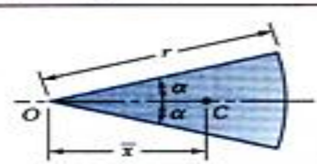
- اگر سطحی دارای دو محورتقارن باشد مرکزسطح آن روی محل تقاطع محورها خواهد بود.



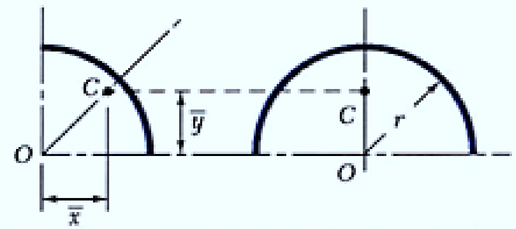
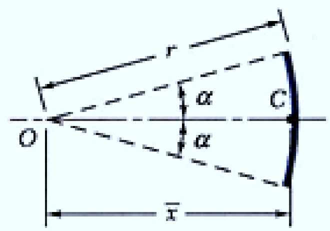
- یک سطح نسبت به مرکز O متقارن است اگربرای هر جزء از dA در مختصات (x,y) جزء همتایی مانند dA' در مختصات (-x,-y) وجود داشته باشد.

- مرکز سطح روی مرکز تقارن منطبق است.

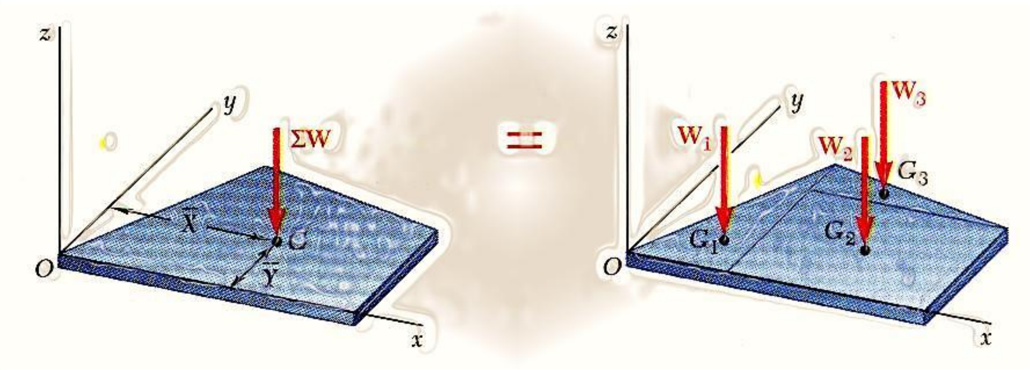
مرکزثقل اشکال معمول سطحی

شکل		$\bar{x}$	$\bar{y}$	سطح
سطوح مثلثی			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
سطوح ربع دایره ای		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
سطوح نیم دایره ای		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
سطوح ربع بیضوی		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
سطوح نیم بیضوی		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
سطوح نیم سهموی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
سطوح سهموی		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
محیطی سهموی		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
محیطی عمومی		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
قطاع دایروی		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

مرکزثقل اشکال معمول خطی

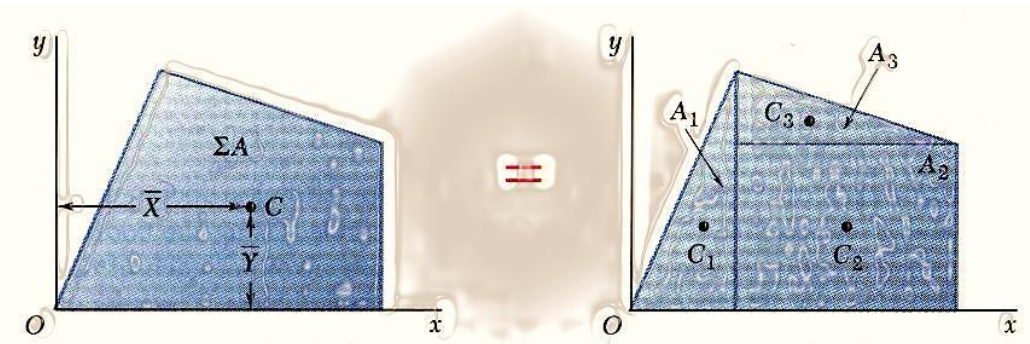
شکل		$\bar{x}$	$\bar{y}$	طول
کمان ربع دایره		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
کمان نیم دایره		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
کمان وقطاع		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

صفحات و سطوح مرکب



- صفحات مرکب

$$\bar{X}\sum W = \sum \bar{x} W$$
$$\bar{Y}\sum W = \sum \bar{y} W$$

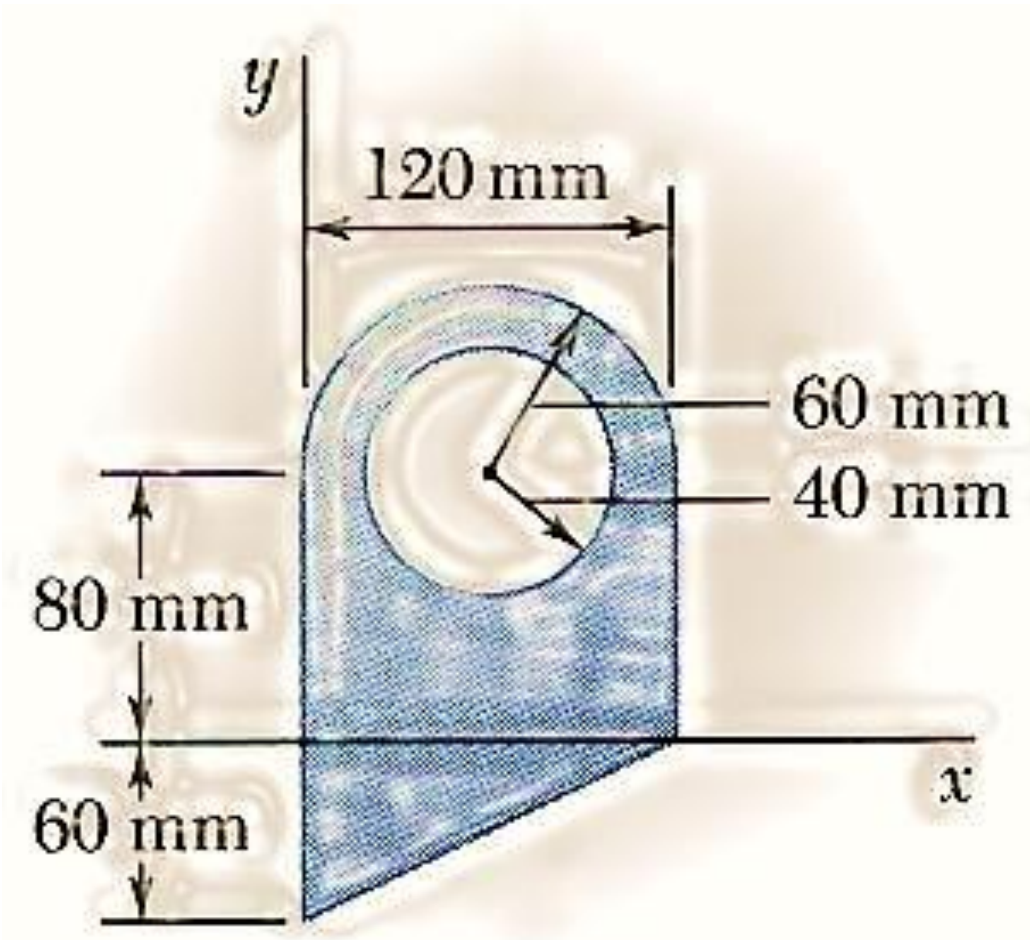


- سطوح مرکب

$$\bar{X}\sum A = \sum \bar{x} A$$
$$\bar{Y}\sum A = \sum \bar{y} A$$

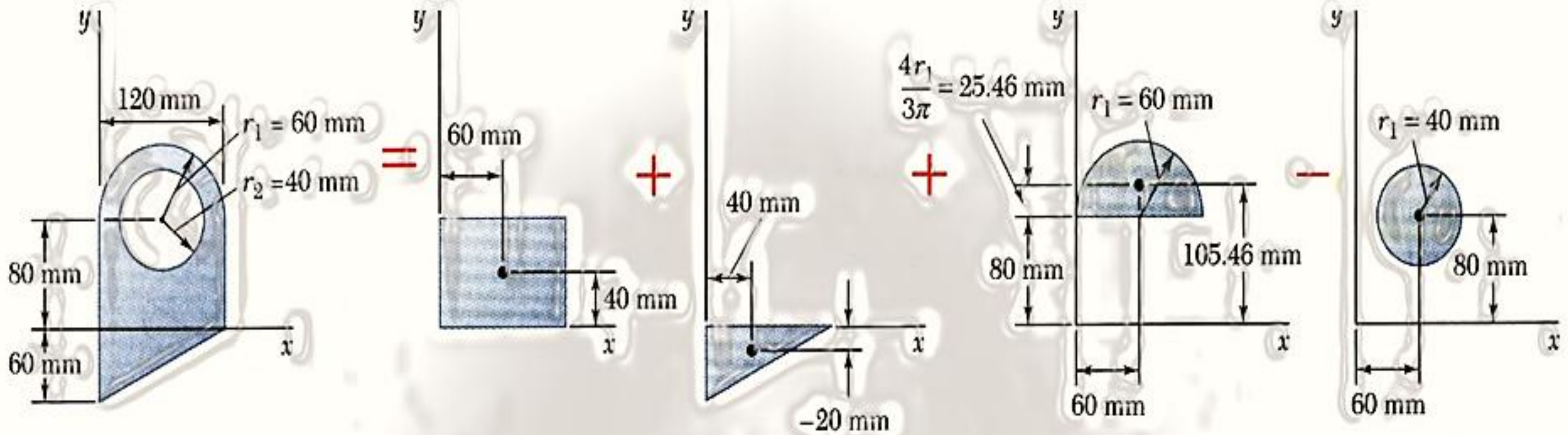
مثال ۱

- برای سطح نشان داده شده،مطلوبست تعیین لنگر اول سطح حول محورهای X و Y وتعیین مرکز سطح .



مثال ۱

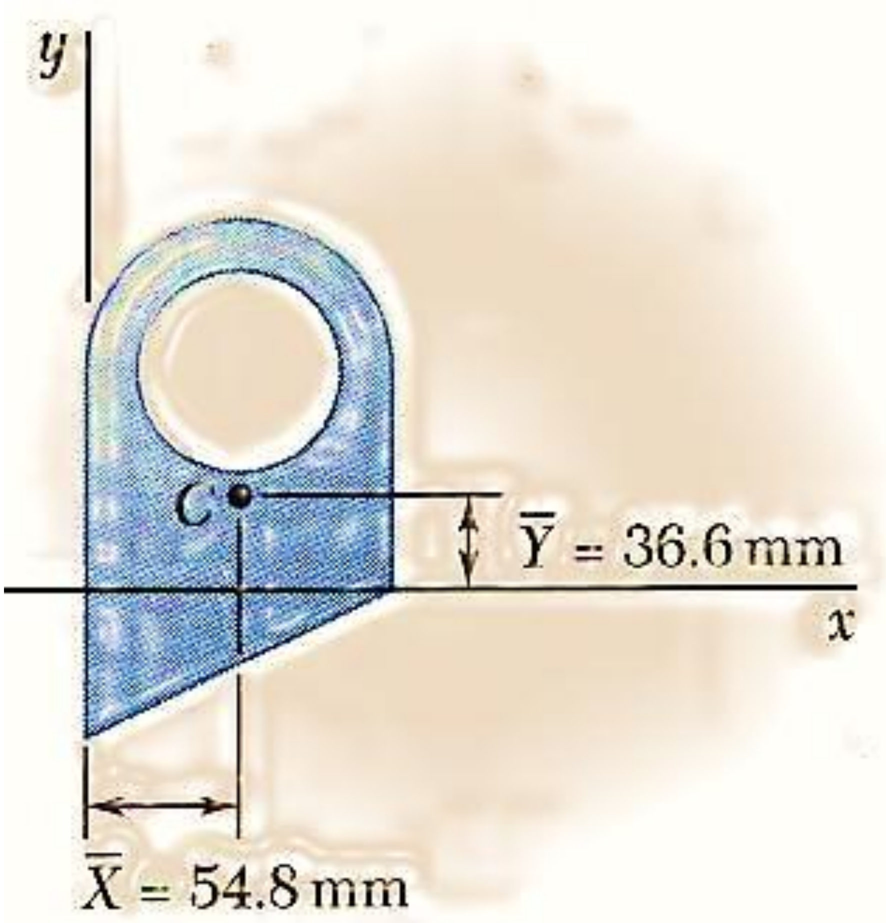
• ابتدا سطح مورد نظر را به سطوح ساده تر تجزیه کرده ومشخصات مطلوب را روی آنها تعیین کرده سپس با هم ترکیب می نماییم.



جزء ترکیبی	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
مستطیل	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
مثلث	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
نیم دایره	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
دایره	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

مثال ۱

- محاسبه مختصات مرکز سطح :



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{+757.7\times10^3\,\text{mm}^3}{13.828\times10^3\,\text{mm}^2}$$

$$\boxed{\bar{X} = 54.8\,\text{mm}}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{+506.2\times10^3\,\text{mm}^3}{13.828\times10^3\,\text{mm}^2}$$

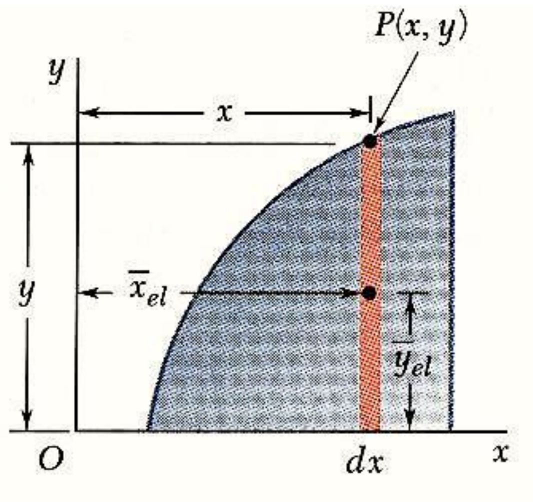
$$\boxed{\bar{Y} = 36.6\,\text{mm}}$$

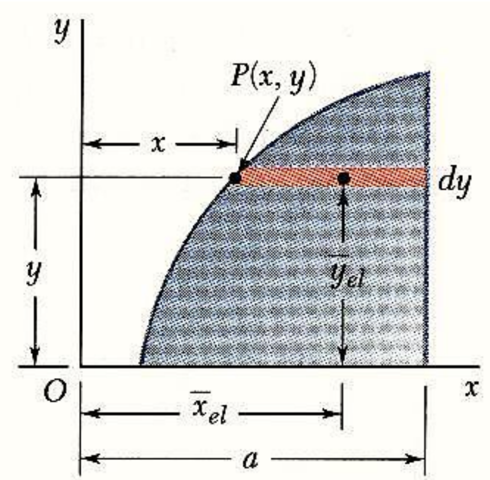
تعیین مرکز سطح به کمک انتگرال گیری

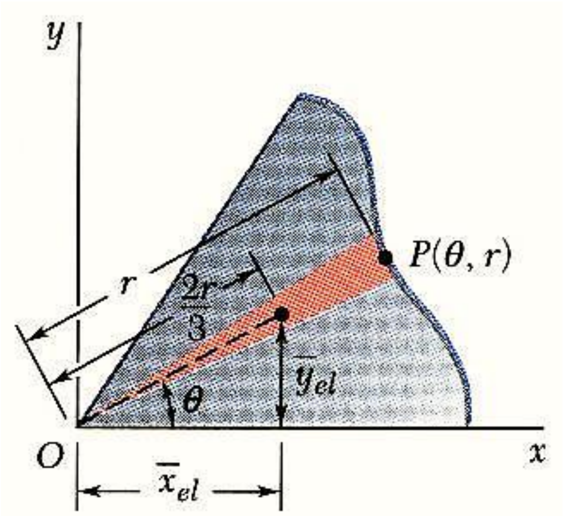
- انتگرال گیری دوبل نسبت به یک سطح بسیار کوچک برای پیدا کردن ممان اول

$$\bar{x}A = \int x dA = \iint x\, dxdy = \int \bar{x}_{el}\, dA$$

$$\bar{y}A = \int y dA = \iint y\, dxdy = \int \bar{y}_{el}\, dA$$







$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA = \int x\left(ydx\right)$$

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA = \int \frac{y}{2}\left(ydx\right)$$

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA = \int \frac{a+x}{2}\left[\left(a-x\right)dx\right]$$

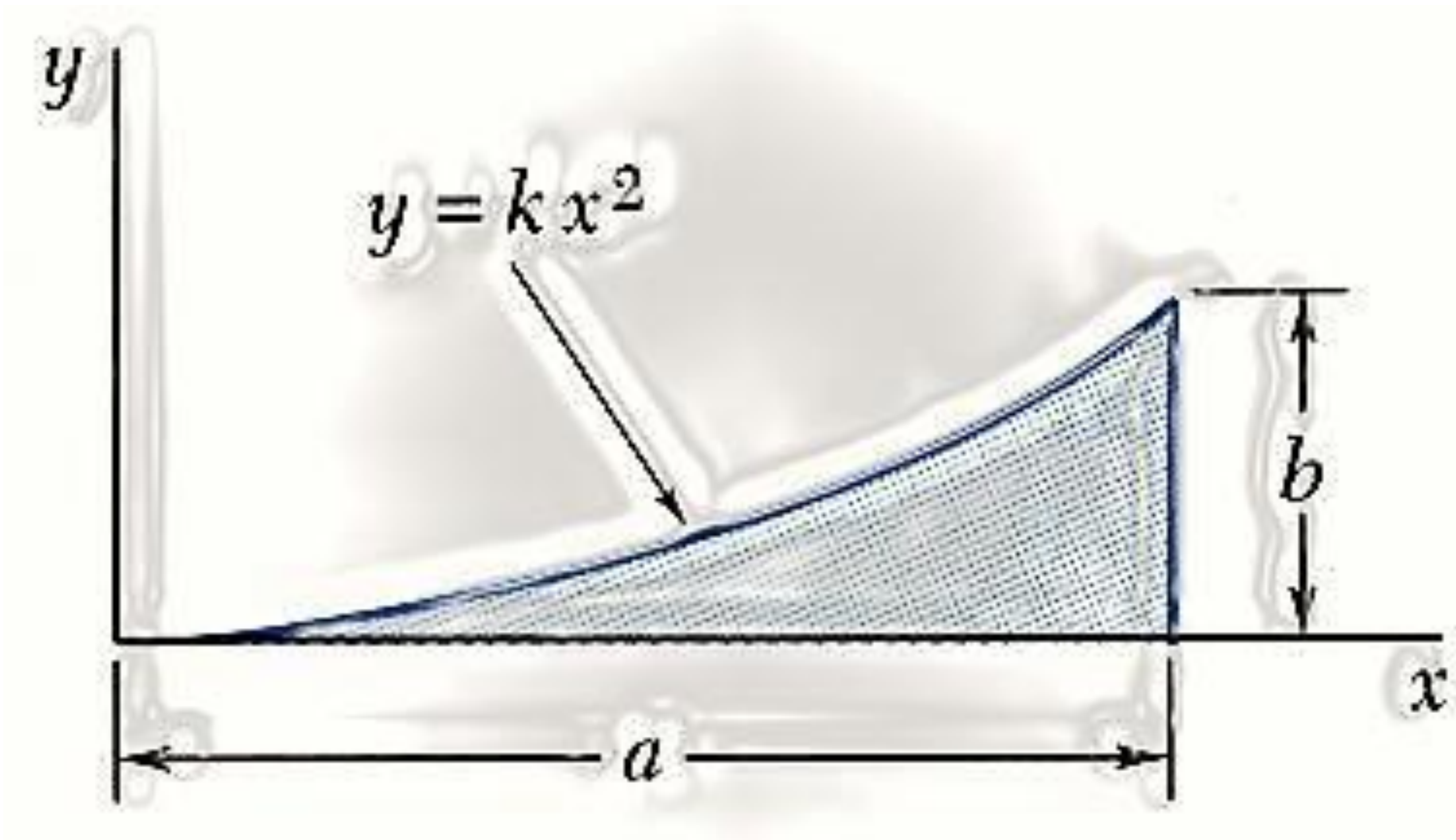
$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA = \int y\left[\left(a-x\right)dx\right]$$

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA = \int \frac{2r}{3}\cos\theta\left(\frac{1}{2}r^2 d\theta\right)$$

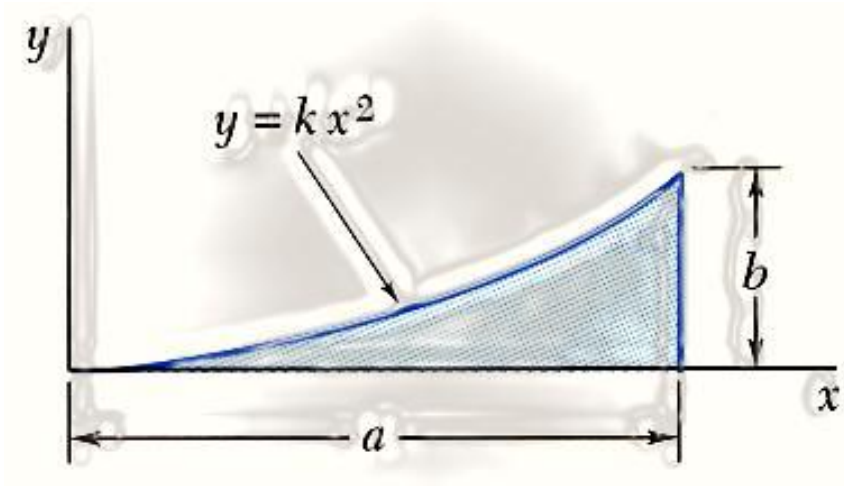
$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA = \int \frac{2r}{3}\sin\theta\left(\frac{1}{2}r^2 d\theta\right)$$

مثال ۲

- بوسیله انتگرال گیری مستقیم مرکز سطح سهمی محیطی را تعیین کنید.



مثال ۲

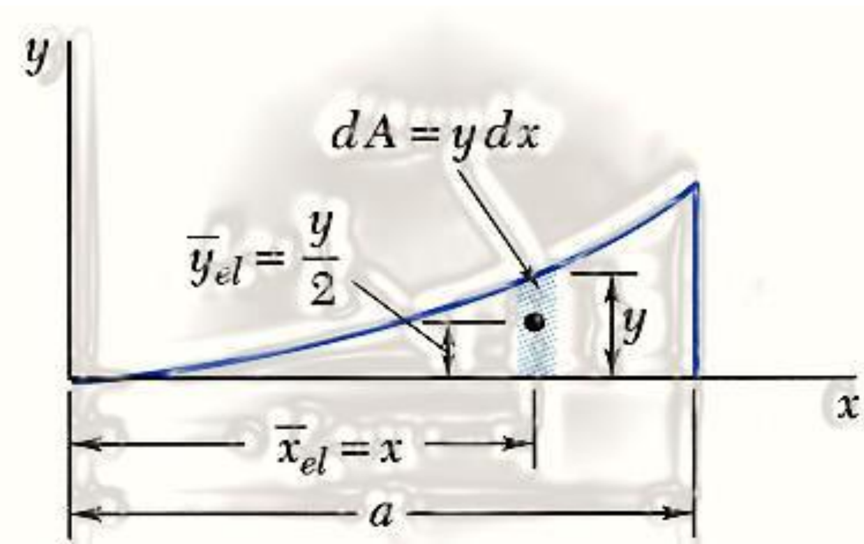


- تعیین ثابت K .

$$y = k\,x^2$$

$$b = k\,a^2 \;\Rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \quad or \quad x = \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}$$



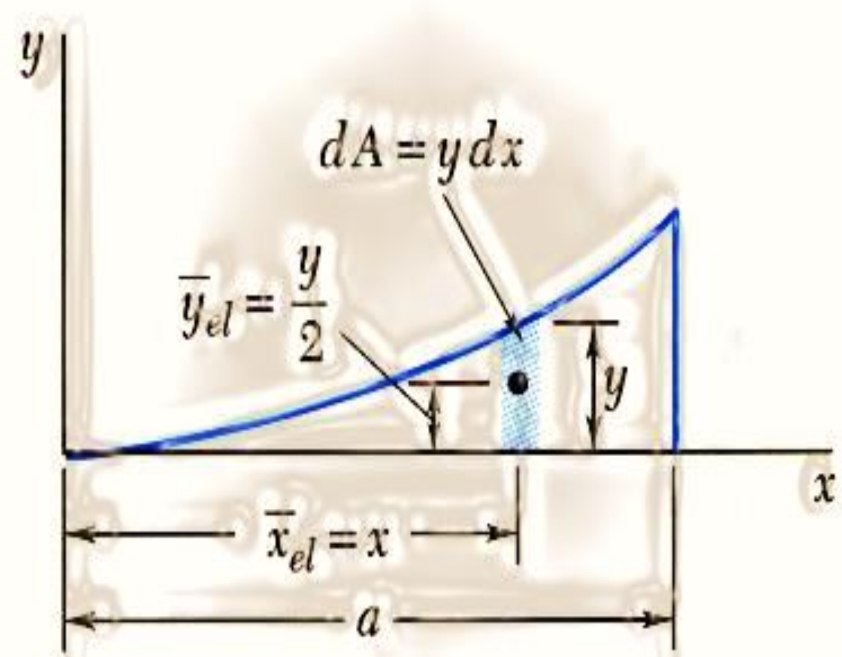
- ارزیابی سطح نهایی .

$$A = \int dA$$

$$= \int y\,dx = \int_0^a \frac{b}{a^2}x^2 dx = \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{ab}{3}$$

مثال ۲



• محاسبه با یک نوار عمودی

$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int xy dx = \int_0^a x\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx$$

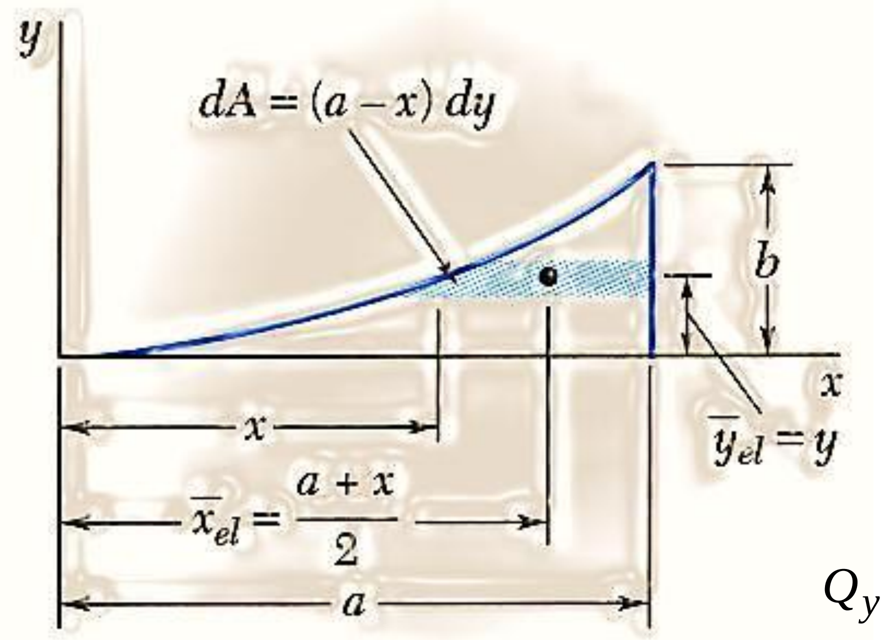
$$= \left[\frac{b}{a^2}\frac{x^4}{4}\right]_0^a = \boxed{\frac{a^2 b}{4}}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int \frac{y}{2} y dx = \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx$$

$$= \left[\frac{b^2}{2a^4}\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \boxed{\frac{ab^2}{10}}$$

مثال ۲

- محاسبه با یک نوار افقی



$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int \frac{a+x}{2}(a-x)dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2} dy$$

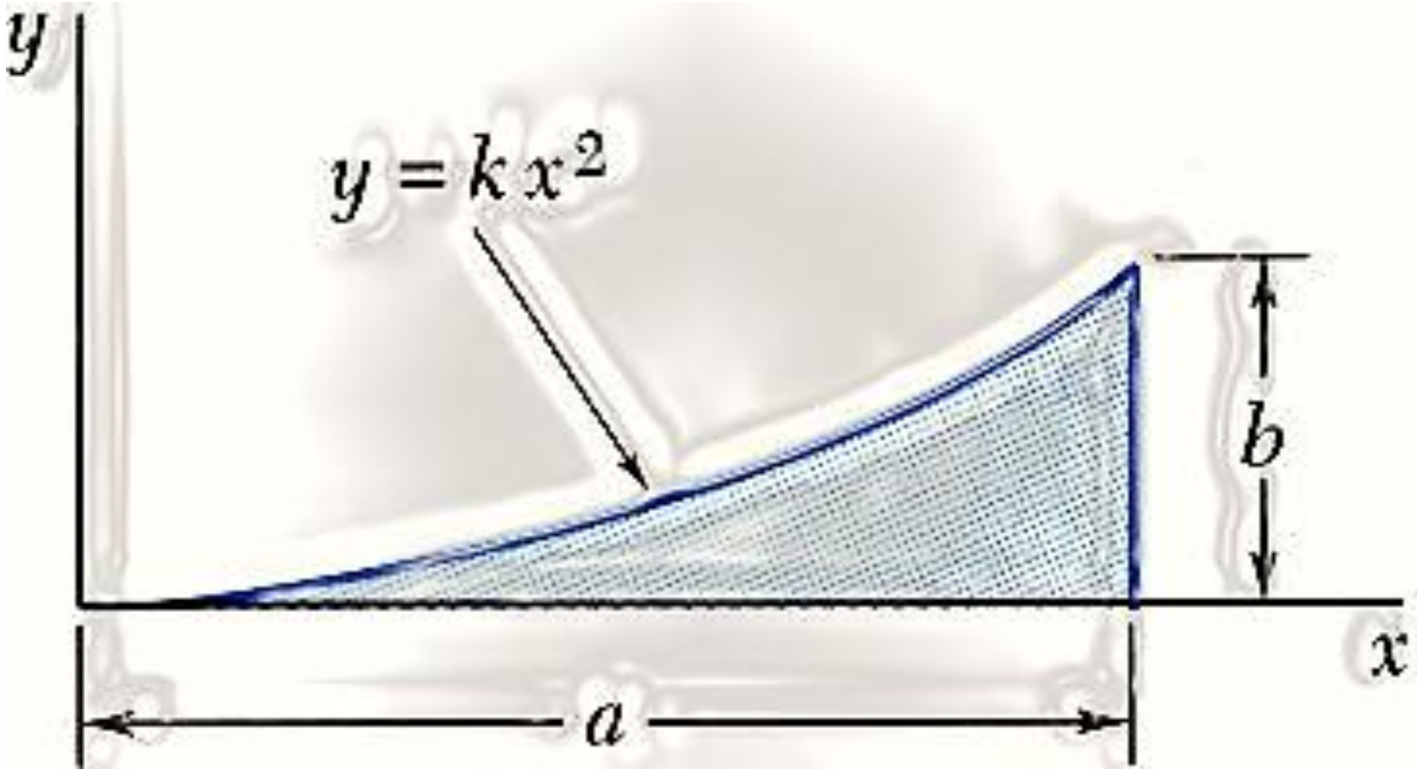
$$= \frac{1}{2}\int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b} y \right) dy = \boxed{\frac{a^2 b}{4}}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int y(a-x)dy = \int y\left(a - \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} \right) dy$$

$$= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}} y^{3/2} \right) dy = \boxed{\frac{ab^2}{10}}$$

مثال ۲

• ارزیابی مختصات مرکز سطح



$$\bar{x}A = Q_y$$

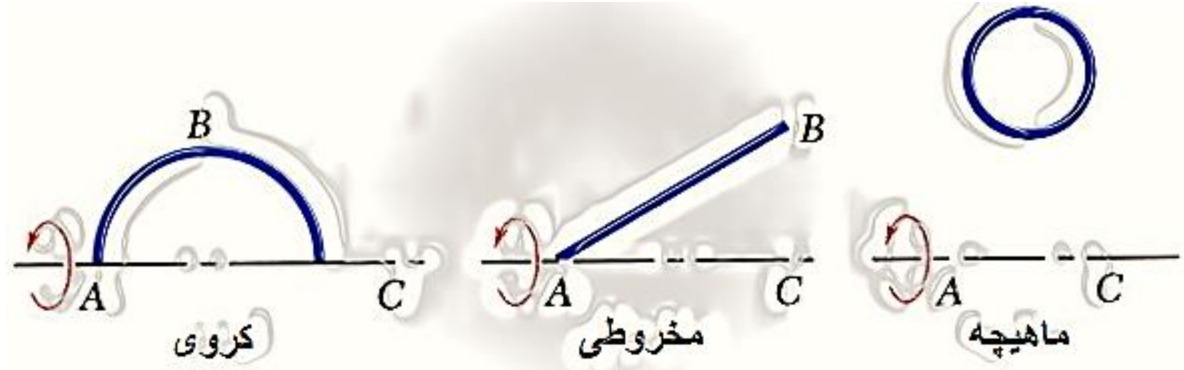
$$\bar{x}\frac{ab}{3} = \frac{a^2 b}{4} \qquad \boxed{\bar{x} = \frac{3}{4}a}$$

$$\bar{y}A = Q_x$$

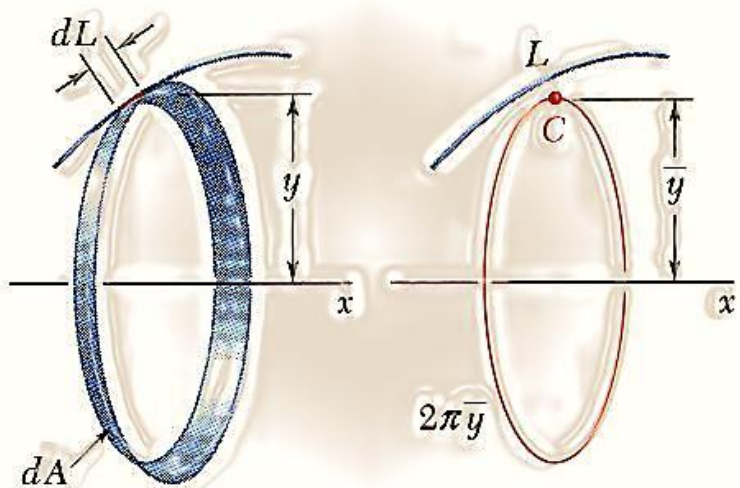
$$\bar{y}\frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \qquad \boxed{\bar{y} = \frac{3}{10}b}$$

تئوری Pappus-Guldinus (پاپوس - گلدینوس) قضیه اول

• رابطه یک سطح دوار بامنحنی مولدش.



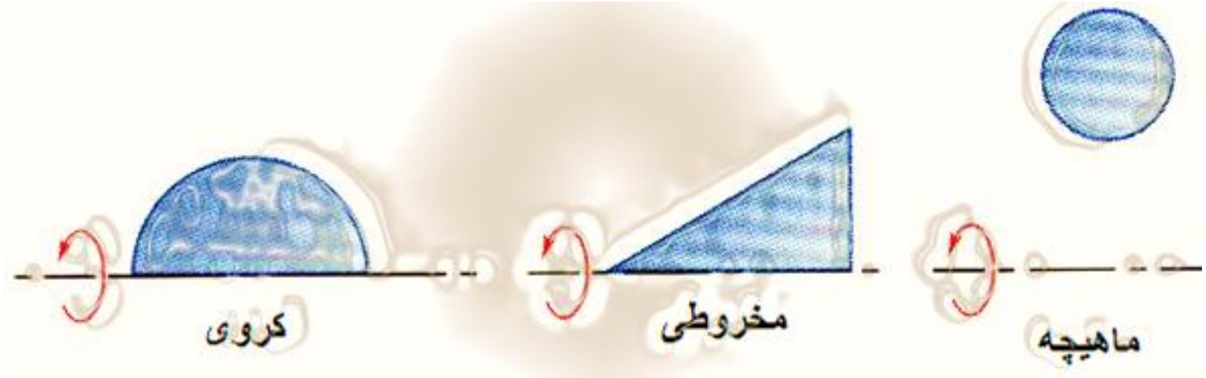
• مطابق شکل که یک منحنی مولد ویک محور دوران درصفحه این منحنی را نشان میدهد،منحنی مولد می تواند با محور دوران تماس پیدا کند اما نباید ازآن بگذرد.سطح دوارحاصل ازدوران منحنی مولد حول محور دوران،دارای مساحتی است برابر با:حاصلضرب طول منحنی مولد در محیط دایره ای که توسط مرکز منحنی مولد طی ایجاد سطح دوار تشکیل می دهد.



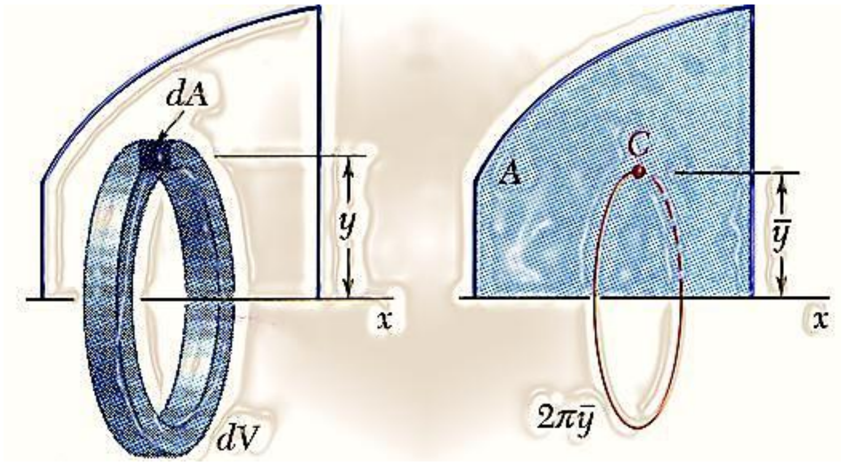
$$A = 2\pi \bar{y} L$$

تئوری Pappus-Guldinus (پاپوس - گلدینوس) قضیه دوم

- رابطه یک حجم دوار با سطح مولدش .



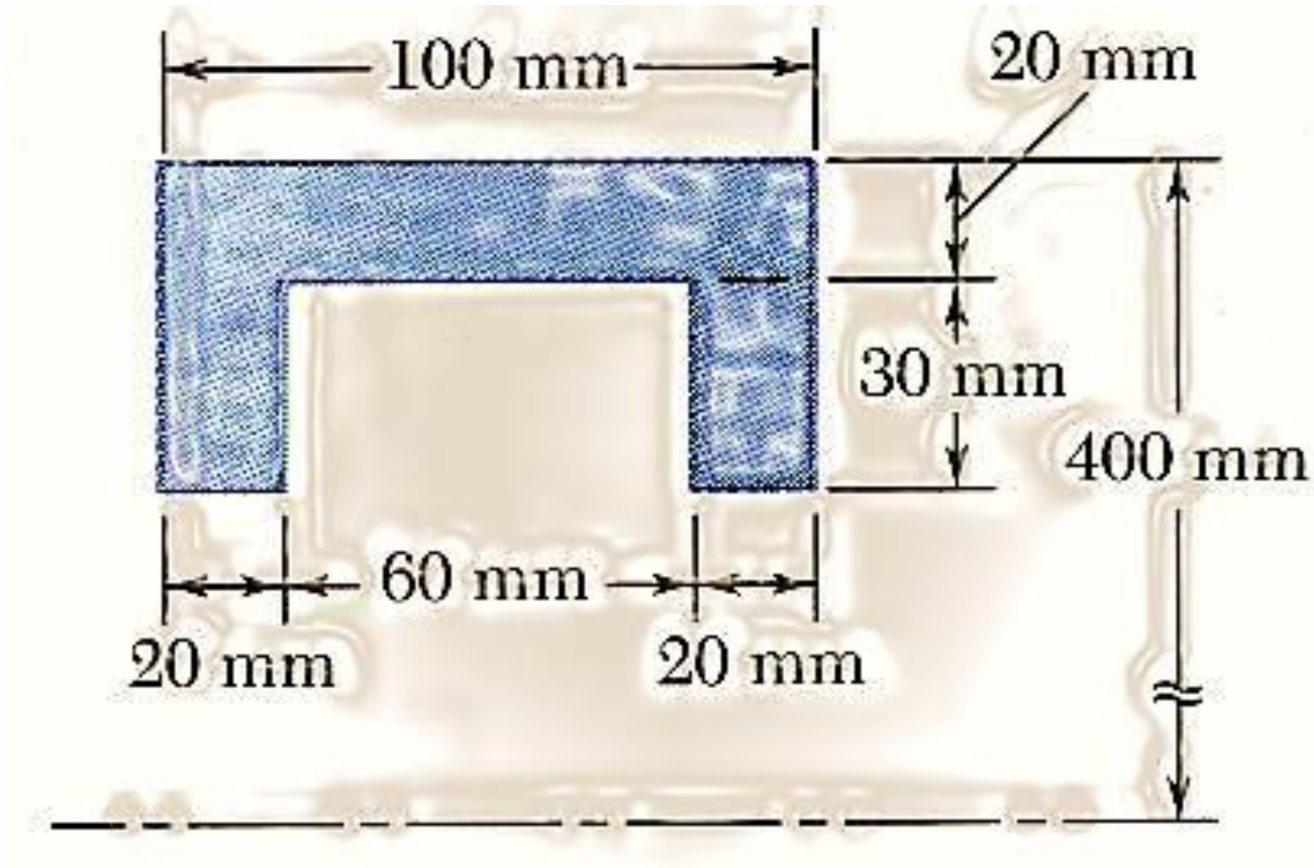
- سطحی مستوی ویک محور دوران هم صفحه باسطح مانند شکل را درنظر بگیرید،محور فقط می تواند بر مرز سطح مماس باشد اما نبایدآنرا قطع کند.حجم جسم دوار حاصل ازدوران سطح مستوی حول محور دوران،برابر حاصلضرب مساحت سطح در محیط دایره ای که توسط مرکز سطح مولد طی تشکیل جسم دوار تشکیل می شود.



$$V = 2\pi\bar{y}A$$

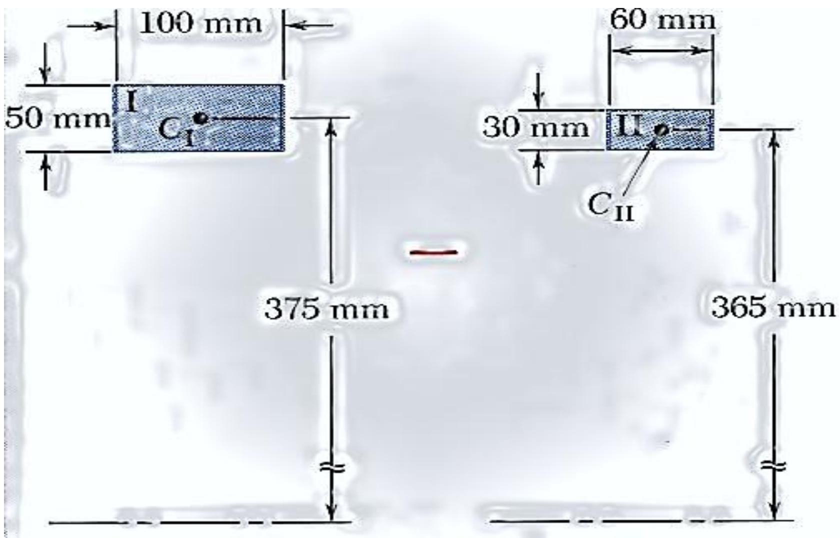
مثال ۳

- برای یک مقطع عرضی از یک حجم دوارحول محور خط چین مشخصات مانند شکل داده شده است.
چگالی جسم $\rho = 7.85\times10^{3}\ \mathrm{kg}/\mathrm{m}^{3}$ است.مطلوبست وزن و جرم این جسم.



مثال ۳

- بابکارگیری قضیه دوم تئوری پاپوس – گلدینوس

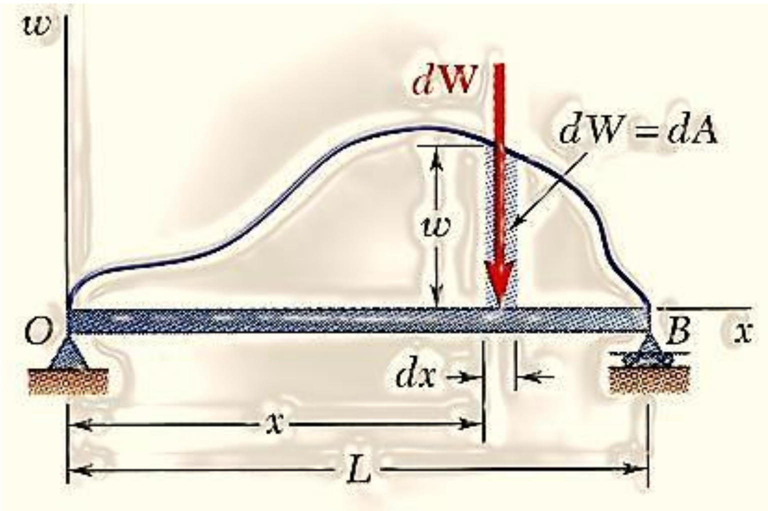


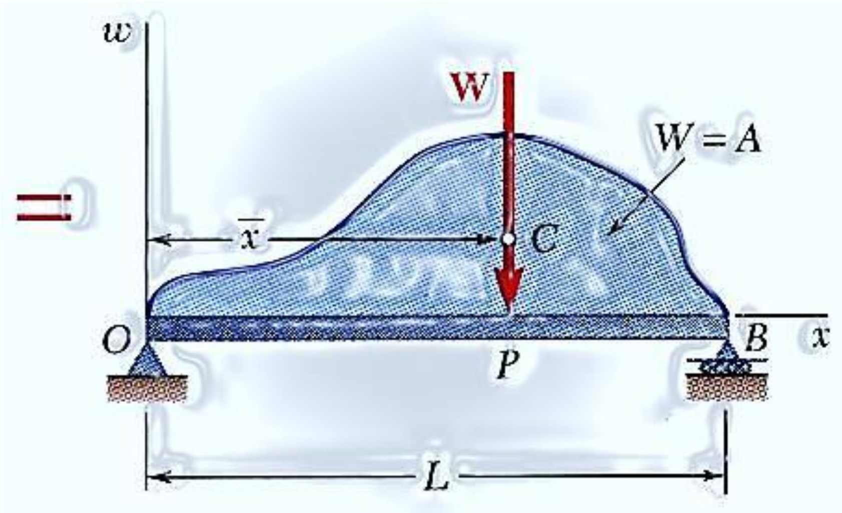
	سطح, mm²	$\bar{y}$, mm	فاصله پیموده شده مرکز سطح mm	حجم , mm³
I	+5000	375	$2\pi(375) = 2356$	$(5000)(2356) = 11.78 \times 10^6$
II	−1800	365	$2\pi(365) = 2293$	$(-1800)(2293) = -4.13 \times 10^6$
				حجم دوار $= \boxed{7.65 \times 10^6}$

$$m = \rho V = \left(7.85 \times 10^3 \,\mathrm{kg/m^3}\right)\left(7.65 \times 10^6 \,\mathrm{mm^3}\right)\left(10^{-9}\,\mathrm{m^3/mm^3}\right) \qquad \boxed{m = 60.0\,\mathrm{kg}}$$

$$W = mg = (60.0\,\mathrm{kg})\left(9.81\,\mathrm{m/s^2}\right) \qquad \boxed{W = 589\,\mathrm{N}}$$

بارهای توزیع شده روی تیرها





- بارگسترده معمولا با نماد W و واحد اندازه گیری نیرو برواحد طول نشان داده می شود و بارمعادل نهایی برابراندازه سطح زیر منحنی بار گسترده خواهد بود.$(dW = wdx)$

$$W = \int_0^L w dx = \int dA = A$$

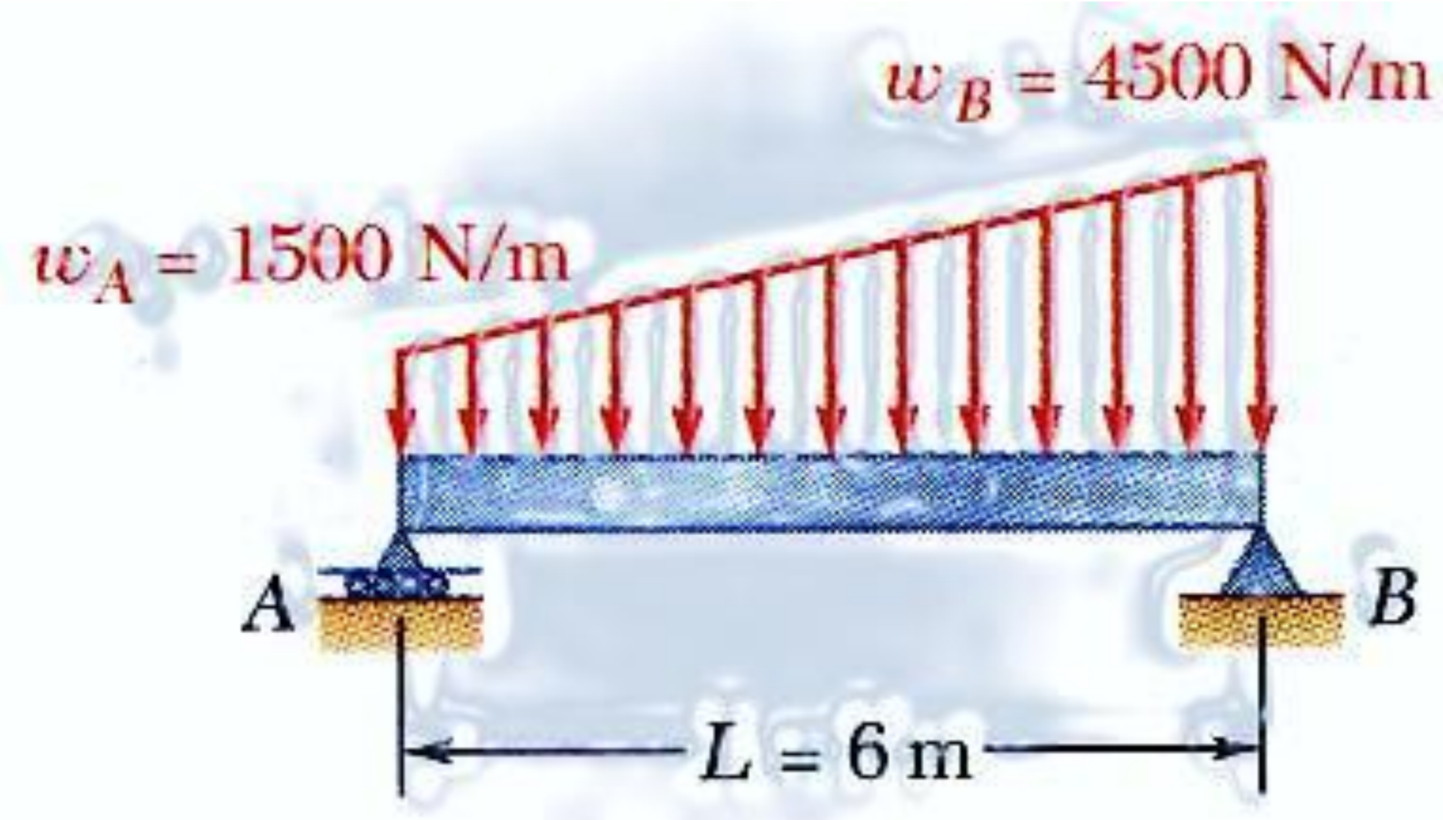
- بارگسترده میتواند درمحاسبات با یک بار متمرکز که در مرکز سطح این شکل بار گسترده وارد می شود،جایگزین گردد.

$$(OP)W = \int x dW$$

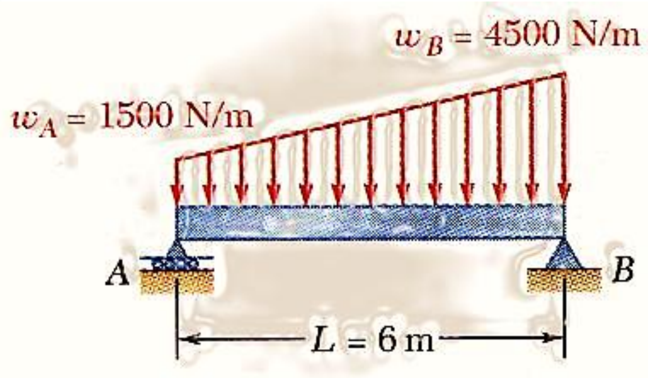
$$(OP)A = \int_0^L x dA = \bar{x} A$$

مثال ۴

- بر یک تیر مطابق شکل باری گسترده وارد می شود،مطلوبست بارمتمرکز معادل با این بار ونیز مقادیر واکنشهای تکیه گاهی.



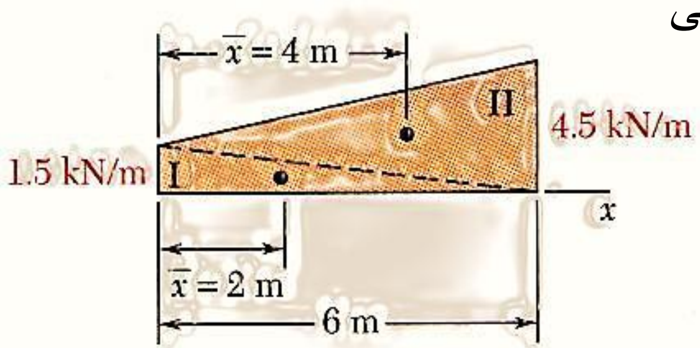
مثال ۴



- بار معادل برابر سطح زیر شکل بارگسترده خواهد بود که دراینجا یک ذوزنقه است:

(4500+1500)*6/2=18000

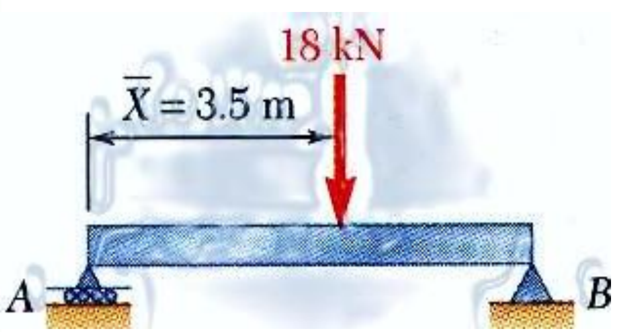
$$\boxed{F = 18.0\ \text{kN}}$$



- مرکز سطح ذوزنقه را می توان با تجزیه آن به دومثلث و ارزیابی مراکز سطح آنها نسبت به یک مبداء سنجید.

[(4500*6/2)*4]+[(1500*6/2)*2]=63000

$$\bar{X} = \frac{63\ \text{kN}\cdot\text{m}}{18\ \text{kN}} \qquad \boxed{\bar{X} = 3.5\ \text{m}}$$

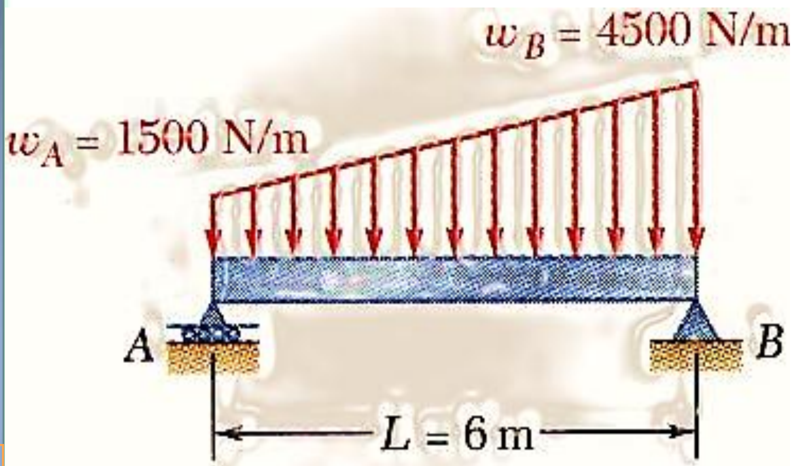


اجزاء	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN·m
I مثلث	4.5	2	9
II مثلث	13.5	4	54
	$\Sigma A = 18.0$		$\Sigma \bar{x}A = 63$

Meysam4366@yahoo.com

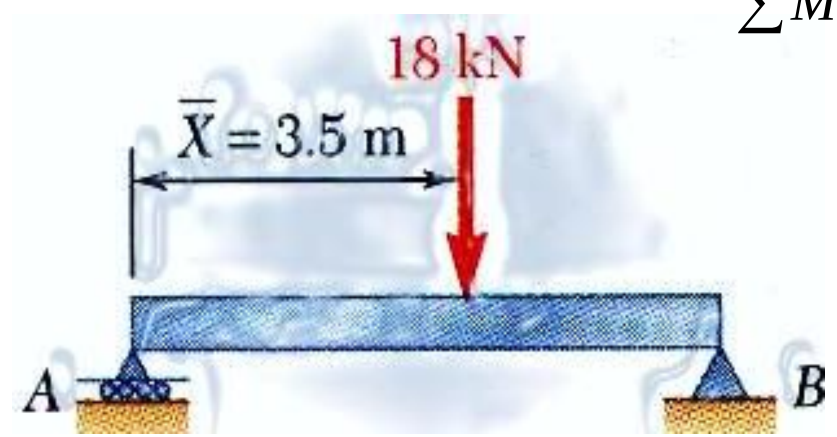
مثال ۴

- برای بدست آوردن واکنشهای تکیه گاهی از معادلات تعادل استفاده می کنیم:



$$\sum M_A = 0: \quad B_y(6\,\mathrm{m}) - (18\,\mathrm{kN})(3.5\,\mathrm{m}) = 0$$

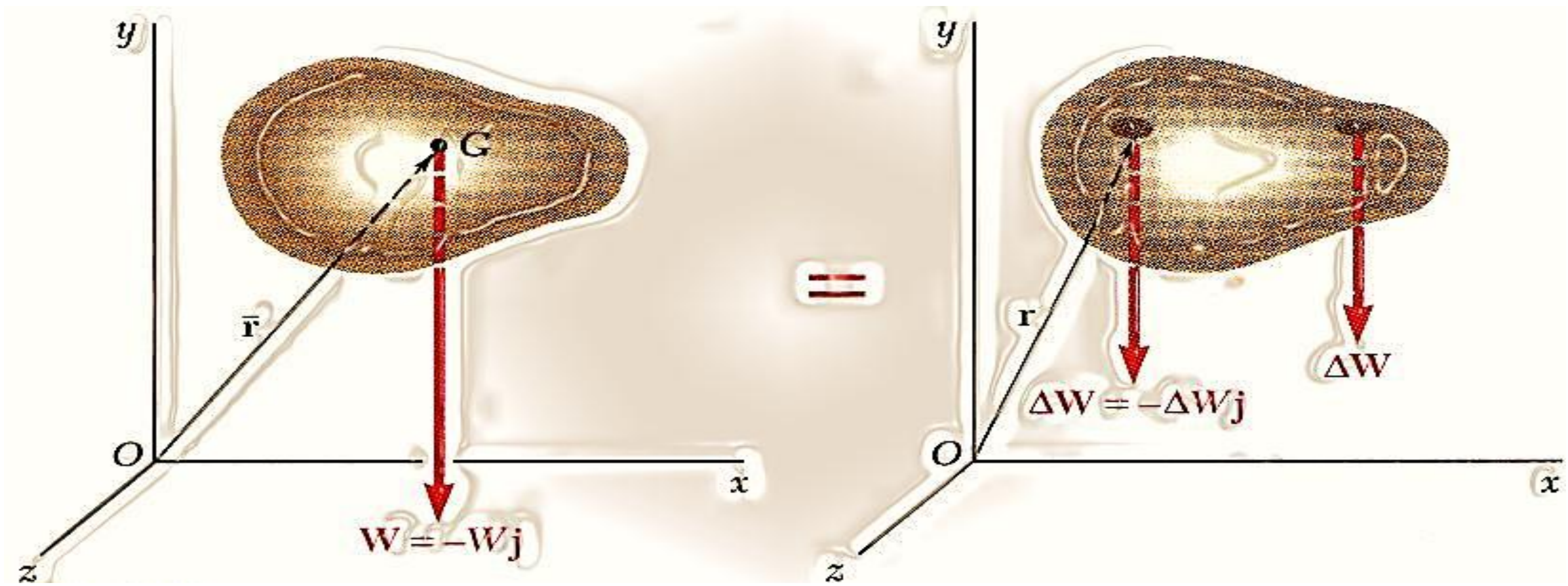
$$\boxed{B_y = 10.5\,\mathrm{kN}}$$



$$\sum M_B = 0: \quad -A_y(6\,\mathrm{m}) + (18\,\mathrm{kN})(6\,\mathrm{m} - 3.5\,\mathrm{m}) = 0$$

$$\boxed{A_y = 7.5\,\mathrm{kN}}$$

مرکزثقل دریک جسم سه بعدی: مرکز حجم



- نتایج به گرایش و جهت جسم وابسته است.

$$\bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad \bar{z}W = \int z dW$$

- برای اجسام همگن

$$W = \gamma V \text{ and } dW = \gamma dV$$

$$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV$$

- مرکز ثقل G

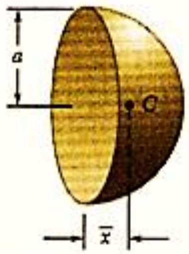
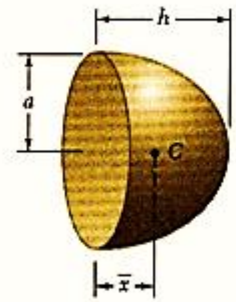
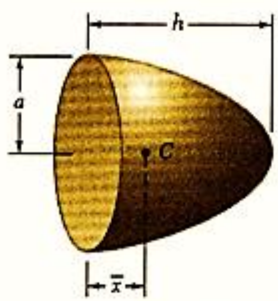
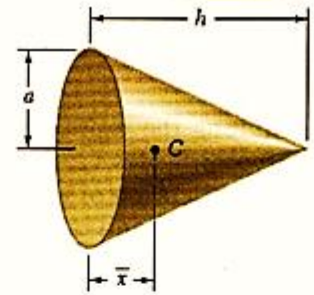
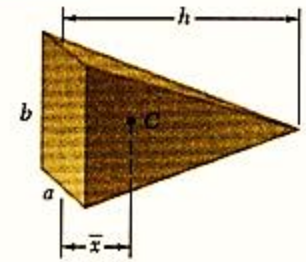
$$-W\vec{j} = \sum\left(-\Delta W\vec{j}\right)$$

$$\vec{r}_G \times \left(-W\vec{j}\right) = \sum\left[\vec{r} \times \left(-\Delta W\vec{j}\right)\right]$$

$$\vec{r}_G W \times \left(-\vec{j}\right) = \left(\sum \vec{r}\Delta W\right) \times \left(-\vec{j}\right)$$

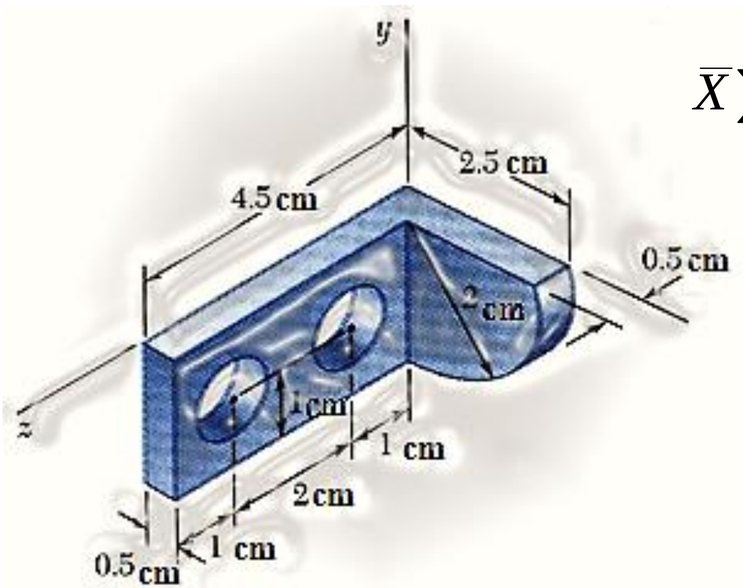
$$W = \int dW \qquad \vec{r}_G W = \int \vec{r} dW$$

مراکز اشکال سه بعدی معمول

شکل		$\bar{x}$	حجم
نیمکره		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
بیضوی انتقال		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
سهموی انتقال		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
مخروطی		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
هرمی		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

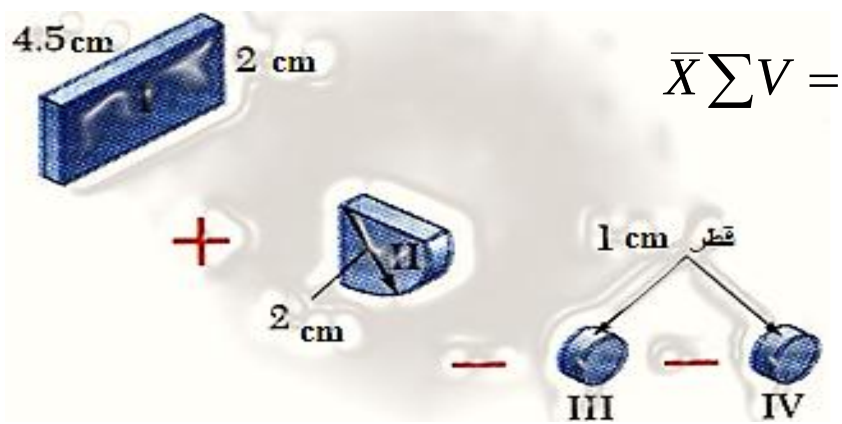
اجسام سه بعدی مرکب

- برای محاسبه مرکز ثقل و حجم این اجسام باید آنها را به اشکال ساده تجزیه و با کمک مشخصات این اشکال ساده شده مشخصه مورد نظر را محاسبه کنیم.



$$\bar{X}\sum W = \sum \bar{x} W \quad \bar{Y}\sum W = \sum \bar{y} W \quad \bar{Z}\sum W = \sum \bar{z} W$$

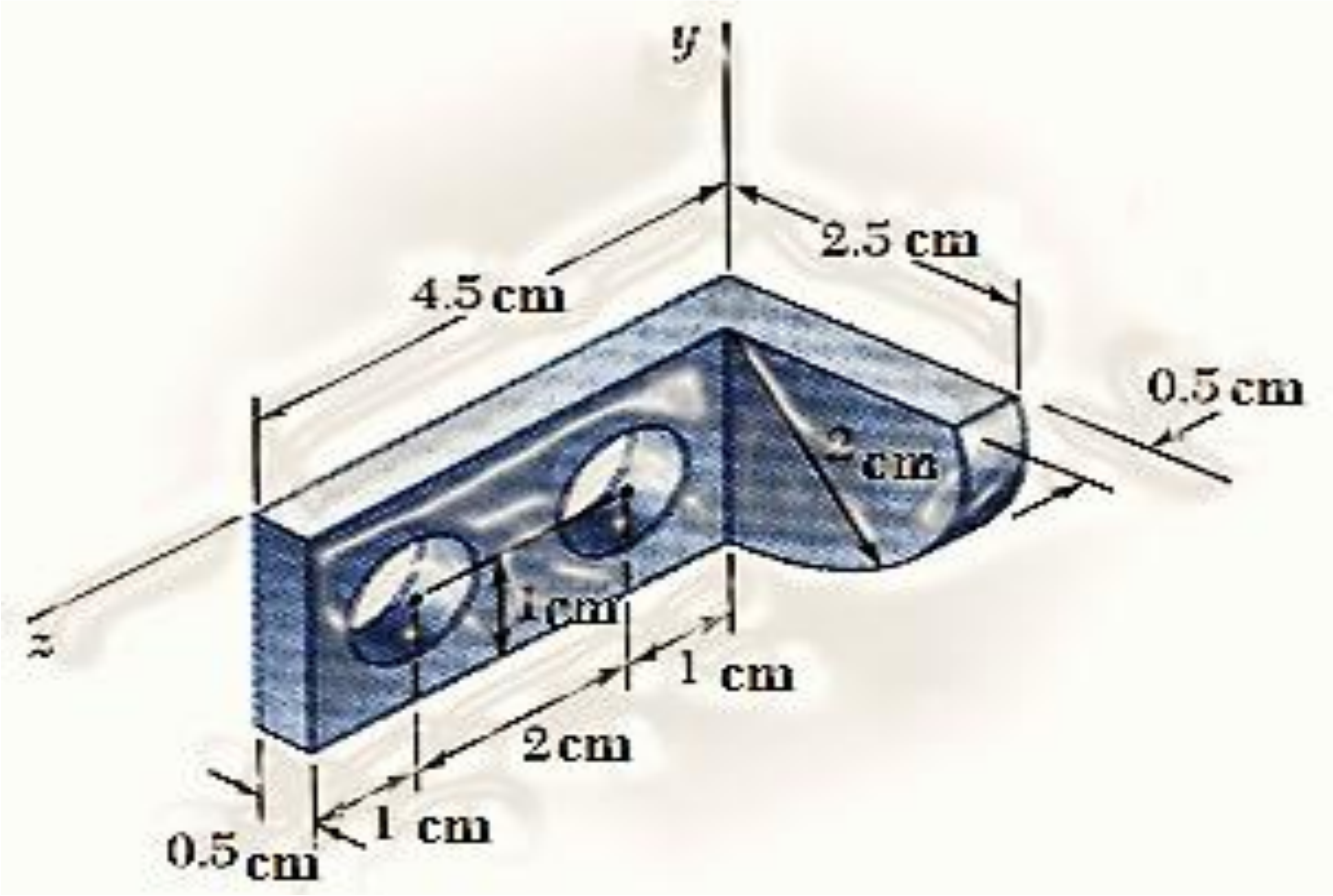
- برای اجسام همگن



$$\bar{X}\sum V = \sum \bar{x} V \quad \bar{Y}\sum V = \sum \bar{y} V \quad \bar{Z}\sum V = \sum \bar{z} V$$

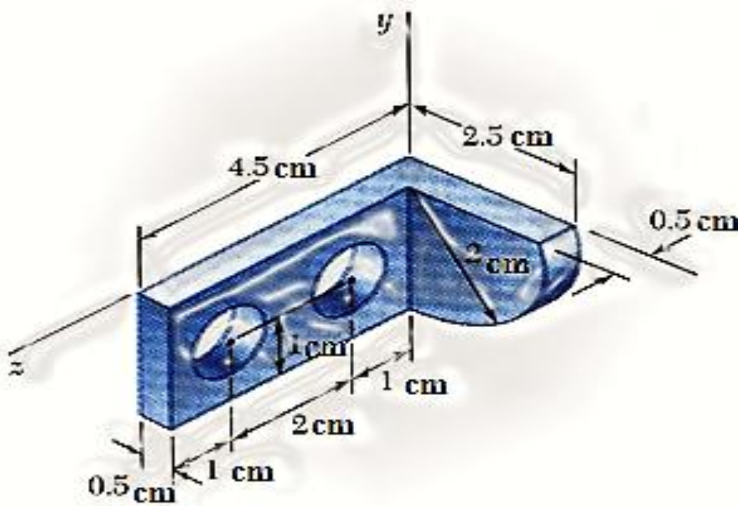
مثال ۵

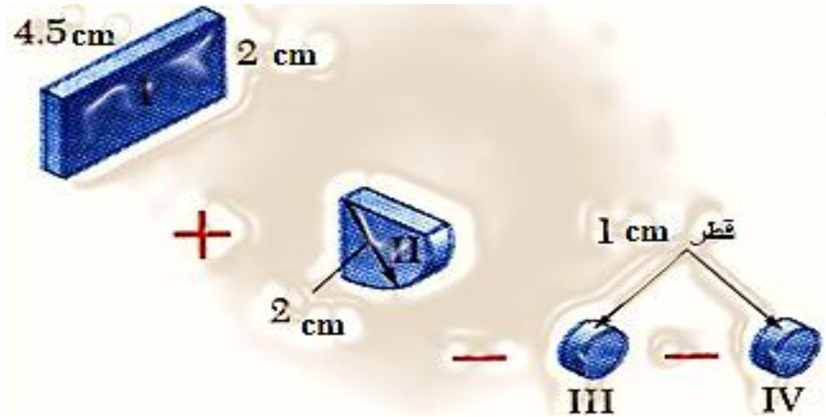
❑ در قطعه فولادی نشان داده شده مطلوبست محاسبه مرکز حجم .

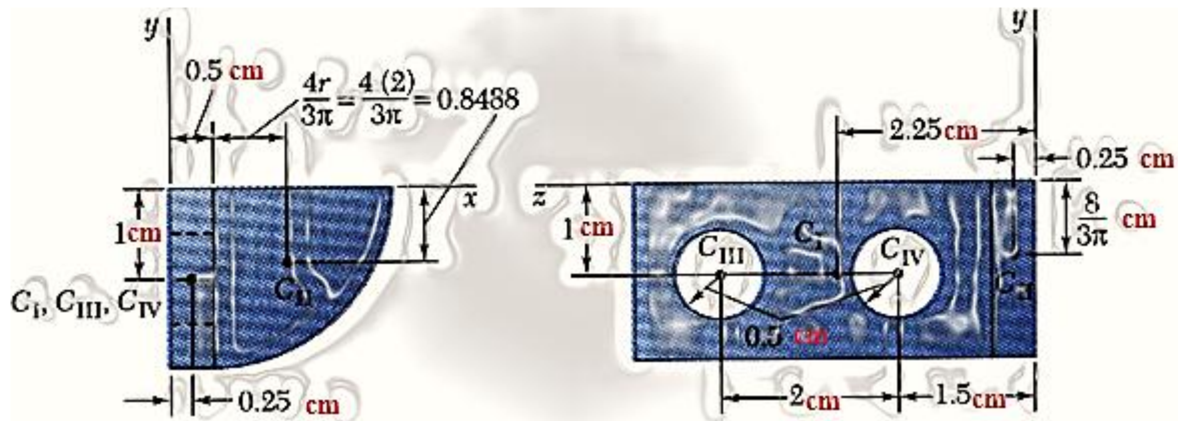


مثال ۵

- با تجزیه وتقسیم قطعه مورد به اشکال ساده ای چون مستطیل و ربع دایره و دایره خواهیم داشت:

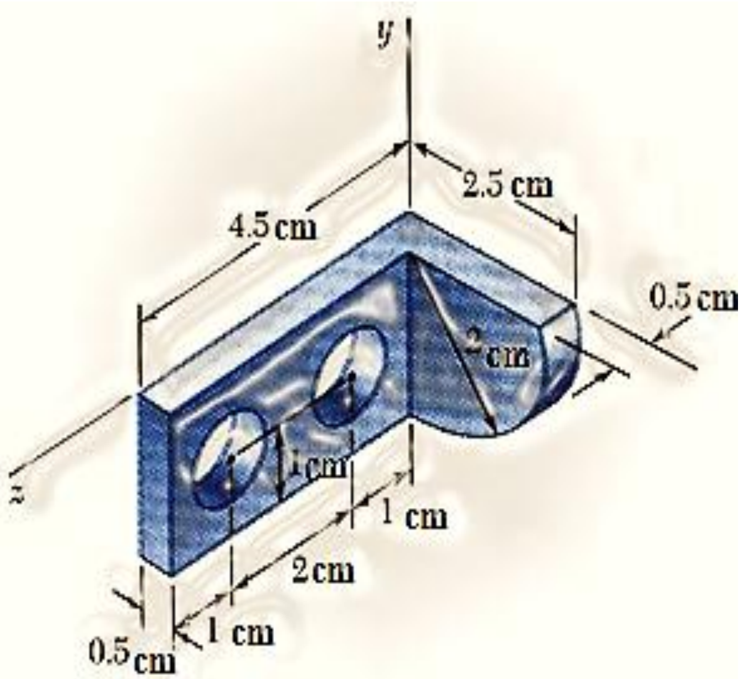






مثال ۵

	V, cm^3	$\bar{x}$, cm	$\bar{y}$, cm	$\bar{z}$, cm	$\bar{x}V$, cm^4	$\bar{y}V$, cm^4	$\bar{z}V$, cm^4
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	-0.8488	0.25	2.119	-1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	3.5	-0.098	0.393	-1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	1.5	-0.098	0.393	-0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma\bar{x}V = 3.048$	$\Sigma\bar{y}V = -5.047$	$\Sigma\bar{z}V = 8.555$



$$\bar{X} = \sum \bar{x}V / \sum V = \left(3.08\,\mathrm{cm}^4\right) / \left(5.286\,\mathrm{cm}^3\right)$$

$\bar{X}$=0.583 cm

$$\bar{Y} = \sum \bar{y}V / \sum V = \left(-5.047\,\mathrm{cm}^4\right) / \left(5.286\,\mathrm{cm}^3\right)$$

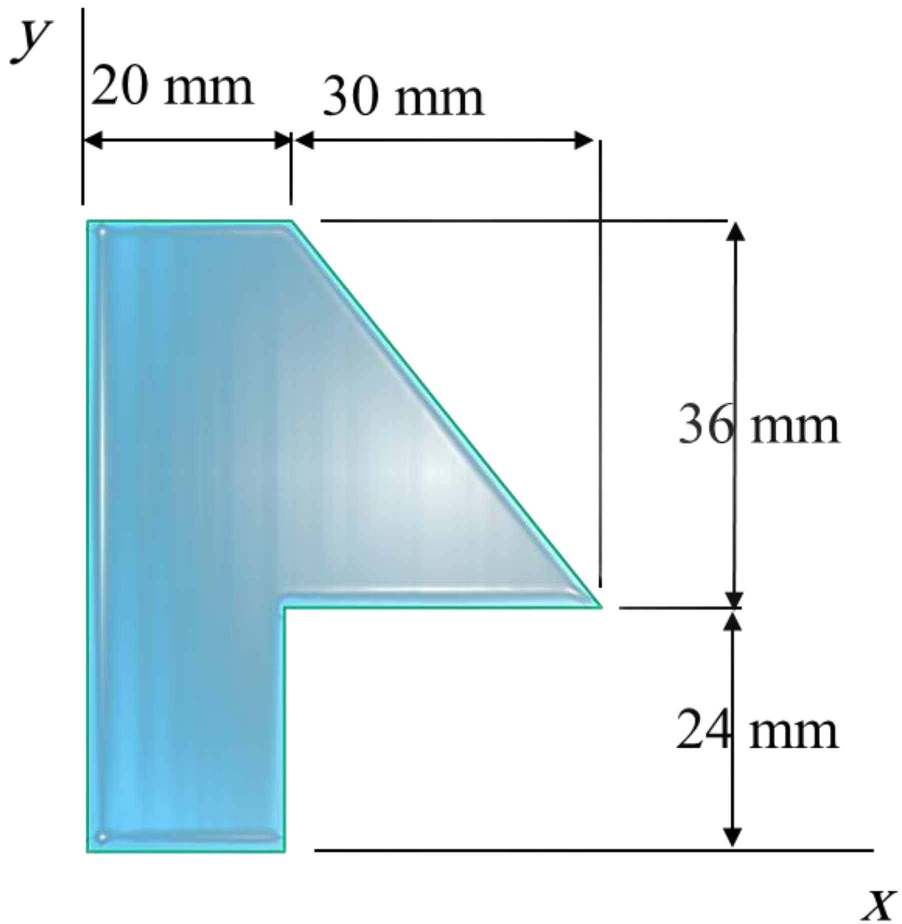
$\bar{Y}$=-0.955 cm

$$\bar{Z} = \sum \bar{z}V / \sum V = \left(8.555\,\mathrm{cm}^4\right) / \left(5.286\,\mathrm{cm}^3\right)$$

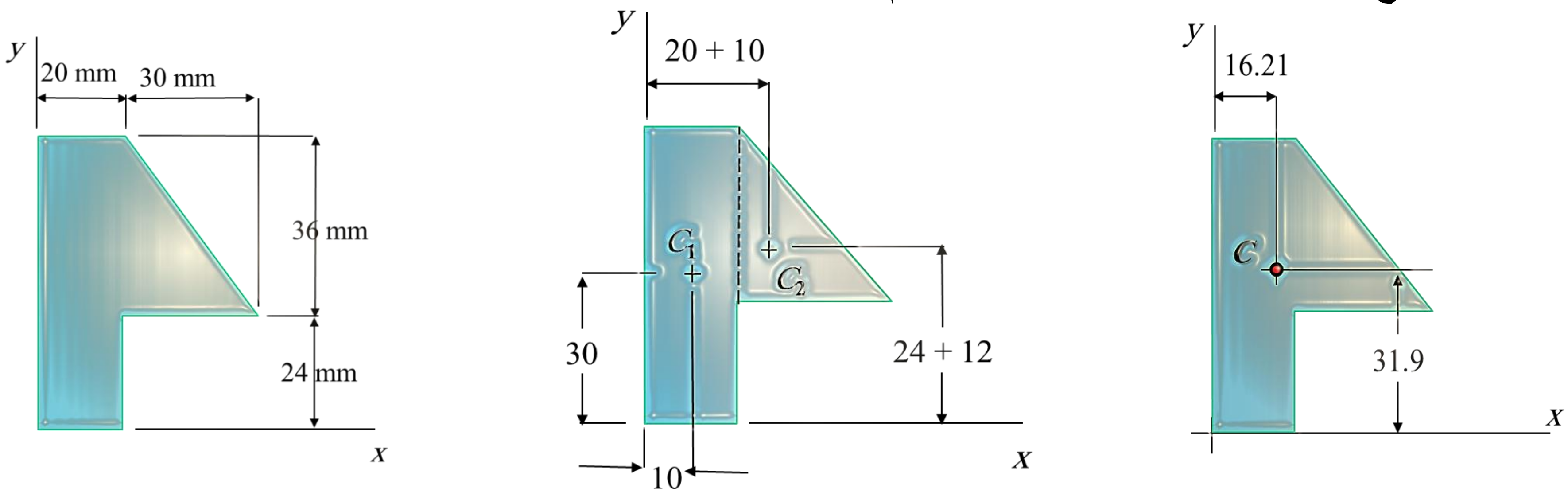
$\bar{Z}$=1.618 cm

مثال ۶

- مطلوبست مرکز سطح شکل مقابل.



- باتجزیه سطح مورد نظر به دو شکل ساده خواهیم داشت:



	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
1	20 x 60 =1200	10	30	12,000	36,000
2	(1/2) x 30 x 36 =540	30	36	16,200	19,440
Σ	**1740**			**28,200**	**55,440**

$$\bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x}A$$

$$\bar{X}\,(1740) = 28{,}200$$

$$\boxed{\bar{X} = 16.21 \text{ mm}}$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y}A$$

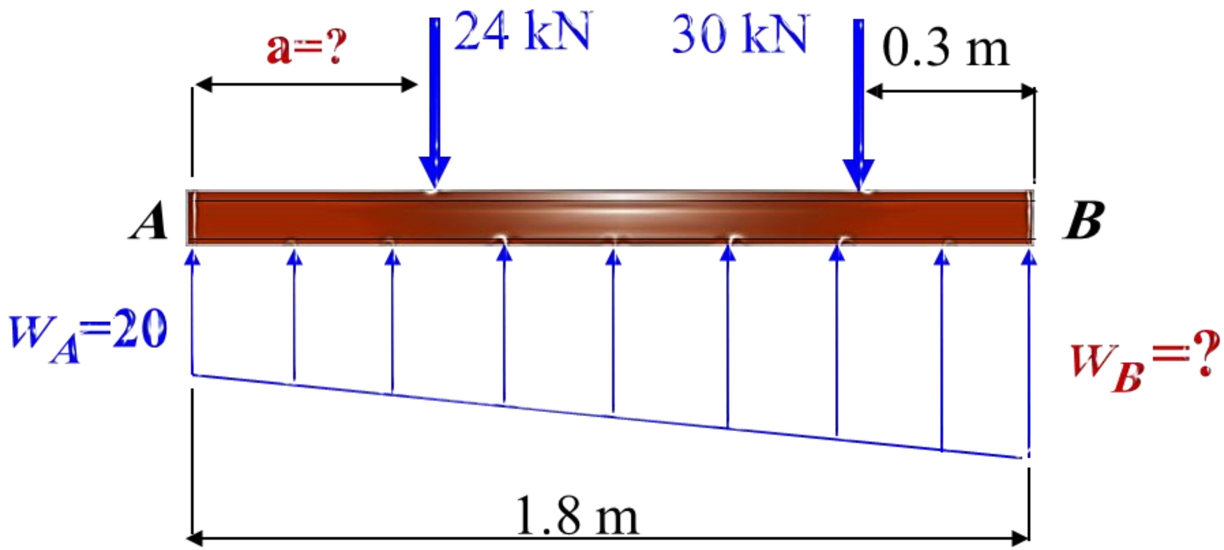
$$\bar{Y}\,(1740) = 55{,}440$$

$$\boxed{\bar{Y} = 31.9 \text{ mm}}$$

 Meysam4366@yahoo.com

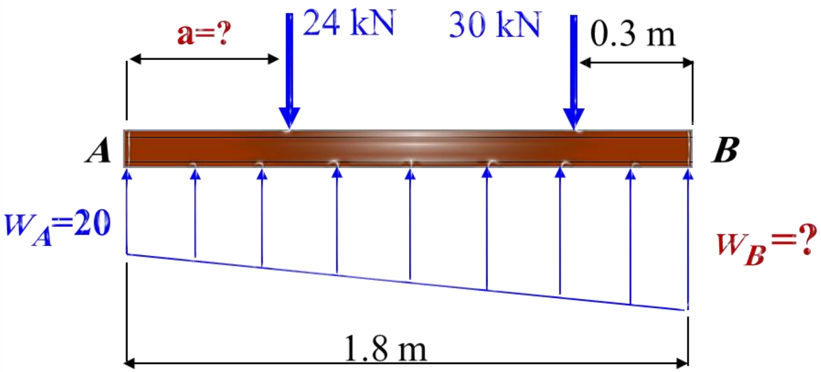
مثال ۷

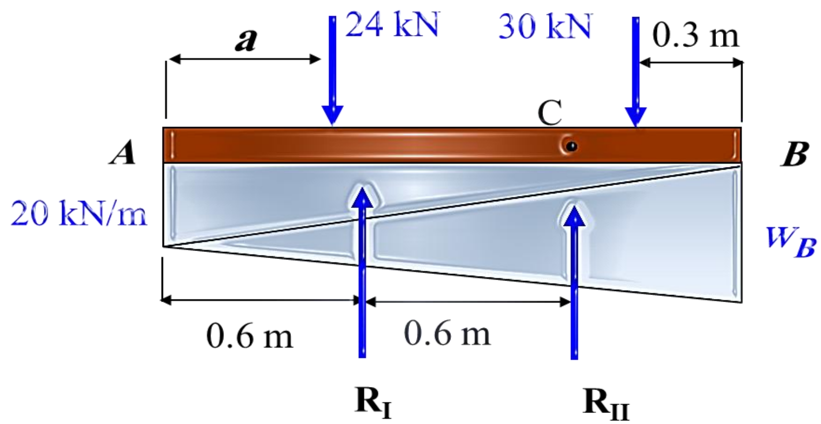
- در تیرمتعادل تحت بارگذاری نشان داده شده در شکل مطلوبست: مقدار W_B و فاصله A .



مثال ۷

• بارمعادل بارگسترده را در زیر تیر جایگزین می کنیم با فرض عبور R_{II} از نقطه C.





$$R_I = \frac{1}{2}(1.8\text{ m})(20\text{ kN/m}) = 18\text{ kN}$$

$$R_{II} = \frac{1}{2}(1.8\text{ m})(w_B\text{ kN/m}) = 0.9\ w_B\text{ kN}$$

$$+\circlearrowright\ \Sigma M_C = 0: (1.2 - a)\text{m} \times 24\text{ kN} - 0.6\text{ m} \times 18\text{ kN} - 0.3\text{m} \times 30\text{ kN} = 0$$

$$\boxed{a = 0.375\text{ m}}$$

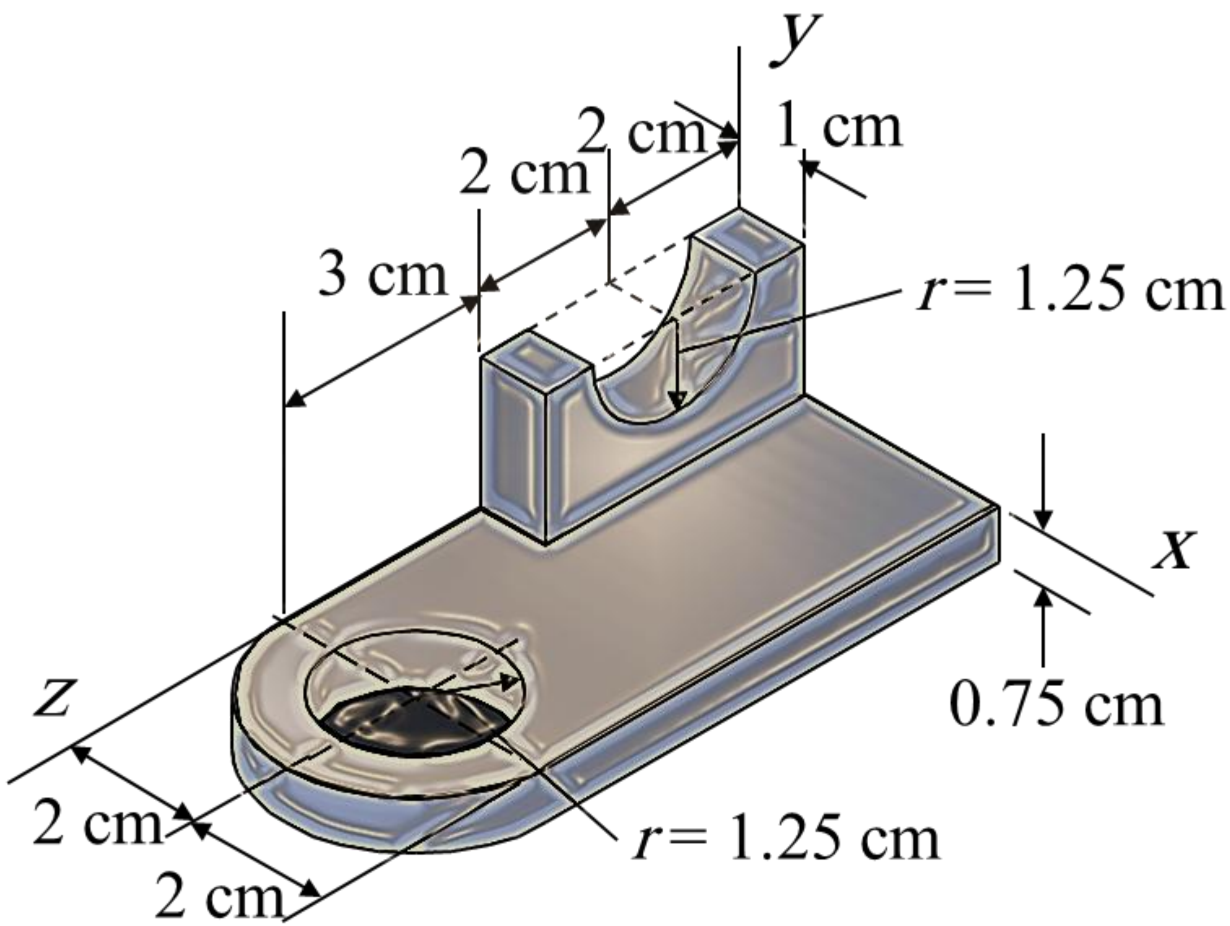
$$+\uparrow\ \Sigma F_y = 0:\ -24\text{ kN} + 18\text{ kN} + (0.9\ \mathbf{w}_B)\text{ kN} - 30\text{ kN} = 0$$

$$\boxed{\mathbf{w}_B = 40\text{ kN/m}}$$

Meysam4366@yahoo.com

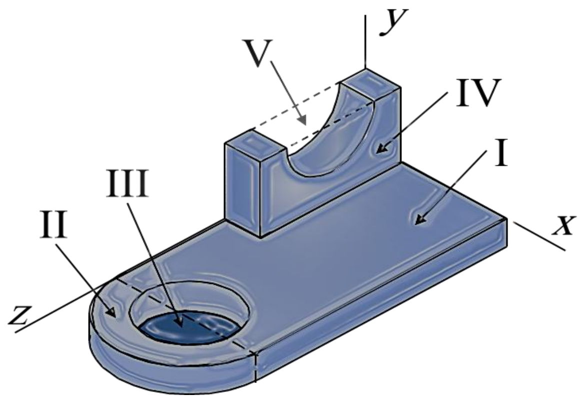
مثال ۸

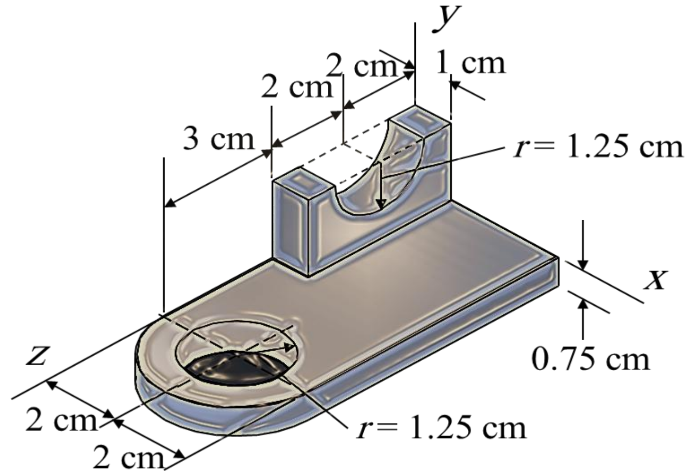
❑ برای قطعه نشان داده شده در شکل مطلوبست مختصات Z مرکز حجم جسم.



مثال ۸

- مشخص است که جسم مرکب بوده و نیازبه ساده سازی دارد.تقسیمات را بصورت زیر انجام می دهیم:



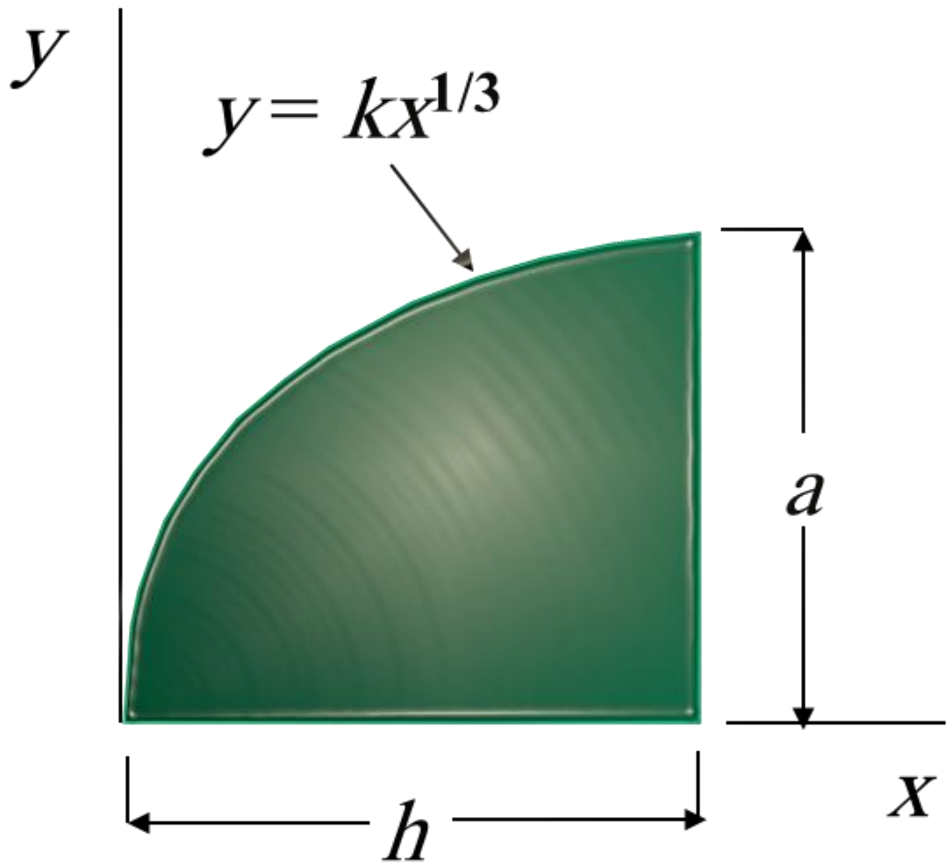


	V, cm^3	$\bar{z}$, cm	$\bar{z}$V, cm^4
I	$(4)(0.75)(7) = 21$	3.5	73.5
II	$(\pi/2)(2)^2 (0.75) = 4.7124$	$7+ [(4)(2)/(3\pi)] = 7.8488$	36.987
III	$-\pi(11.25)^2 (0.75)= -3.6816$	7	-25.771
IV	$(1)(2)(4) = 8$	2	16
V	$-(\pi/2)(1.25)^2 (1) = -2.4533$	2	-4.9088
Σ	27.576		95.807

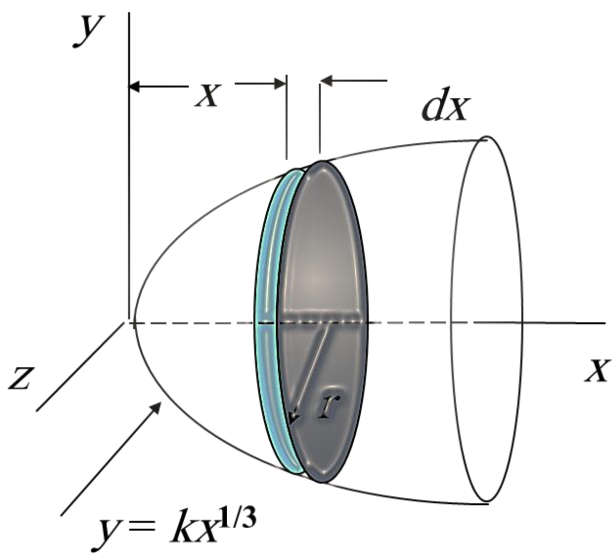
$$\bar{Z}\Sigma V = \Sigma \bar{z} V: \ \bar{Z}(27.576 \text{ cm}^3) = 95.807 \text{ cm}^4 \qquad \boxed{\bar{Z} = 3.47 \text{ cm}}$$

مثال ۹

- مطلوبست تعیین مرکز حجم حادث از دوران سطح مقابل حول محور X ها.



مثال ۹



- باتوجه به قضایای پاپوس - گلدینوس خواهیم داشت:

انتخاب یک جز از حجم با شعاع r ضخامت dx

$$dV = \pi\, r^2\, dx \qquad x_{el} = x$$

$$r = y = kx^{1/3}$$

$$dV = \pi\, k^2\, x^{2/3} dx$$

در : $x = h,\ y = a$ $\quad a = kh^{1/3}$ یا $k = a/h^{1/3}$

لذا: $$dV = \pi\, \frac{a^2}{h^{2/3}} x^{2/3} dx$$

- با انتگرال گیری حجم مشخص خواهد شد:

$$V = \int_0^h \pi \frac{a^2}{h^{2/3}}\; x^{2/3} dx \quad = \pi \frac{a^2}{h^{2/3}} \left[\frac{3}{5}\, x^{5/3}\right]_0^h$$

$$= \frac{3}{5}\, \pi\, a^2 h$$

مثال ۹

- همچنین خواهیم داشت:

$$\int x_{el}\, dV = \int_0^h x\left(\pi \frac{a^2}{h^{2/3}} x^{2/3}\, dx\right) = \pi \frac{a^2}{h^{2/3}} \left[\frac{3}{8} x^{8/3}\right]$$

$$= \frac{3}{8} \pi a^2 h^2$$

- حال خواهیم داشت:

$$\bar{x}V = \int \bar{x}\, dV: \quad \bar{x}\left(\frac{3}{5} \pi a^2 h\right) = \frac{3}{8} \pi a^2 h^2$$

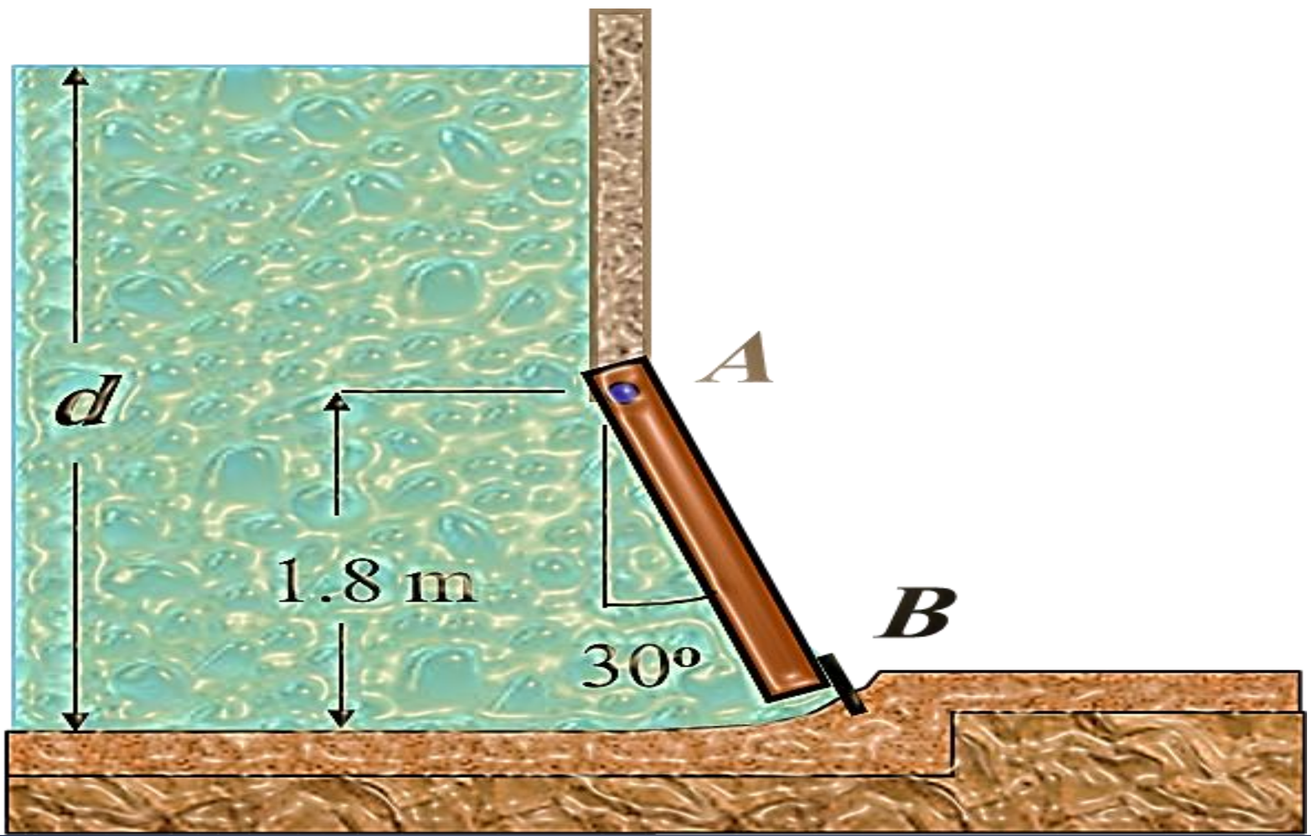
$$\boxed{\bar{x} = \frac{5}{8} h}$$

- شرایط مرزی ابتدایی:

$$\boxed{\bar{y} = 0 \quad \bar{z} = 0}$$

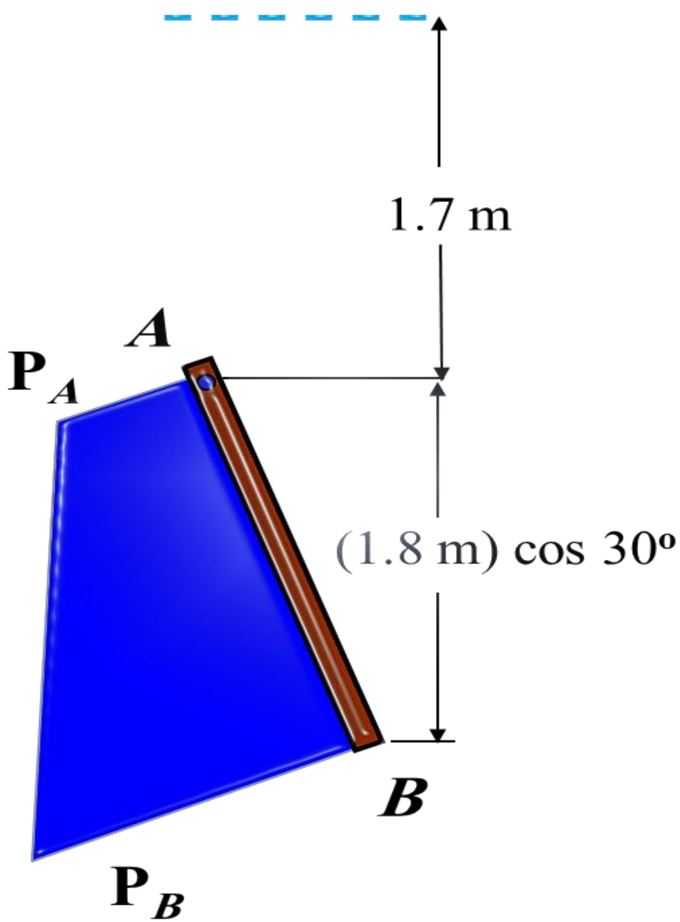
مثال ۱۰

- دریچه مربع شکل AB از سدآبی در نقطه A بصورت لولا و در B مفصل برشی است.ارتفاع آب 3.5 متر است.مطلوبست نیروهای وارد بر دریچه و تعیین واکنش در تکیه گاه B.



مثال ۱۰

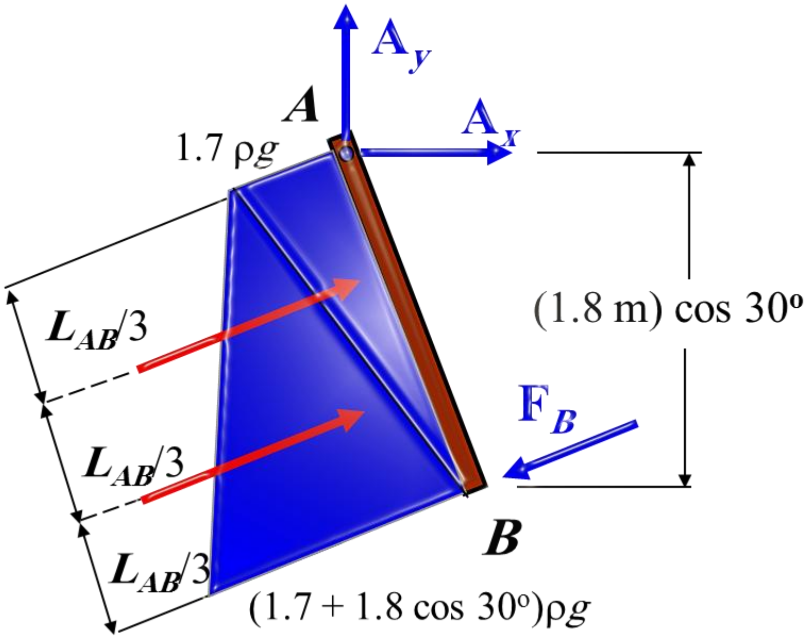
- ابتدا توزیع فشار آب را روی دریچه خواهیم داشت.می دانیم که با افزایش ارتفاع فشار بصورت خطی افزایش می یابد. سپس نیروی معادل،نیروی گسترده را اعمال می کنیم ومعادلات تعادل را بکارمی بریم. یادمان باشد رسم دیاگرام جسم آزاد به حل مسایل کمک فراوانی خواهد کرد.



- فشاردرنقاط A و B

$$P_A = 1.7\,\rho g$$
$$P_B = (1.7 + 1.8\cos 30^{\circ})\rho g$$

مثال ۱۰



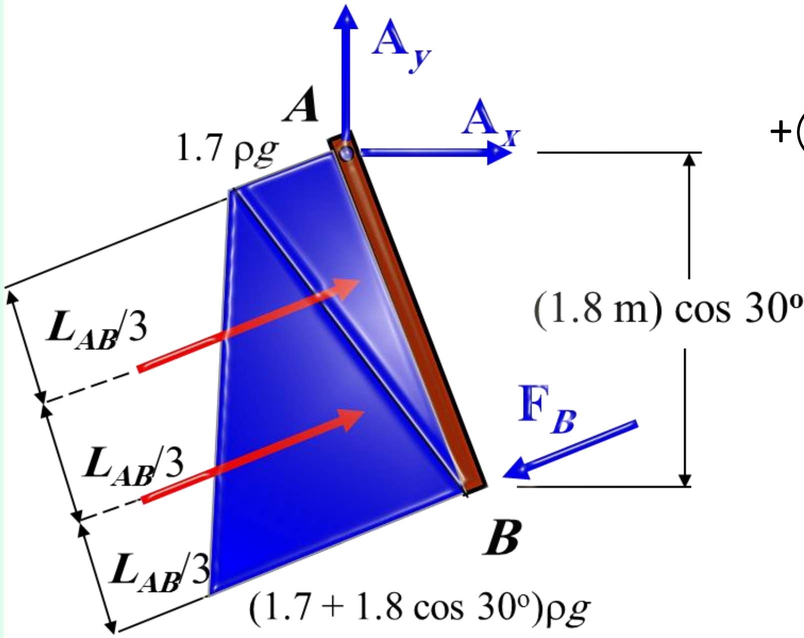
- نیروی آب پشت دریچه

$$P = \frac{1}{2} Ap = \frac{1}{2} A(\rho g h)$$

$$P_1 = \frac{1}{2}(1.8\ \mathrm{m})^2(62.4\ \mathrm{N/m^3})(1.7\ \mathrm{n}) = 171.85\ \mathrm{N}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(1.8\ \mathrm{m})^2(62.4\ \mathrm{N/m^3})(1.7 + 1.8\cos 30^\circ)\mathrm{m} = 329.43\ \mathrm{N}$$

مثال ۱۰



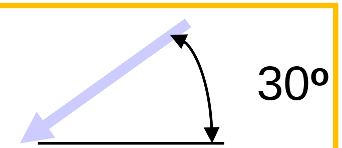
- معادلات تعادل:

$$+\circlearrowright \Sigma M_A = 0: \quad \frac{1}{3}(L_{AB})P_1 + \frac{2}{3}(L_{AB})P_2 - L_{AB}F_B = 0$$

$P_1 = 171.85\text{ N}$ $\qquad$ $P_2 = 329.43\text{ N}$

$$\frac{1}{3}(171.85\text{ N}) + \frac{2}{3}(329.43\text{ N}) - F_B = 0 \qquad F_B = 276.90\text{ N}$$

$$\boxed{\mathbf{F_B = 277\text{ N}}}$$



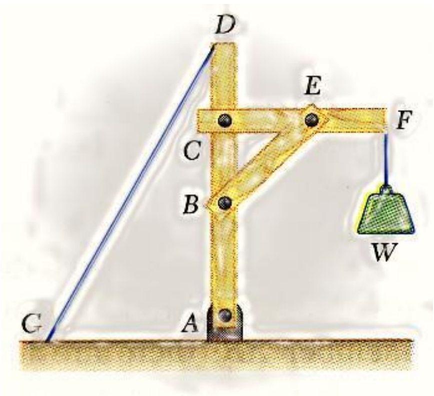
6

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

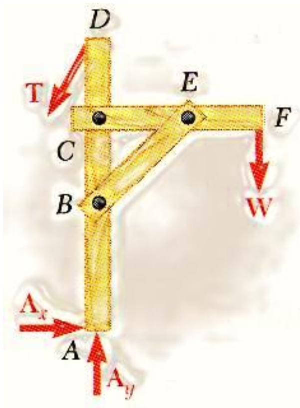
Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.SC.

تحلیل سازه ها



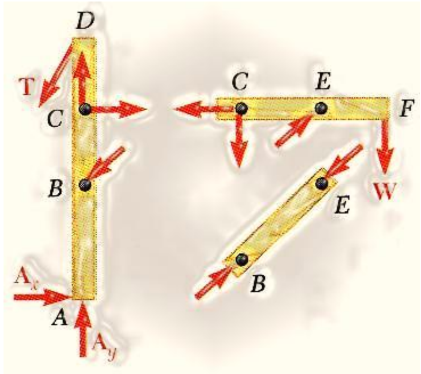
- درتعادل سازه هاي متشكل ازچندقسمت نه تنها بايد نيروهاي خارجي واردبرسازه رامشخص كرد بلكه بايد نيروهايي راكه قسمتهاي مختلف سازه را به هم متصل نگه مي دارند بدست آورد،اگركل سازه را درنظر بگيريم اين نيروهارا نيروي هاي داخلي مي نامند.



- مطابق قانون سوم نيوتن: نيروهاي عمل وعكس العمل جسمهايي كه نيروبه آنها وارد مي شود داراي بزرگي برابر وخط اثريكسان ودرجهت مخالف اند ،مطابقت دارد.

- سه گروه مهم سازه هاي مهندسي عبارتند از:

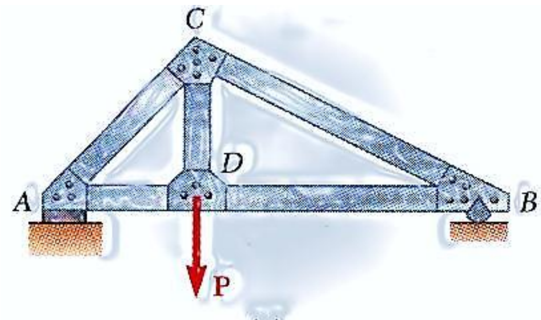
a) **قابها** : سازه هاي ساكن وكاملامقيدند كه براي تحمل بارطراحي مي شوند.درقابها دست كم يك عضو چندنيرويي وجود دارد.

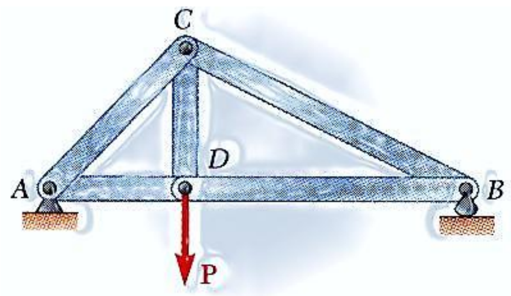


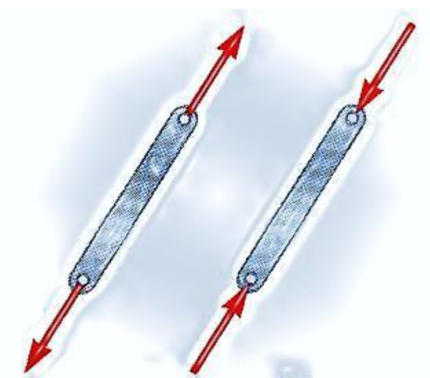
b) **خرپاها**: سازه هاي معمولا مقيد كه درآنها اعضا حداكثر دونيرويي اند،يعني عضوهايي كه دونيروي برابر ودرخلاف جهت،كه هردو درامتداد همان عضو قرار دارند برآنها وارد مي شود.

c) **ماشينها** : اين سازه ها براي انتقال وتغيير نيروها طراحي مي شوند وسازه هاي هستند كه اجزاي متحرك دارند.ماشينها نيز دست كم يك عضو چند نيرويي دارند.

تعریف یک خرپا







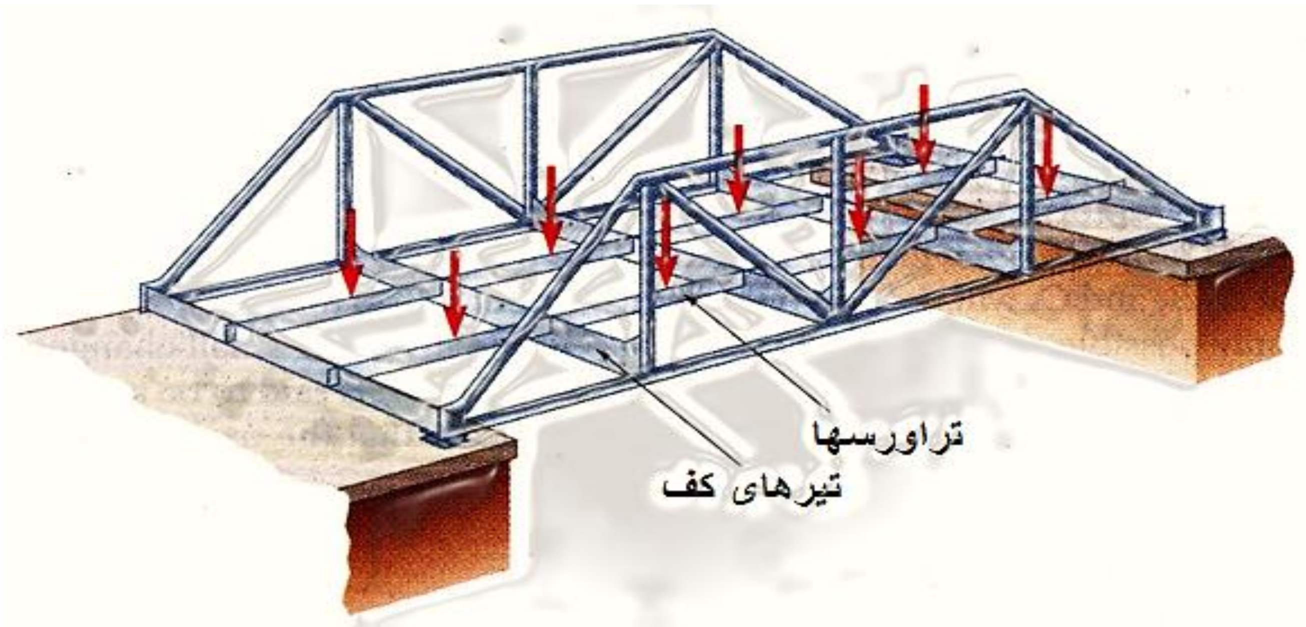
- خرپا شامل عضوهاي مستقيمي است كه درمفصلها به يكديگر متصل اند.عضوهاي خرپا تنها ازدوسر به يكديگر متصل اند،بنابراين هيچ عضوي درمفصل ادامه پيدا نمي كند.

- بيشترسازه هاي واقعي ازاتصال چندين خرپا به هم ساخته ميشوند ودرمجموع يك قاب فضايي راتشكيل مي دهند.هرخرپا براي تحمل بارهايي كه درصفحه آن اثر ميكنند طراحي مي شود.

- اگرچه اعضا توسط پيچ يا جوش بهم متصل اند امافرض ميشود بصورت پيني هستند.لذا كوپلي به اعضا وارد نمي شود وهر عضو به منزله يك عضو دونيرويي وكل خرپا رابصورت گروهي ازپينها وعضوهاي دونيرويي درنظرميگيريم.

- وقتي نيروها به كشيدن عضوتمايل دارند **عضورا كششي** گويند و وقتي نيروها عضو را تحت فشار قرار مي دهند آنرا **عضو فشاري** گويند.

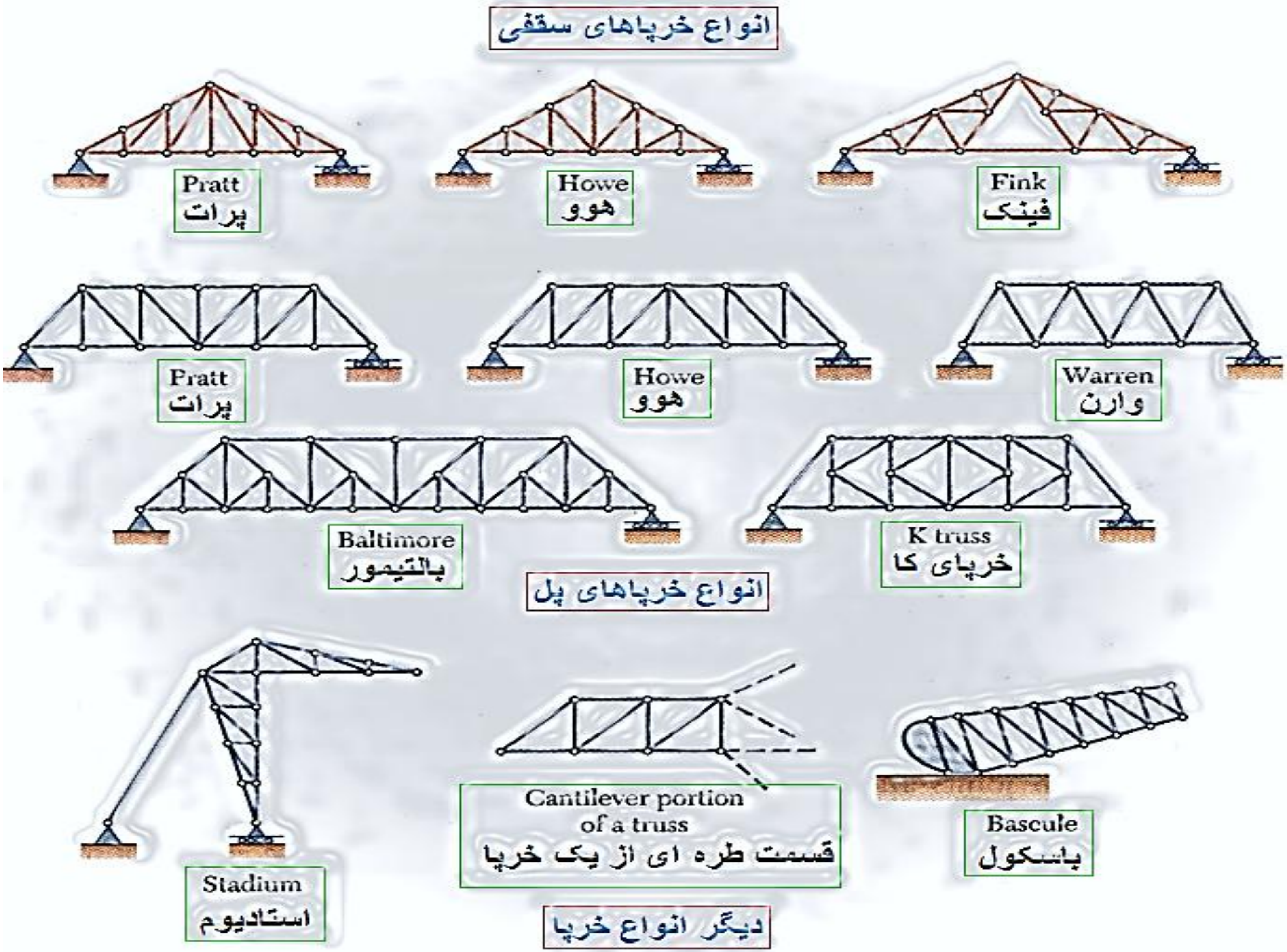
تعریف یک خرپا



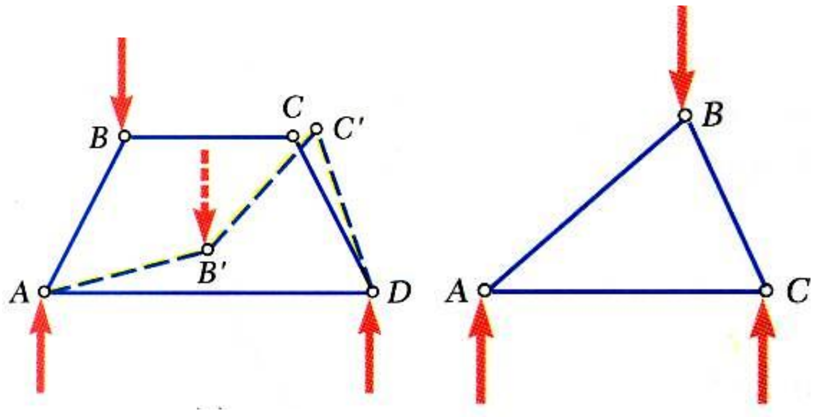
بطور کلي عضوهاي خرپا باريك اند وبارجانبي اندكي را مي توانند تحمل كنند، بنابراين همه بارها بايد بر مفصلها واردشود يا بارهاي گسترده را توسط سيستم كف(متشكل از تيرهاي عرضي وتيرهاي كف) به مفصلها انتقال داد.

معمولا فرض مي شود نضف وزن هر عضو به هر مفصل در دو انتها وارد مي شود.

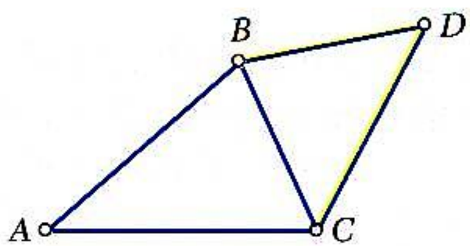
تعریف یک خرپا



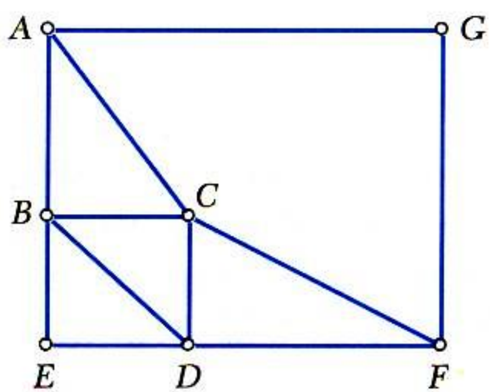
خرپاهاي ساده



- خرپاي صلب تحت بارهاي وارده فرونميريزد.تنها تغيير شكل ممكن براي اين خرپاها تغيير اندك طول عضوهاست.



- خرپاهايي را كه بصورت مثلثي با اضافه شدن دو عضو(DB , DC) ويك مفصل(D) به خرپاي پايه(ABC) رشد مي كنند را **خرپاي ساده** گويند.



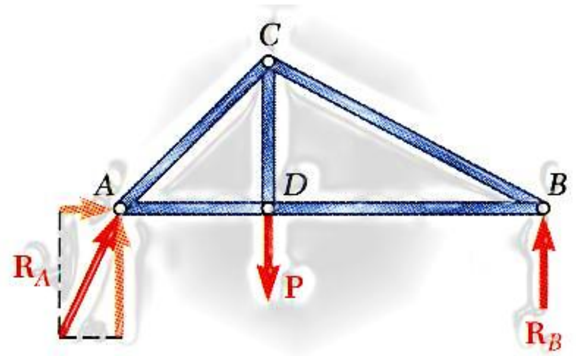
- دريك خرپاي ساده تعداد كل عضوها برابر است با:

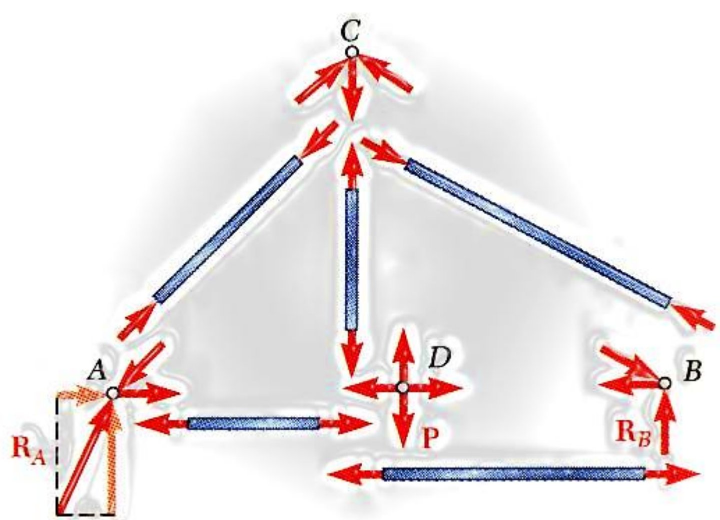
$$m=2n-3$$

كه درآن n تعداد مفاصل است.

$$m=2(7) - 3=11$$

تحليل خرپاها به روش مفاصل

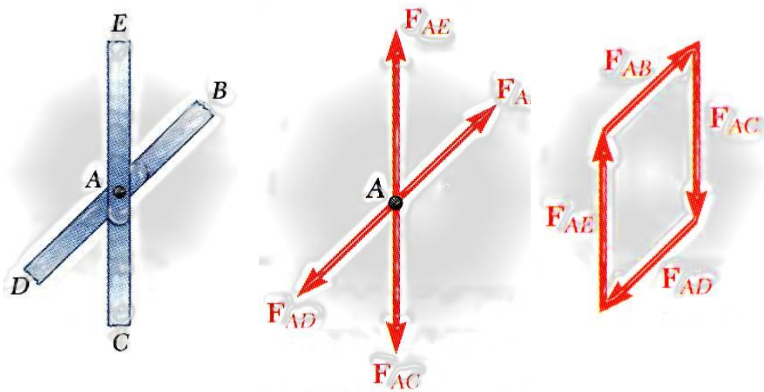




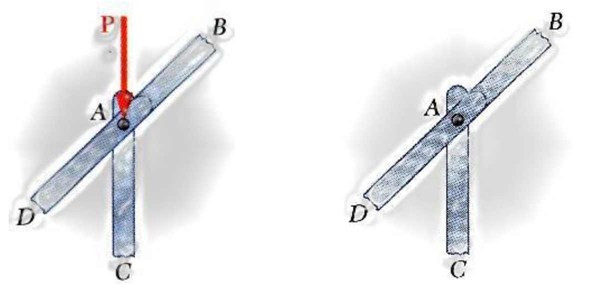
- اعضا را جدا كرده وبراي هر پين و عضو جداگانه نمودار جسم آزاد را رسم مي كنيم.
- چون كل خرپا درتعادل است،لذا هرپين نيزبايد درتعادل باشد.
- به هريك ازاين اعضادو نيرواثر مي كند،كه هريك ازآنها به يك سرعضو وارد مي شود؛اين نيروها بزرگي برابر وخط اثريكسان دارند ودرخلاف جهت يكديگرند.
- چون خط اثركليه نيروهاي داخلي خرپا معلومند تحليل آن به محاسبه نيروها درعضوها وتعيين كششي وفشاري بودن آنها خلاصه مي شود.
- اگرخرپا n پين داشته باشد آنگاه $2n$ ومعادله تعادل خواهد داشت،كه با $2n$ مجهول حل مي شوند.درخرپاي ساده $m=2n-3$ يعني $2n=m+3$ كه تعداد مجهولات برابر تعداد اعضا بعلاوه 3 خواهد بود.
- واكنشهاي تكيه گاهي (R_A,R_B) را نيز با درنظرگرفتن نمودار جسم آزاد پينها مي توان بدست آورد.

مفاصل تحت شرايط بارگذاري خاص

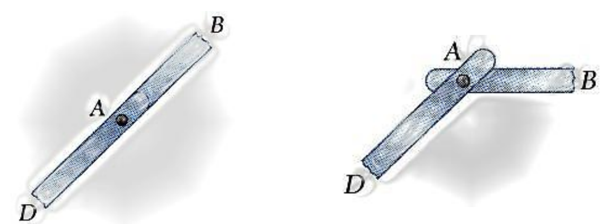
- نيروهادرعضوهاي متقابل بايد برابر باشند. بنابراين چندضلعي نيروي مربوط به آنها بايد يك متوازي الاضلاع تشكيل بدهد.



- وقتي دوعضو در امتداديك خط قرار دارند وبارP درامتداد عضو سوم وارد شود،نيروي دو عضومتقابل بايد برابر بوده و در عضو سوم برابرP خواهد بود.
- اگر بار به مفصل وارد نشودعضو AC صفرنيرويي است.



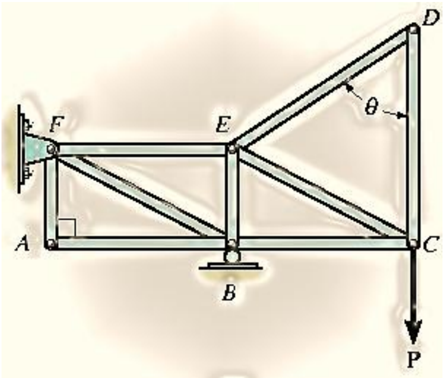
- نيروي اعضا در مفاصل دوعضوي وقتي دوعضو در يك راستا باشند برابر است وياوقتي كه اعضا در يك راستا نباشند بايد صفر نيروي باشند تا نيروهايشان برابر باشد.

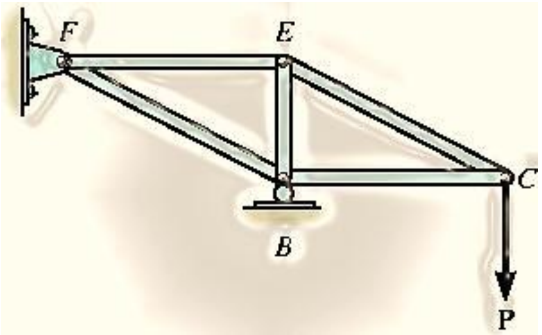


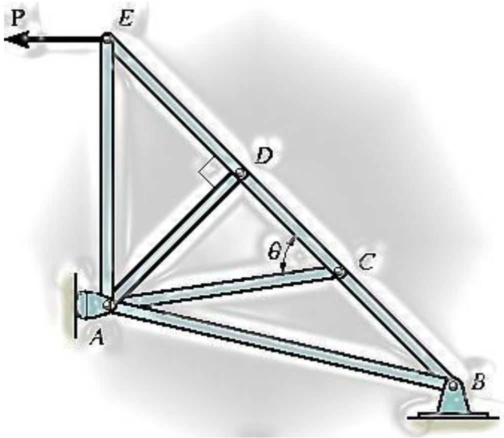
- تشخيص مفصلهايي كه تحت شرايط بارگذاري خاص اند تحليل خرپاي را آسان ميكند.

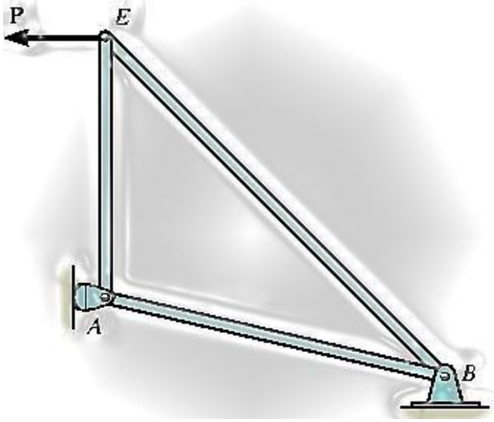
مفاصل تحت شرايط بارگذاري خاص

- جدا كردن اعضا صفر نيرويي براي ساده كردن فرآيند تحليل.



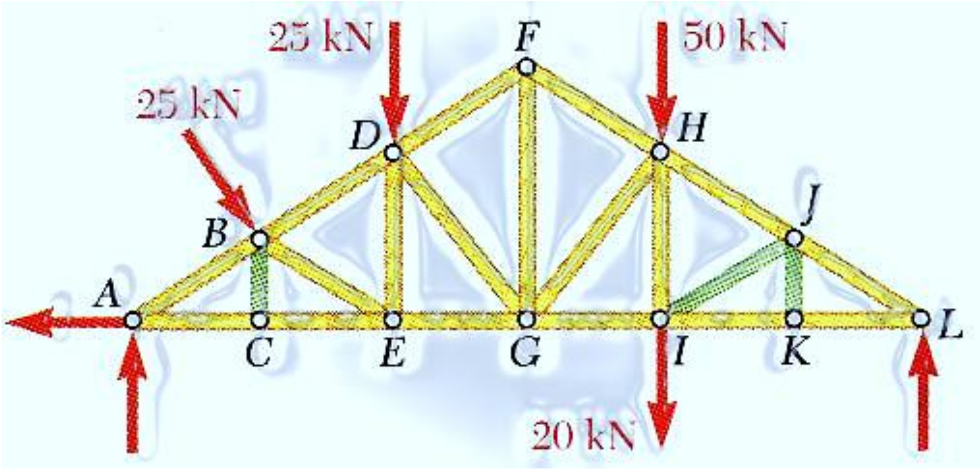






مفاصل تحت شرايط بارگذاري خاص

- در مفصل C سه عضو وجود دارد كه دوعضو هم خط و تحت اثر هيچ نيروي خارجي نيستند. بنابراين عضو BC صفر نيرويي است.

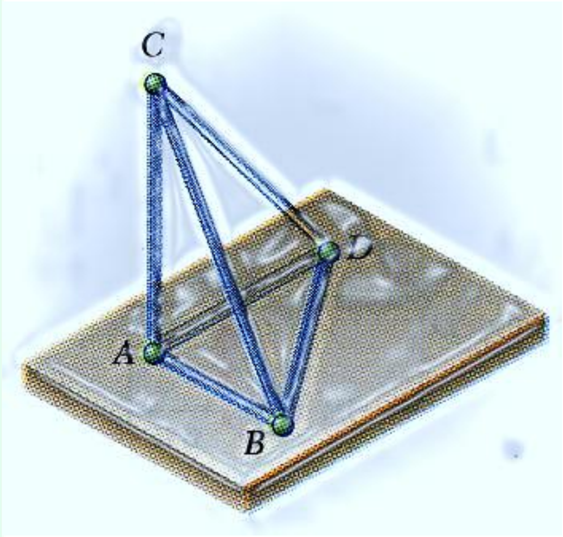


- در مفصل K سه عضو وجود دارد كه دوعضو هم خط و تحت اثر هيچ نيروي خارجي نيستند. بنابراين عضو KJ صفر نيرويي است.

- عضو IJ صفر نيرويي است زيرا خط اثر نيروي 20kN از عضو HI خواهد گذشت.

- عضو FG باتوجه كشش موجود در اعضاء FH , DF يك عضو فشاري خواهد بود وصفر نيرويي نخواهد بود.

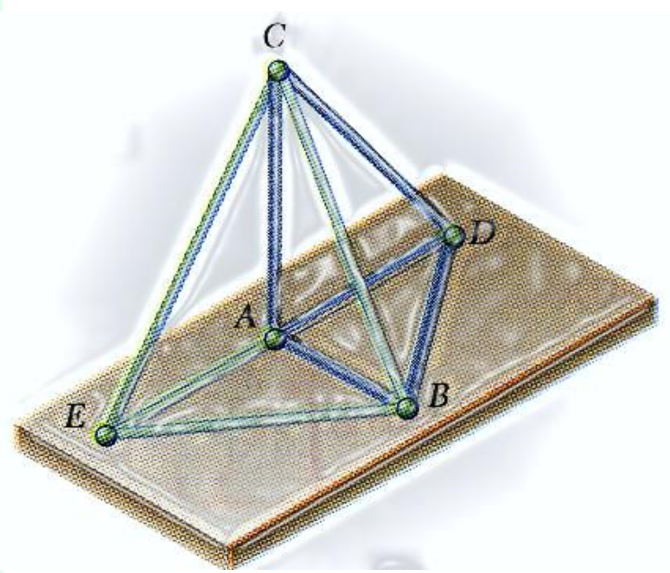
خرپاهاي فضايي



- چهاروجهي اوليه يك خرپاي فضايي داراي شش عضو است كه درچهار مفصل بهم متصل شده اند.
- هربار كه سه عضو اضافه شود تعداد مفاصل يكي افزايش مي يابد.
- دريك خرپاي ساده فضايي تعداد كل عضوها برابر است با:

$$m=3n-6$$

كه درآن n تعداد مفاصل است.

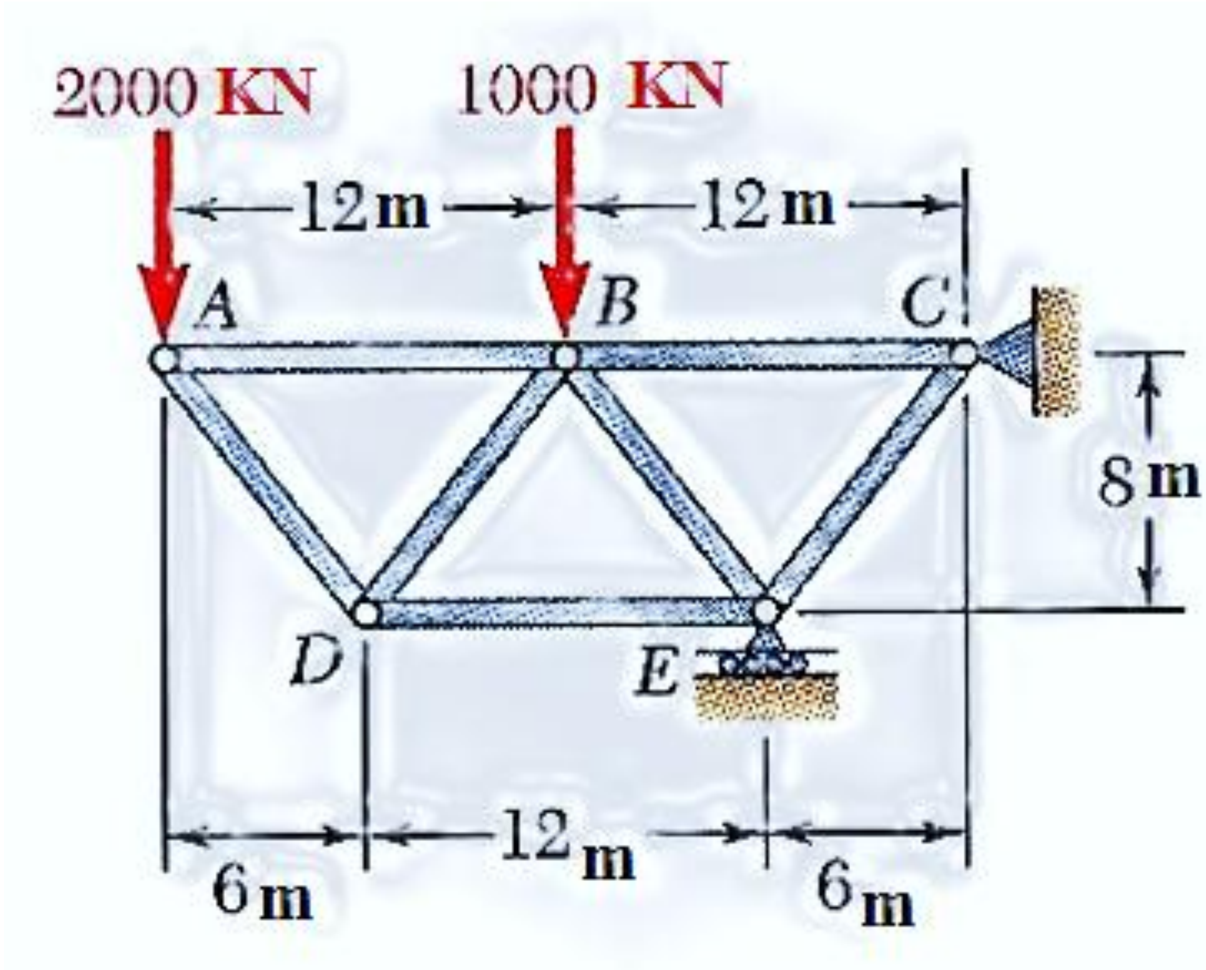


- تكيه گاهها شش عكس العمل مجهول ايجاد مي كنند.كه بايد حل شش معادله بيان كننده تعادل خرپاي فضايي بدست مي آيند.
- براي اجتناب از حل دستگاههاي معادلات بايد دقت شود تا مفاصل طوري انتخاب شوند كه هيچ يك از آنها شامل بيش از سه نيروي مجهول نباشد.

Meysam4366@yahoo.com

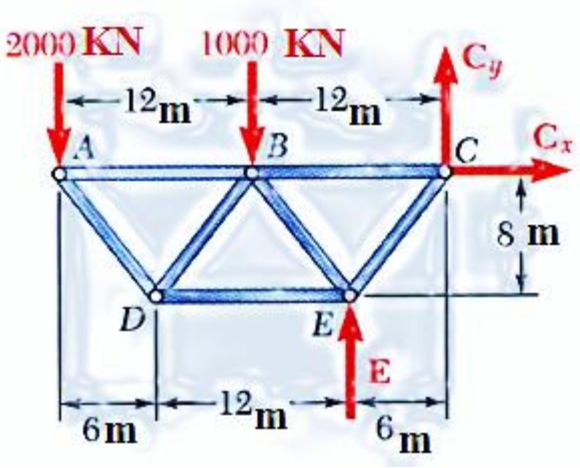
مثال ۱

❑ بااستفاده از روش مفاصل ،نيروي هريك از اعضاي خرپا را بدست آوريد.



Meysam4366@yahoo.com

مثال ١



✓ نمودار جسم آزاد كل خرپا رارسم مي كنيم؛نيروهاي خارجي وارد بر جسم آزاد عبارتند از بارهاي وارد شده وعكس العملها در C و E .

معادلات تعادل عبارتند از:

$$\sum M_C = 0$$

$$= (2000\ KN)(24\ \text{m}) + (1000\ KN)(12\ \text{m}) - E(6\ \text{m})$$

$$\boxed{E = 10{,}000\ \text{KN} \uparrow}$$

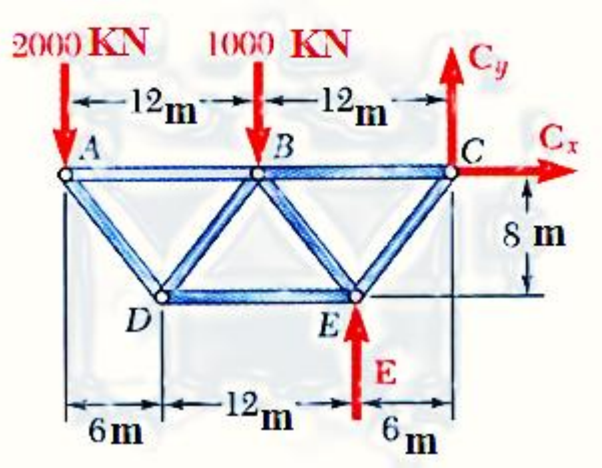
$$\sum F_x = 0 = C_x$$

$$\boxed{C_x = 0}$$

$$\sum F_y = 0 = -2000\ \text{KN} - 1000\ \text{KN} + 10{,}000\ \text{KN} + C_y$$

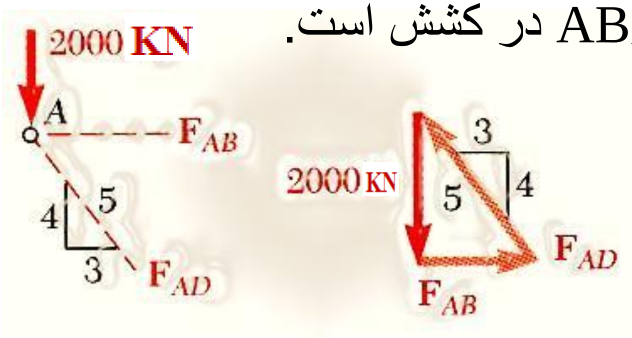
$$\boxed{C_y = 7000\ \text{KN} \downarrow}$$

مثال ۱



✓ مفصل A تحت تاثير دونيروي F_{AD},F_{AB} است بااستفاده از مثلث نيرو خواهيم داشت:

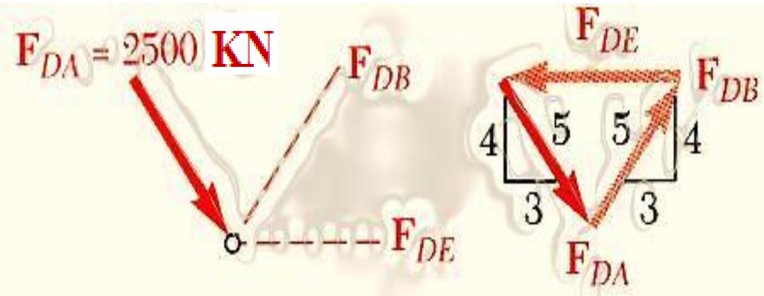
عضو AD درفشار وAB در كشش است.



$$\frac{2000\ \text{KN}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{AB} &= 1500\ \text{KN}\ \ T \\ F_{AD} &= 2500\ \text{KN}\ \ C \end{aligned}}$$

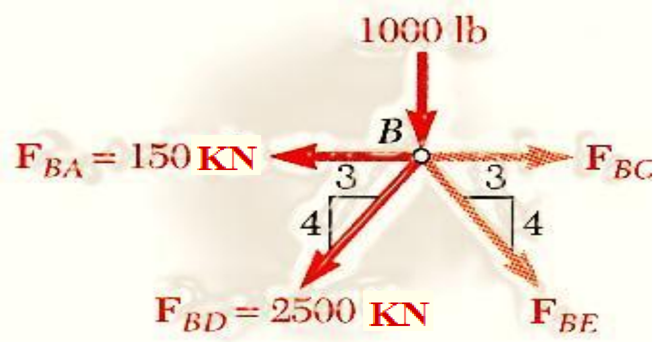
✓ درمفصل D نيروي AD تعيين گرديد،بااستفاده از مثلث نيرو خواهيم داشت:



$$F_{DB} = F_{DA}$$
$$F_{DE} = 2\left(\frac{3}{5}\right)F_{DA}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{DB} &= 2500\ \text{KN}\ \ T \\ F_{DE} &= 3000\ \text{KN}\ \ C \end{aligned}}$$

مثال ۱



✓ درمفصل B بيش از سه نيرو واردمي شود.نيروهاي F_{BC} , F_{BE} از تعادل تعيين مي شوند.

$$\sum F_y = 0 = -1000 - \tfrac{4}{5}(2500) - \tfrac{4}{5}F_{BE}$$

$$F_{BE} = -3750 \text{ KN}$$

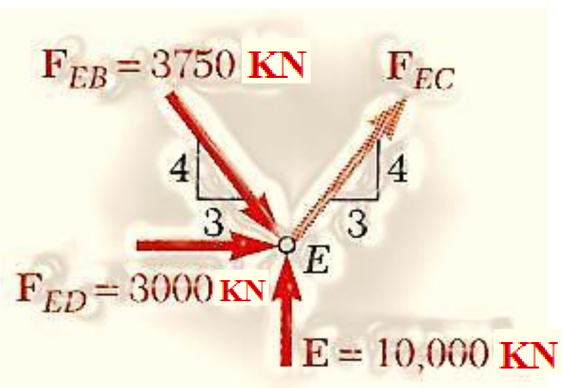
$$\boxed{F_{BE} = 3750 \text{ KN } \; C}$$

$$\sum F_x = 0 = F_{BC} - 1500 - \tfrac{3}{5}(2500) - \tfrac{3}{5}(3750)$$

$$F_{BC} = +5250 \text{ KN}$$

$$\boxed{F_{BC} = 5250 \text{ KN } \; T}$$

✓ درمفصل E نيروي مجهول F_{CE} با نوشتن معادله تعادل در جهت Y بدست مي آيد.



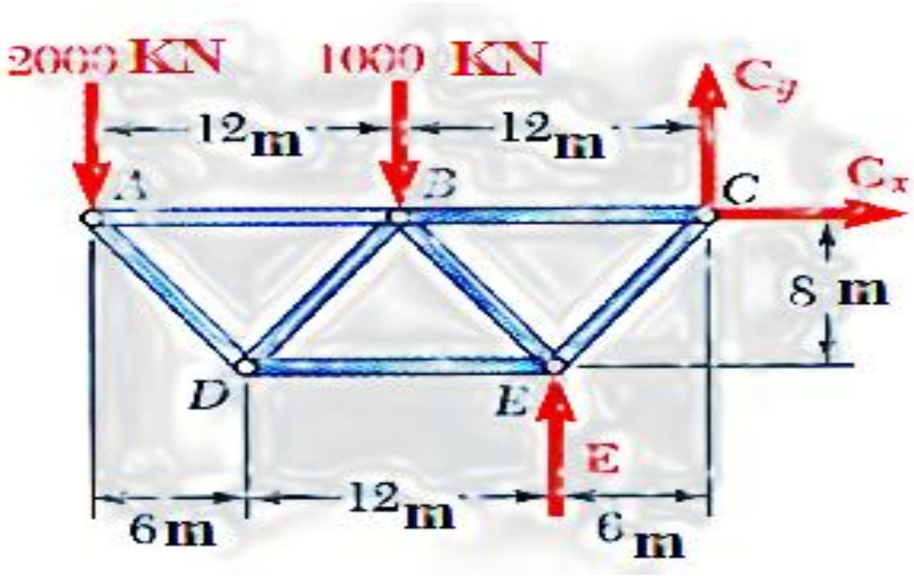
$$\sum F_x = 0 = \tfrac{3}{5}F_{EC} + 3000 + \tfrac{3}{5}(3750)$$

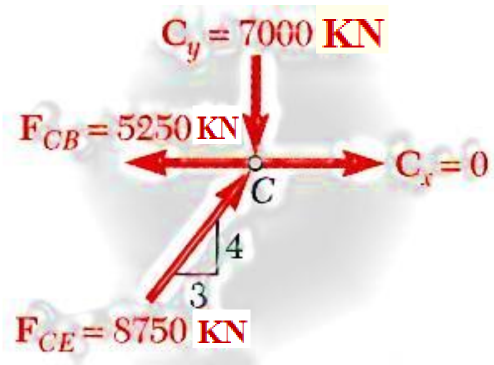
$$F_{EC} = -8750 \text{ KN}$$

$$\boxed{F_{EC} = 8750 \text{ KN } \; C}$$

مثال ١

✓ باستفاده از مقادير محاسبه شده F_{CE} , F_{CB} مي توان واكنشهاي تكيه گاه C را تعيين نمود.

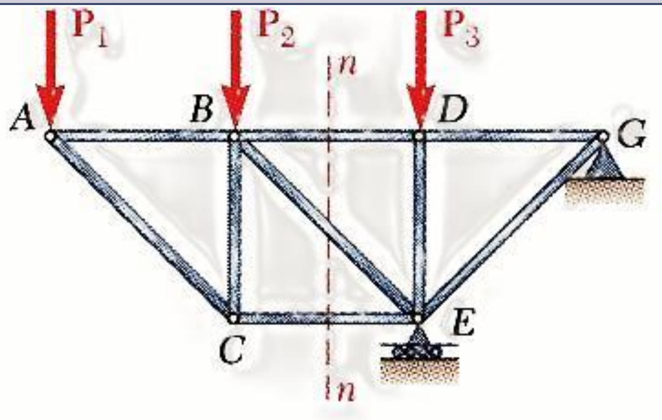




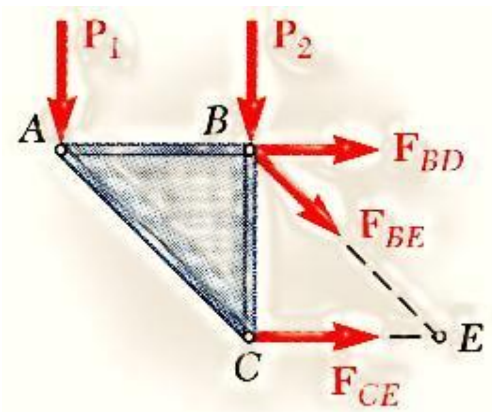
$$\sum F_x = -5250 + \tfrac{3}{5}(8750) = 0 \quad ''(\mathrm{O.K})''$$

$$\sum F_y = -7000 + \tfrac{4}{5}(8750) = 0 \quad ''(\mathrm{O.K})''$$

تحليل خرپاها به روش مقاطع



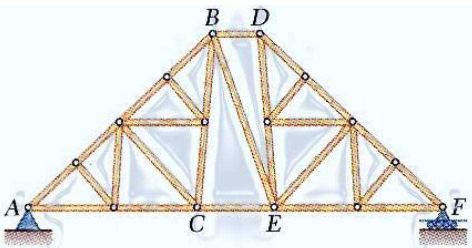
- وقتي نيرو تنها در يك عضو مد نظر باشد روش مقطع زدن بسيار كارآمدتر از روش مفاصل خواهد بود.
- براي تعيين نيرو در عضو BD در خرپاي مذبور با زدن يك مقطع مانند مقابل قسمتي از خرپا را جدا كرده و دياگرام جسم آزاد آنرا رسم مي كنيم.
- عضو مورد نظر بايد دراين مقطع زدن قطع گرديده باشد.
- آن تكه ازخرپا راانتخاب مي كنيم كه نيروهاي مجهول كمتري (اعم از واكنشهاي تكيه گاهي) داشته باشد.
- درنوشتن معادله تعادل براي تعيين نيروي مورد نظر آن معادله رابكار مي بريم كه تنها حل يك معادله يك مجهول ما را به جواب مورد نظر برساند.

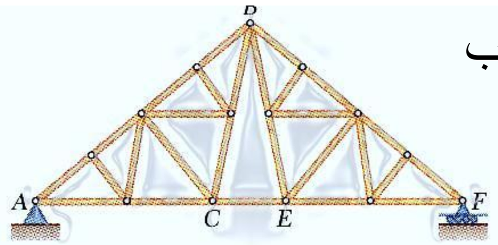


$$\boxed{\sum M_E = 0}$$

- دراين قسمت خرپا نوشتن معادله تعادل لنگر حول E كوتاهترين راه حل مي باشد.

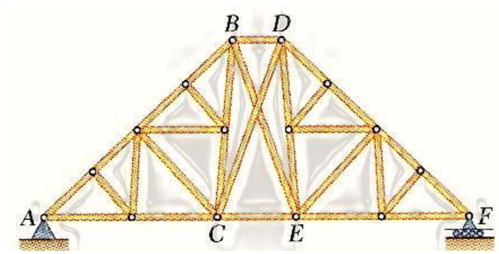
خرپاهاي ساخته شده از چند خرپاي ساده





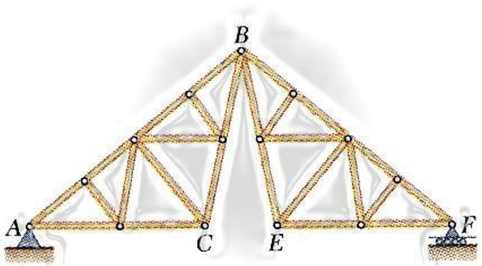
- خرپاهاي تركيبي ازلحاظ استاتيكي معين،صلب وكاملا مقيد هستند:

$$m = 2n - 3$$



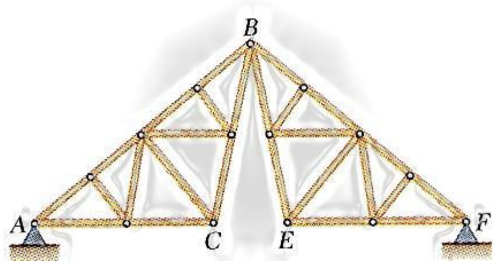
- درخرپاهاي نامعين استاتيكي وصلب:

$$m > 2n - 3$$



غیرصلب

$m < 2n - 3$



صلب

$m < 2n - 4$

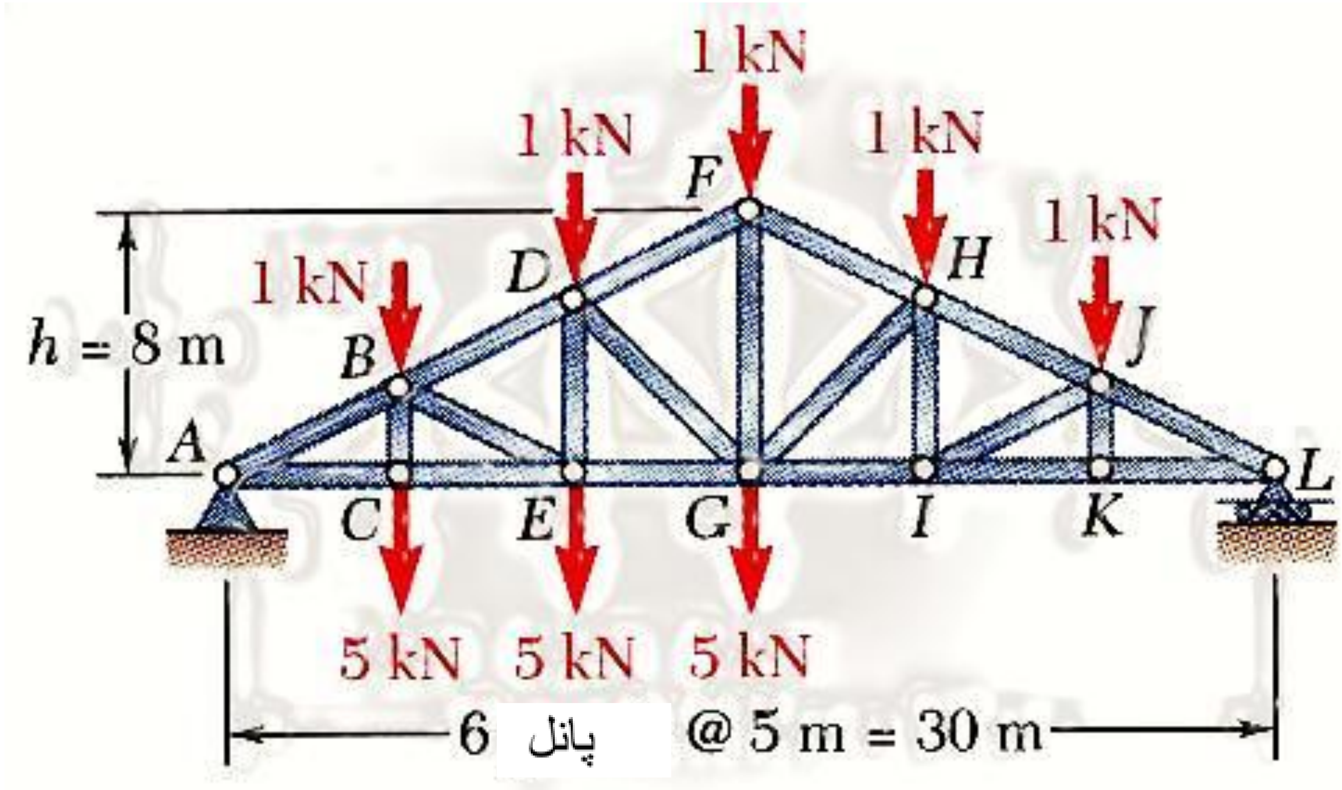
- براي يك خرپاي صلب داشتن يك واكنش تكيه گاهي اضافي ممكن است ضروري باشد.

- بطوركلي اگرعكس العمهادرتكيه گاهها شامل **r مجهول** باشند براي معين استاتيكي و صلب ومقيد بودن شرط مقابل لازم است،اما اين شرط براي خرپاي جداشده از تكيه گاه كافي نيست.

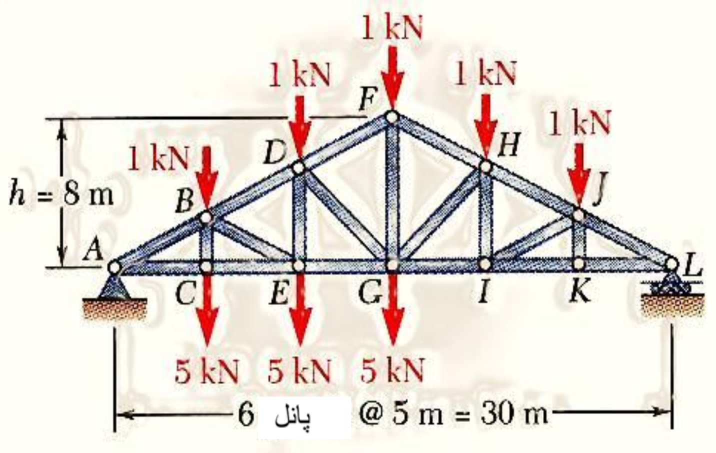
$$\boxed{m + r = 2n}$$

مثال ۲

- درخرپاي سقفي زير نيرو در عضوهاي FH و GH و GI را تعيين كنيد.



مثال ۲



✓ بارسم جسم آزاد کل خرپا عکس العملهاي تكيه گاهي را در A و L پيدا مي كنيم.

$$\sum M_A = 0 = -(5\text{ m})(6\text{ kN}) - (10\text{ m})(6\text{ kN}) - (15\text{ m})(6\text{ kN}) - (20\text{ m})(1\text{ kN}) - (25\text{ m})(1\text{ kN}) + (25\text{ m})L$$

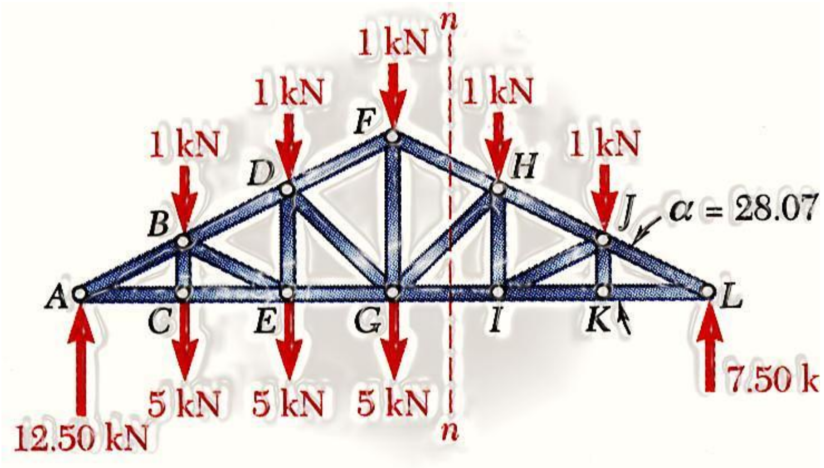
$$L = 7.5\text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_y = 0 = -20\text{ kN} + L + A$$

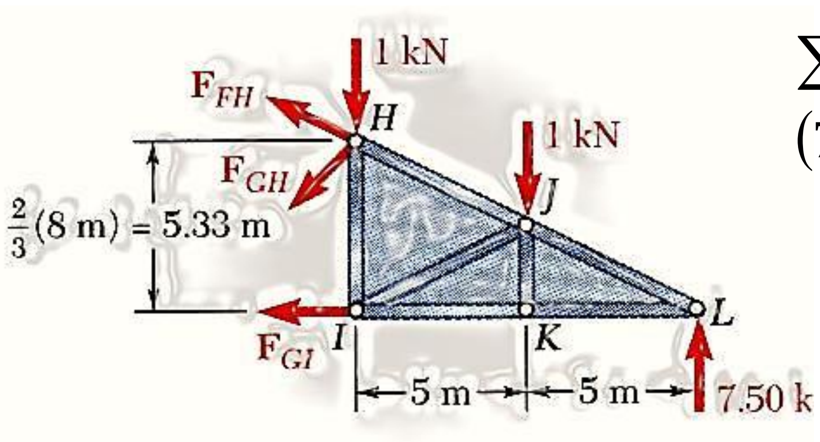
$$A = 12.5\text{ kN} \uparrow$$

مثال ۲

✓ با زدن مقطع مناسب اعضاي مورد نظر را قطع كرده و در محل برش نمودار جسم آزاد را رسم مي كنيم



✓ بابرقراري معادله تعادل مناسب براي هر عضو نيروي مجهول در آن را تعيين مي كنيم.



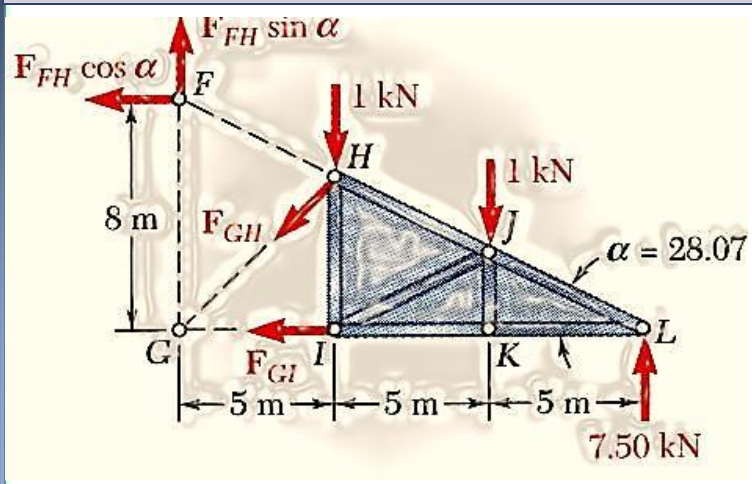
$$\sum M_H = 0$$

$$(7.50\text{ kN})(10\text{ m}) - (1\text{ kN})(5\text{ m}) - F_{GI}(5.33\text{ m}) = 0$$

$$F_{GI} = +13.13\text{ kN}$$

$$\boxed{F_{GI} = 13.13\text{ kN}\ \ T}$$

مثال ۲



$$\tan\alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8\text{ m}}{15\text{ m}} = 0.5333 \qquad \alpha = 28.07°$$

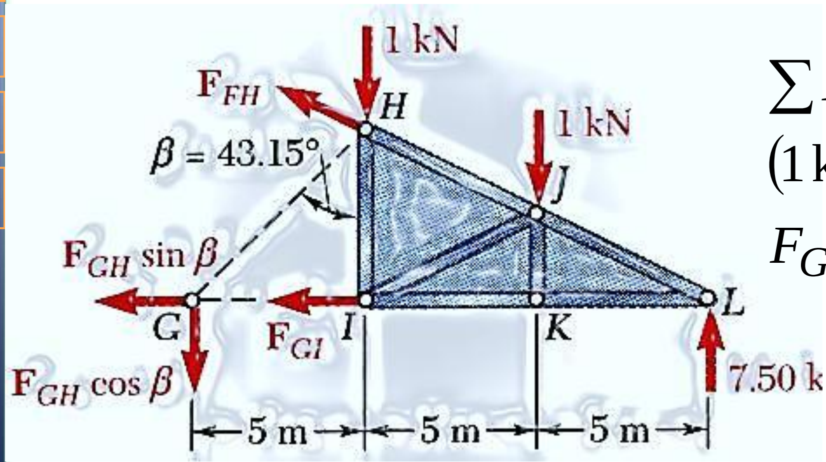
$$\sum M_G = 0$$

$$(7.5\text{ kN})(15\text{ m}) - (1\text{ kN})(10\text{ m}) - (1\text{ kN})(5\text{ m}) + (F_{FH}\cos\alpha)(8\text{ m}) = 0$$

$$F_{FH} = -13.82\text{ kN}$$

$$\boxed{F_{FH} = 13.82\text{ kN}\ \ C}$$

$$\tan\beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5\text{ m}}{\frac{2}{3}(8\text{ m})} = 0.9375 \qquad \beta = 43.15°$$



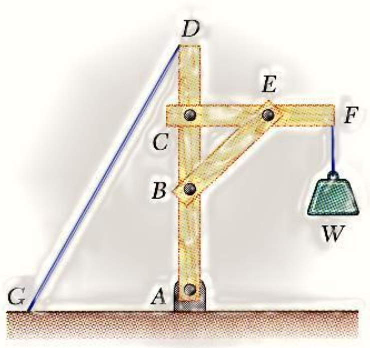
$$\sum M_L = 0$$

$$(1\text{ kN})(10\text{ m}) + (1\text{ kN})(5\text{ m}) + (F_{GH}\cos\beta)(10\text{ m}) = 0$$

$$F_{GH} = -1.371\text{ kN}$$

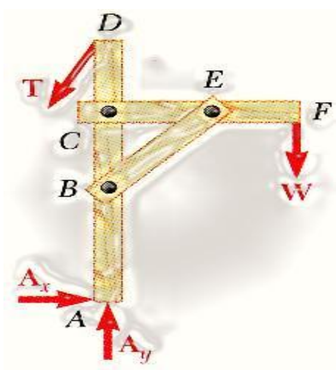
$$\boxed{F_{GH} = 1.371\text{ kN}\ \ C}$$

تحليل قابها



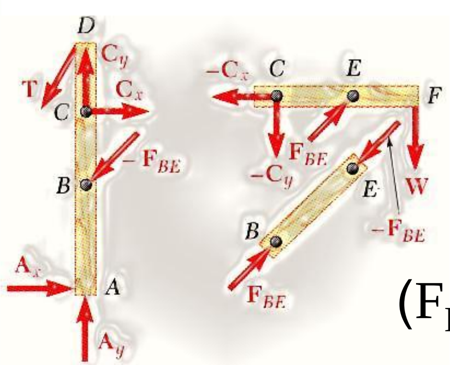
- قابهاوماشينها سازه هايي هستند که عضوهاي چندنيرويي دارند.قابها براي نگهداري بارطراحي مي شوند ومعمولا سازه هاي ثابت وكاملاًمقيدند.ماشينها براي انتقال وتغييردادن نيروهاطراحي مي شوندومي توانند ثابت يا متحرك باشندوهمواره داراي اجزاي متحركند.

- ازجسم آزاد كل قاب مي توانيم براي تعيين نيروهاي خارجي واردبرقاب استفاده كنيم.



- براي تعيين نيروهاي داخلي اجزا بايد اين اجزاي قاب راازهم جداكنيم ونمودار جسم آزاد رابراي هريك ازاجزاي جداشده رسم كنيم.

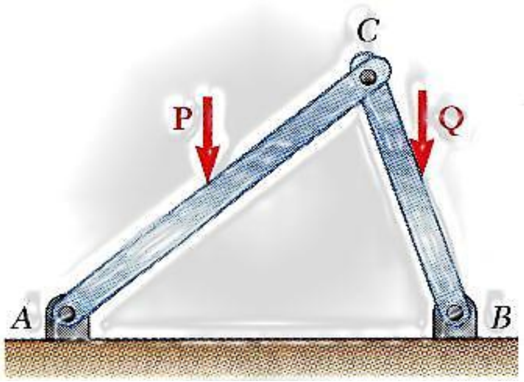
- نيروهادراعضاي دونيرويي داراي بزرگي برابر،خط اثر يكسان ودرخلاف جهت هم هستند.

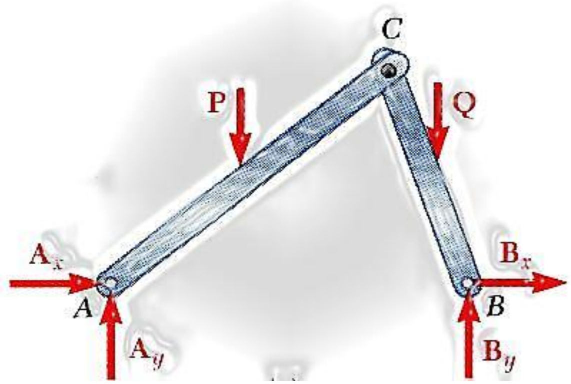


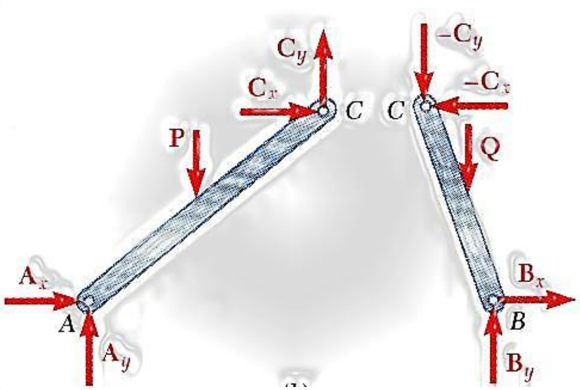
- دراعضاي چندنيرويي نيروها داراي بزرگي وخط اثر نامعلوم مي باشند،دراين اعضا نيروها بامولفه هاي مجهول نشان داده مي شوند.

- مولفه هاي مجهول داراي بزرگي برابر اما جهت مخالف هم هستند.$(F_{BE}$, $-F_{EB})$

قابهايي که درصورت جداشدن ازتکيه گاهشان ديگرصلب نيستند



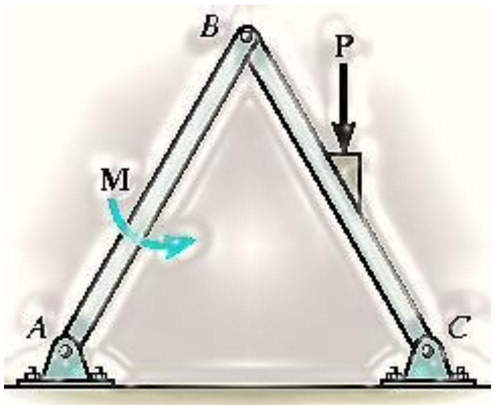


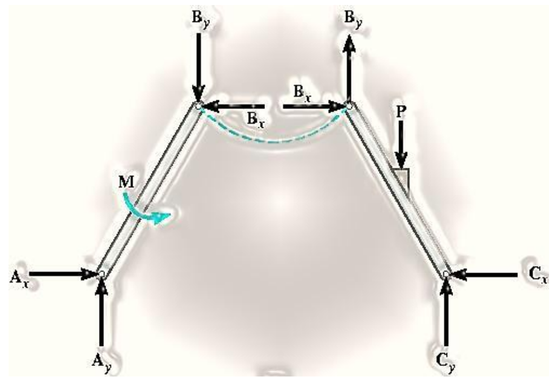


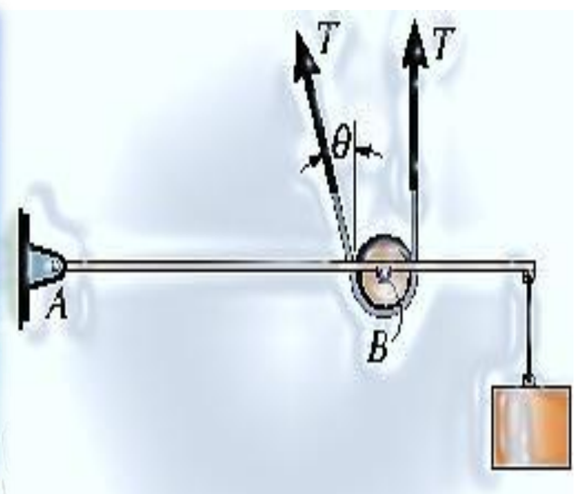
- بسياري ازقابها درصورت جداشدن ازتکيه گاه فروميريزند؛اين قابها رانمي توان جسم صلب درنظر گرفت.
- دياگرام جسم آزاد اين قابها نشاندهنده چهار نيرومي مجهول است که نمي توان با سه معادله آنها را حل کرد.
- براي اين منظور بايد قاب را به دو قسمت جدا کنيم وبراي هرقسمت نمودار جسم آزاد راجداگانه رسم کنيم.
- شش مجهول مختلف براي تحليل اين دو عضو وجود دارد وجمعا شش معادله براي بيان تعادل عضوها مي توان نوشت.
- اگر همه مجهولات رابتوان تعيين کرد وهمه معادله ها درشرايط بارگذاري کلي ارضا شوند سازه ازلحاظ استاتيکي معين وصلب است.

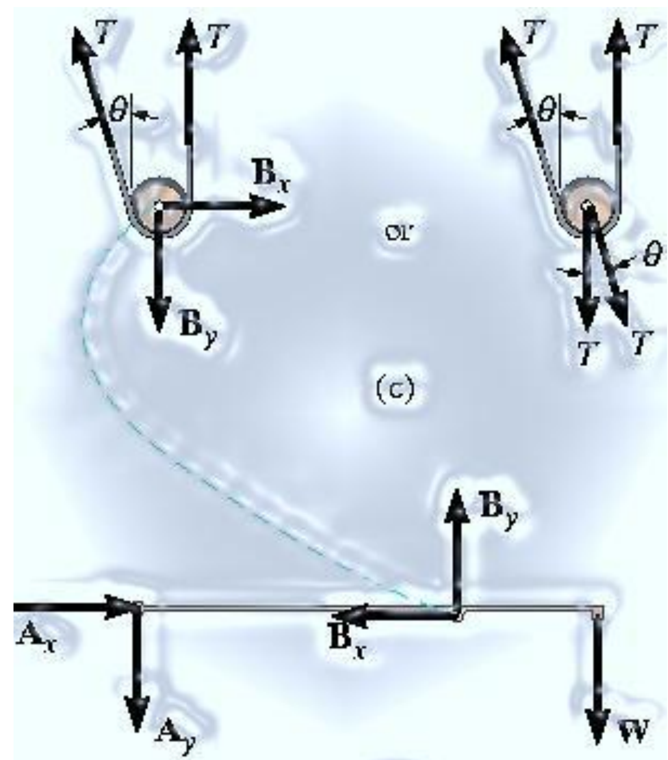
قابهايي كه درصورت جداشدن ازتكيه گاهشان ديگرصلب نيستند

- جدا كردن سازه وترسيم نمودار جسم آزاد براي هر قسمت.





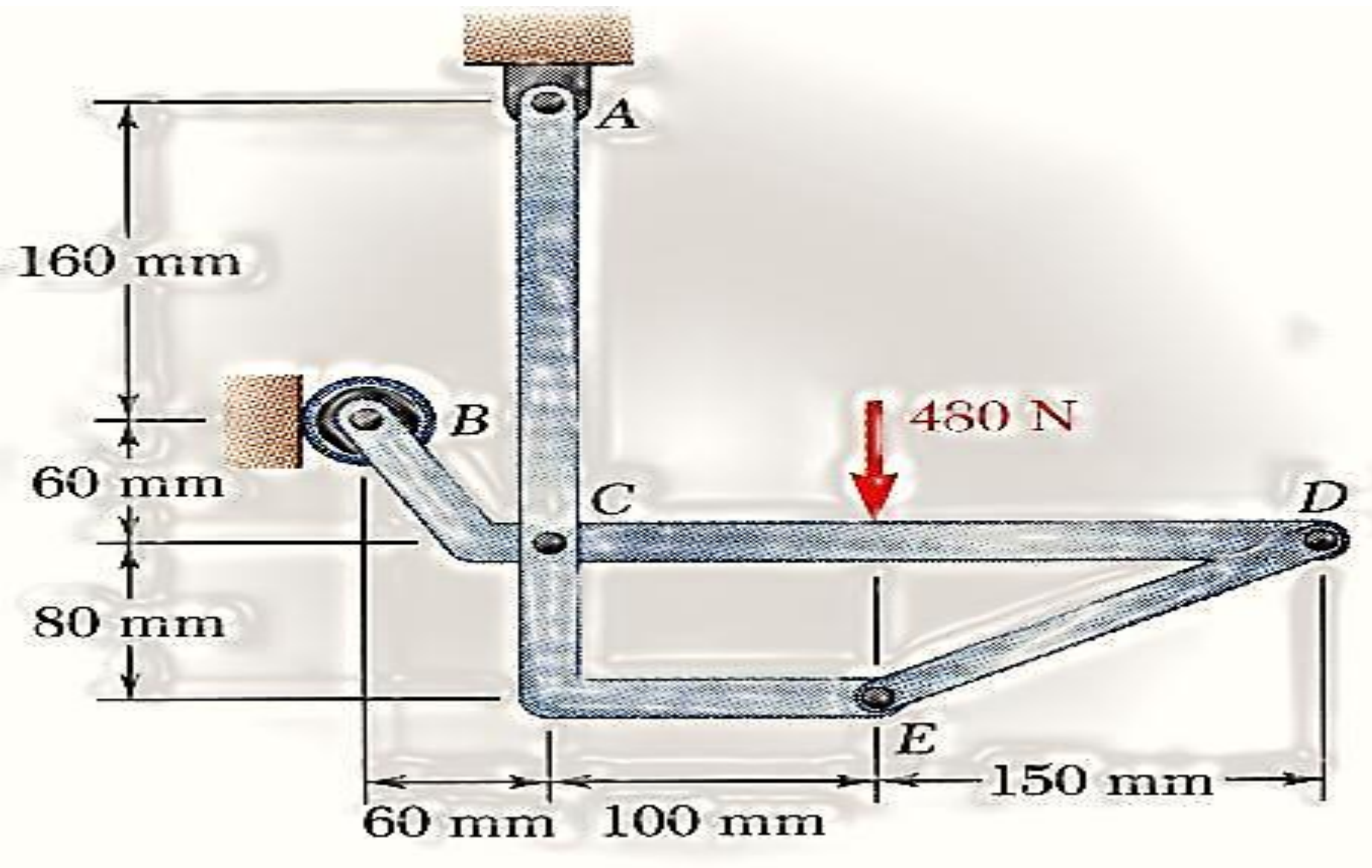




مثال ۳

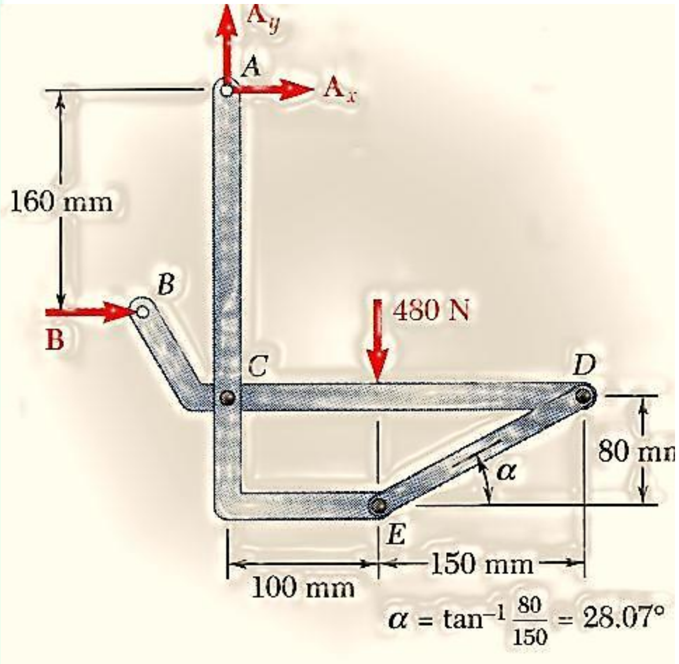
❑ درقاب نشان داده شده عضوهاي ACEوBCD توسط پيني درCوميانه DE به هم متصل اند.

- مطلوبست نيروي DE ومولفه هاي نيروي وارد برعضو BCD در نقطه C.



مثال ۳

✓ جسم آزاد كل قاب را رسم كرده چون عكس الملهاي خارجي تنها شامل سه مجهولند عكس العملها رابا درنظرگرفتن نمودار جسم آزاد كل قاب محاسبه مي كنيم:



$$\sum F_y = 0 = A_y - 480\text{ N}$$

$$\boxed{A_y = 480\text{ N} \uparrow}$$

$$\sum M_A = 0 = -(480\text{ N})(100\text{ mm}) + B(160\text{ mm})$$

$$\boxed{B = 300\text{ N} \rightarrow}$$

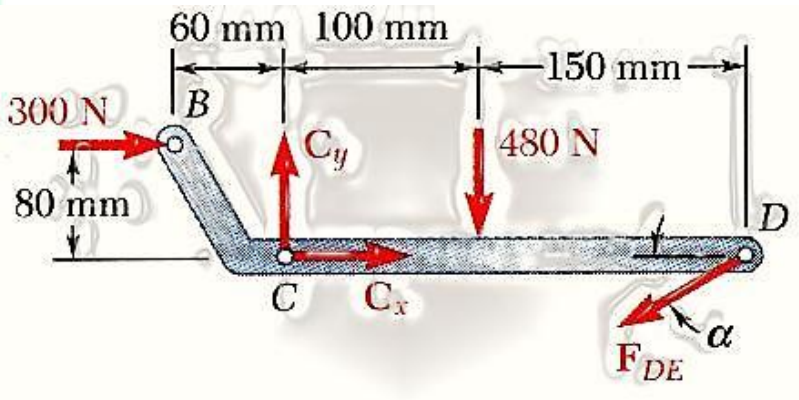
$$\sum F_x = 0 = B + A_x$$

$$\boxed{A_x = -300\text{ N} \leftarrow}$$

مقدار α:

$$\boxed{\alpha = \tan^{-1}\frac{80}{150} = 28.07°}$$

مثال ۳



✓ اجزاي قاب راجداكرده چون تنها دوعضو درC به هم متصل اند مولفه هاي نيروهاي مجهول وارد بر ACEو BCD به ترتيب برابر ودرخلاف جهت هم اندوبافرض كشش در ميله DE :

$$\sum M_C = 0 = (F_{DE}\sin\alpha)(250\text{ mm}) + (300\text{ N})(60\text{ mm}) + (480\text{ N})(100\text{ mm})$$

$$F_{DE} = -561\text{ N} \qquad \boxed{F_{DE} = 561\text{ N}\ \ C}$$

• باتوجه به علامت مقادير C_x و C_y مي توان جهت نيرو را تعيين كرد.

$$\sum F_x = 0 = C_x - F_{DE}\cos\alpha + 300\text{ N}$$
$$0 = C_x - (-561\text{ N})\cos\alpha + 300\text{ N}$$

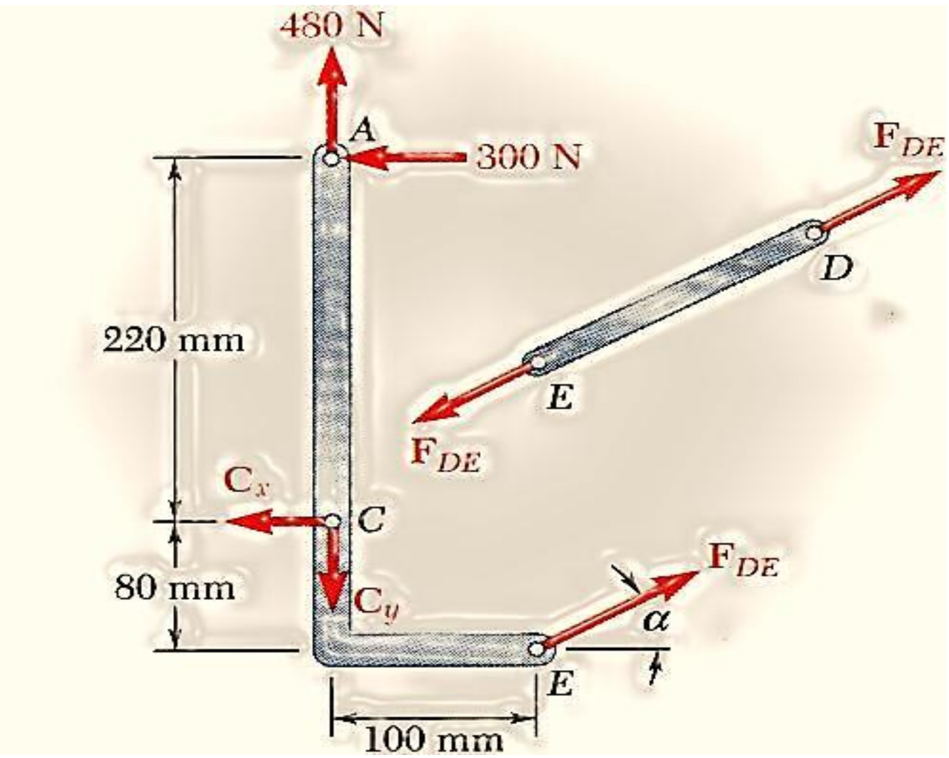
$$\boxed{C_x = -795\text{ N}}$$

$$\sum F_y = 0 = C_y - F_{DE}\sin\alpha - 480\text{ N}$$
$$0 = C_y - (-561\text{ N})\sin\alpha - 480\text{ N}$$

$$\boxed{C_y = 216\text{ N}}$$

مثال ۳

✓ محاسبات را با نمودارجسم آزاد ACE ولنگر حول A بررسي مي كنيم:

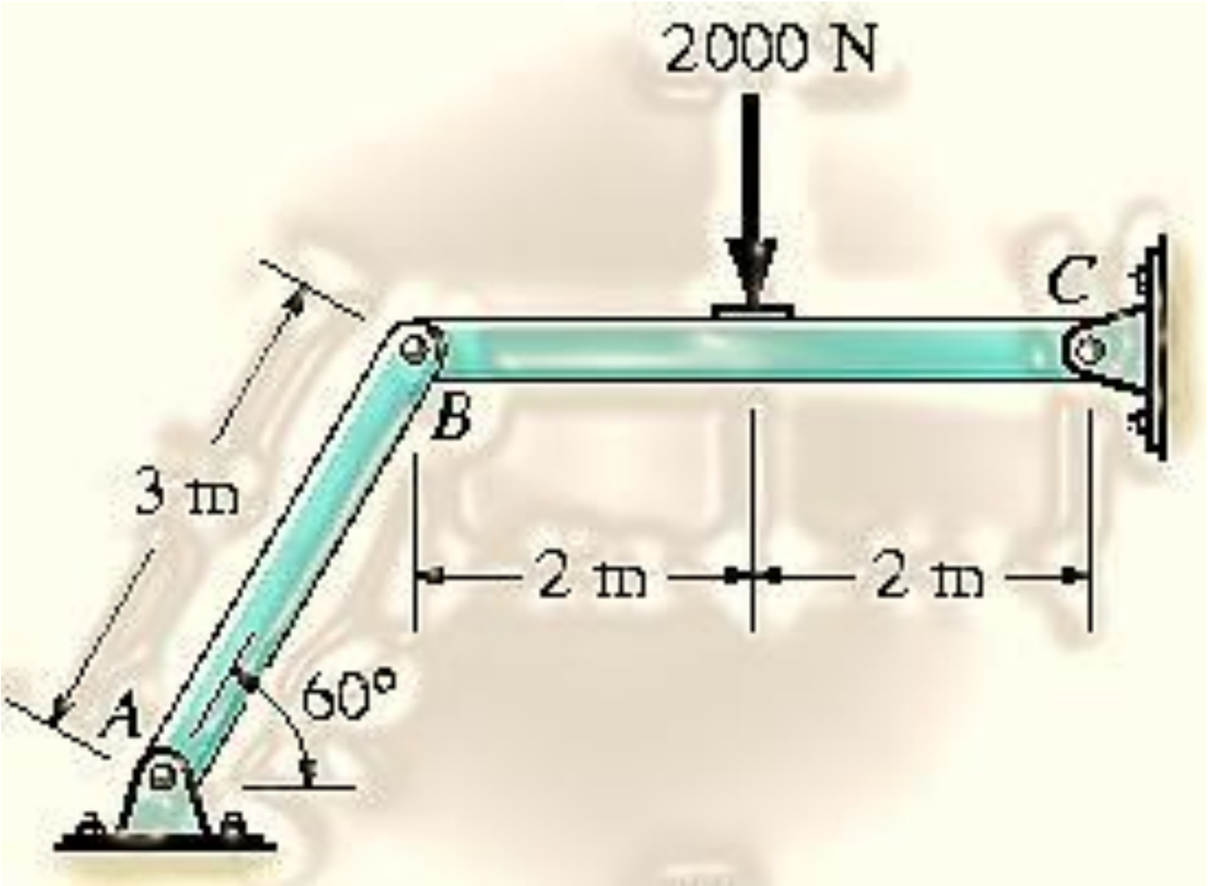


$$\sum M_A = (F_{DE}\cos\alpha)(300\text{ mm}) + (F_{DE}\sin\alpha)(100\text{ mm}) - C_x(220\text{ mm})$$
$$= (-561\cos\alpha)(300\text{ mm}) + (-561\sin\alpha)(100\text{ mm}) - (-795)(220\text{ mm}) = 0$$

(O.K.)

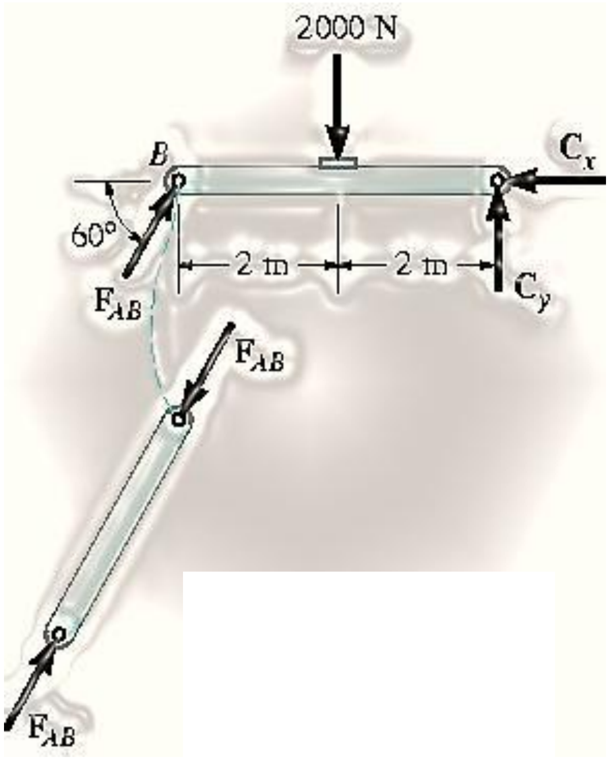
مثال ۴

❑در سازه زير مطلوبست واكنشهاي تكيه گاهي در C .



مثال ۴

✓سازه جدا کرده ودياگرام جسم آزاد آنرا رسم مي كنيم.در مدل اول نيرو عضو ABرا قرار ميدهيم.



$$\sum M_C = 0;$$

$$2000N(2m) - F_{AB}\sin 60^\circ(4m) = 0$$

$$F_{AB} = 1154.7N$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$1154.7\cos 60^\circ - C_x = 0$$

$$C_x = 577N$$

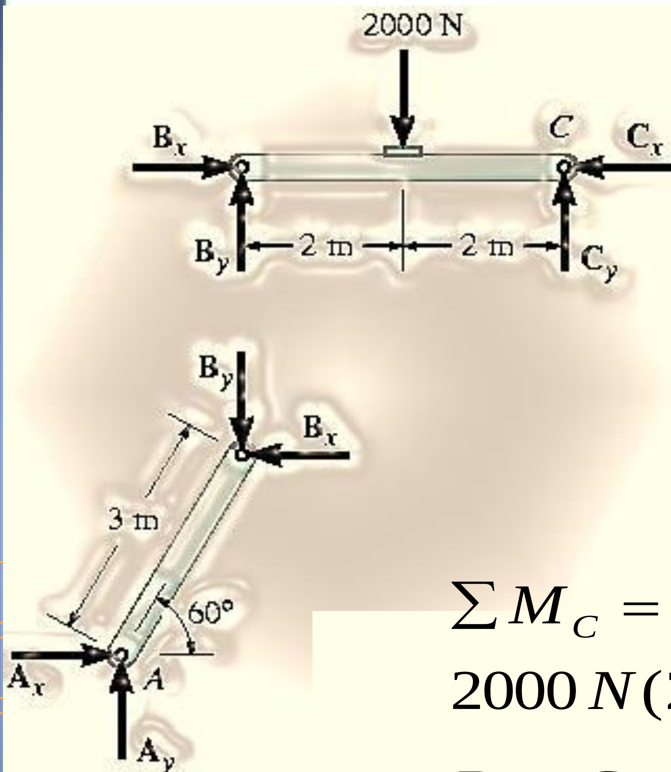
$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$1154.7\sin 60^\circ N - 2000N - C_y = 0$$

$$C_y = 1000N$$

مثال ۴

✓ در مدل دوم نیرو عضو BC را قرار میدهیم.



$$\sum M_A = 0;$$

$$B_x(3\sin 60^\circ m) - B_y(3\cos 60^\circ m) = 0 \qquad \xrightarrow{+} \sum F_x = 0;$$

$$A_x - B_x = 0 \qquad +\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$A_y - B_y = 0$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$2000\,N(2m) - B_y(4m) = 0 \qquad \xrightarrow{+} \sum F_x = 0;$$

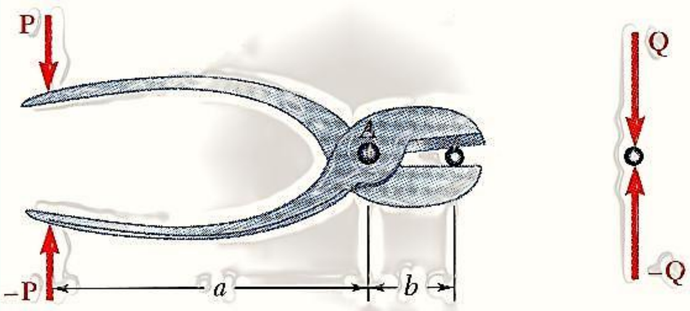
$$B_x - C_x = 0 \qquad +\uparrow \sum F_y = 0;$$

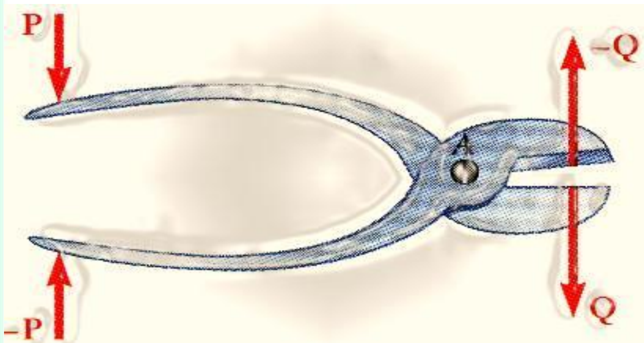
$$B_y - 2000\,N + C_y = 0$$

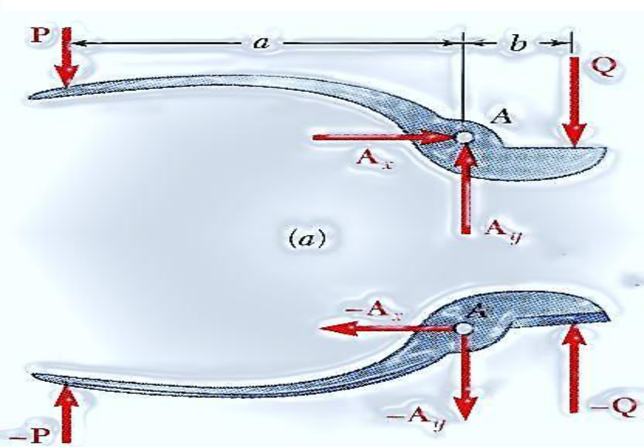
$$B_y = 1000\,N;\ B_x = 577\,N;\ C_x = 577\,N;\ C_y = 1000\,N$$

❖ حال باداشتن نيروهاي B_xو B_y مي توان به راحتي واكنشهاي تكيه گاه A را بدست آورد.

ماشینها







- ماشینها سازه هايي هستند که براي انتقال وتغييردادن نيروها طراحي مي شوند.هدف اصلي آنها تبديل نيروهاي ورودي به نيروهاي خروجي است.

- نيروهاي **P** نيروهاي **Q** را خروجي مي دهند.

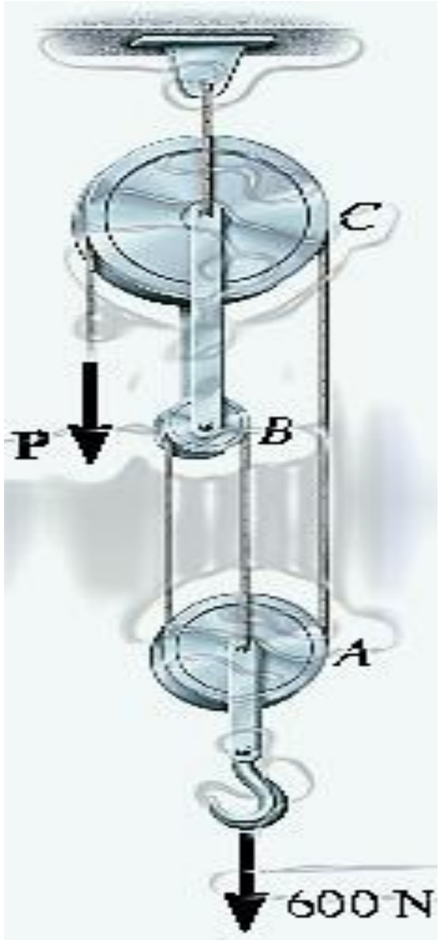
- براي تعيين بزرگي Q نيروهاي خروجي به ازاي بزرگي نيروهاي ورودي P معلوم نمودار جسم آزاد سيم چين تنها را رسم مي كنيم(يعني آنرا جدا مي كنيم).

- با گرفتن لنگر حول A:

$$\sum M_A = 0 = aP - bQ \qquad Q = \frac{a}{b}P$$

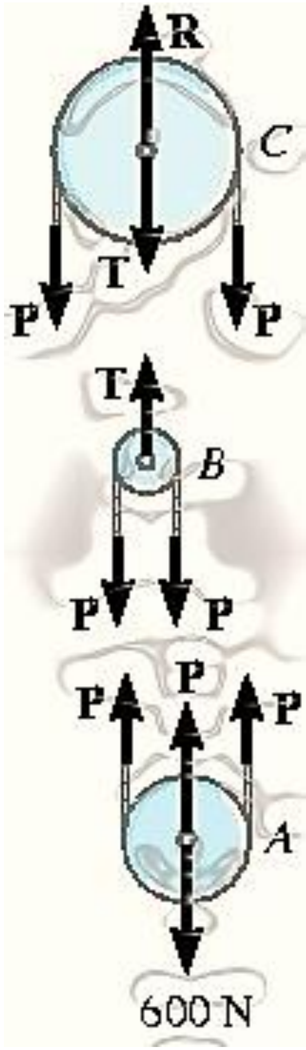
مثال ۵

- در سیستم (ماشین) زیر که درآن از اصطكاك صرفنظر شده است مطلوبست:
  - نيروي كشش در كابل ها وتعيين نيروي لازم P جهت مهار وزنه 600 نيوتني.



مثال ۵

✓ سازه جدا کرده ودیاگرام جسم آزاد آنرا رسم مي کنيم.



قرقره A

$$+\uparrow\sum F_y = 0; 3P - 600N = 0$$

$$P = 200N$$

قرقره B

$$+\uparrow\sum F_y = 0; T - 2P = 0$$

$$T = 400N$$

قرقره C

$$+\uparrow\sum F_y = 0; R - 2P - T = 0$$

$$R = 800N$$

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

7

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

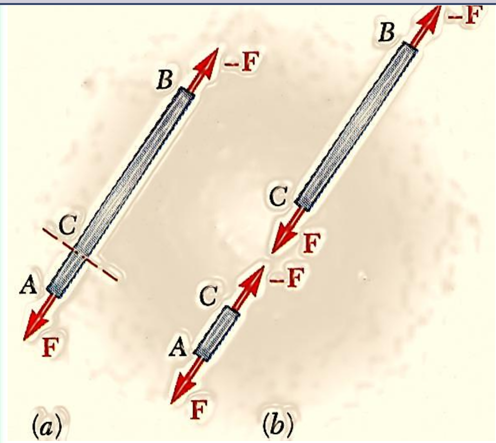
By : M. Barzegar,M.SC.

نیروها در تیرها و کابلها

- مي خواهيم نيروهاي داخلي نگهدارنده قسمتهاي مختلف يك تك عضو را بررسي كنيم.
- نيروهاي داخلي علاوه بر كشش و فشار مي توانند برش وخمش نيز ايجاد كنند.
- دو نوع سازه مهندسي:
  - تيرها : اعضاي معمولا بلند ، مستقيم ومنشوري هستند كه براي تحمل بارهاي وارد برنقاط مختلف درطول عضو طرح مي شوند.
  - كابلها : اعضا منعطف كه فقط براي تحمل كشش طرح مي شوند.

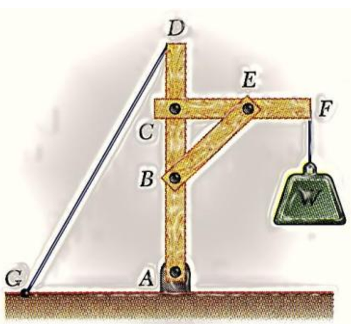
نيروهاي داخلي در اعضا

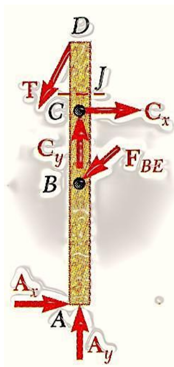
- عضو مستقيم دونيرويي AB تحت اثر نيروهاي F و F– است.

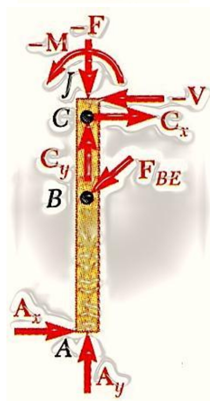


- درمورديك عضو دونيرويي مستقيم،نيروهاي داخلي كه اين دو قسمت ازعضوبرهم واردمي كنند معادل با نيروهاي محوري اند.

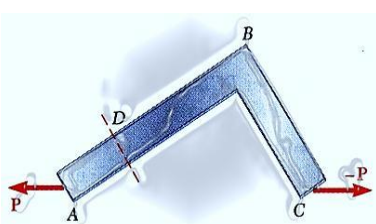
- عضوAD كه يك عضو چندنيرويي است رادرنظر بگيريد،واضح است دراين عضو اثرنيروهاي داخلي منحصراً نيروهاي محوري نيست.

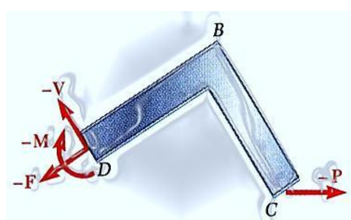


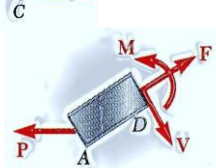




- عضو ADراباید در J برش زده ودياگرام نيروهارا درآن رسم كنيم.Vرانيروي داخلي برشي و Mرانيروداخلي خمشي گوئيم.



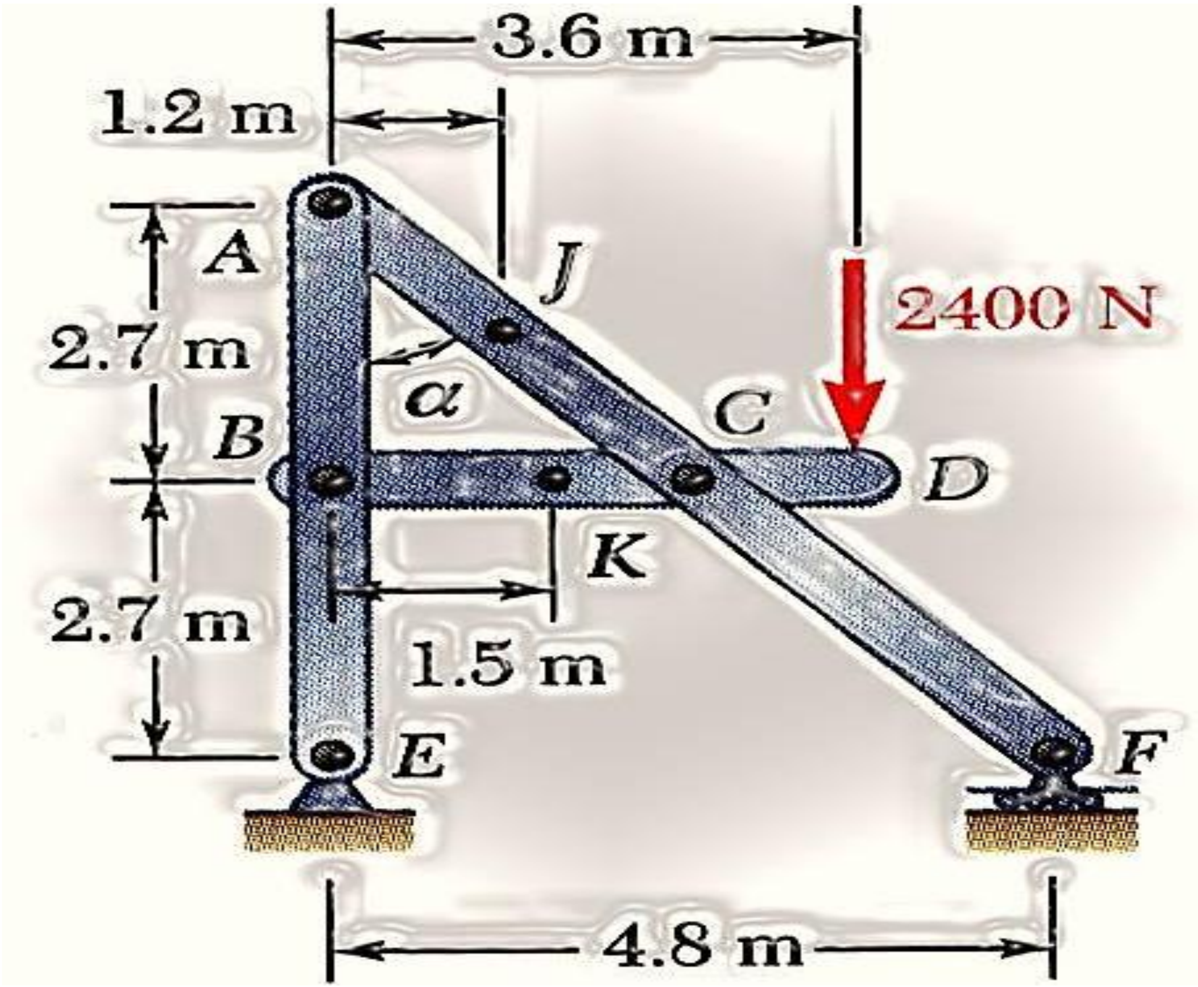




- دريك عضو دونيروي غيرمستقيم نيروهاي داخلي معادل بايك سيستم كوپل-نيرو هستندوفقط نيروهاي محور را شامل نمي شود.

مثال ۱

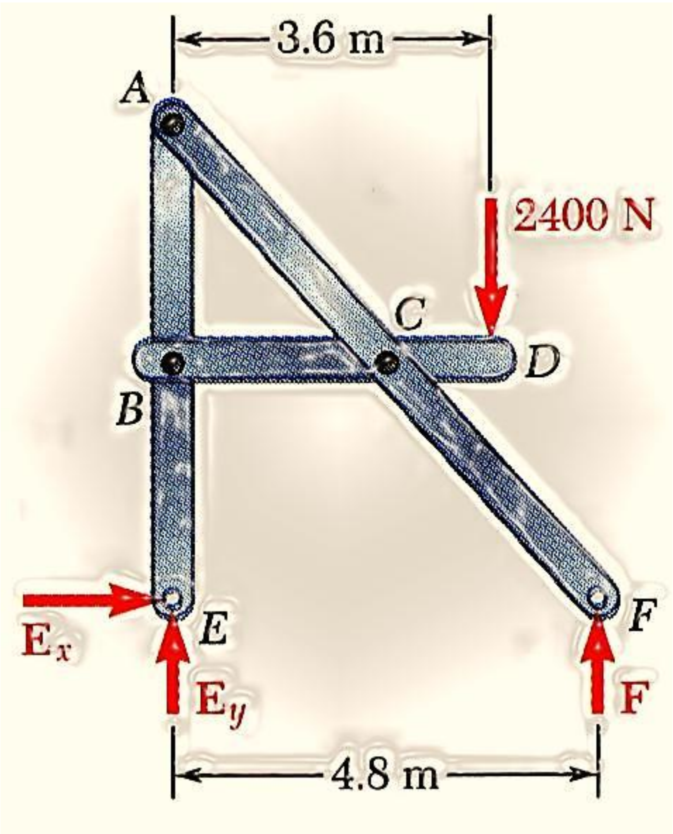
❑ درقاب زير نيروهاي داخلي را در عضو ACFدر مقطع J ودر عضو BCD در مقطع K تعيين كنيد.



مثال ۱

✓ عکس العملها ونیروها را در اتصالها رابا درنظرگرفتن نمودار آزاد جسم محاسبه مي كنيم.

✓ گام اول بايد واكنشهاي تكيه گاهي (مجهولات)راتعين كنيم.



$$\sum M_E = 0:$$

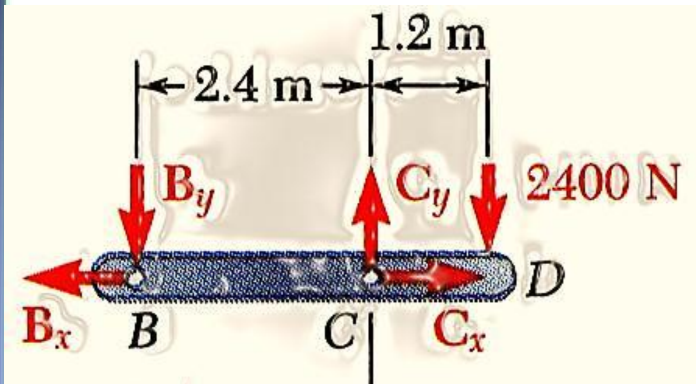
$$-(2400\ \text{N})(3.6\,\text{m}) + F(4.8\,\text{m}) = 0 \qquad \boxed{F = 1800\ \text{N}}$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$-2400\ \text{N} + 1800\ \text{N} + E_y = 0 \qquad \boxed{E_y = 600\ N}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad \boxed{E_x = 0}$$

مثال ۱



✓ بادرنظرگرفتن نمودار جسم آزاد BCD

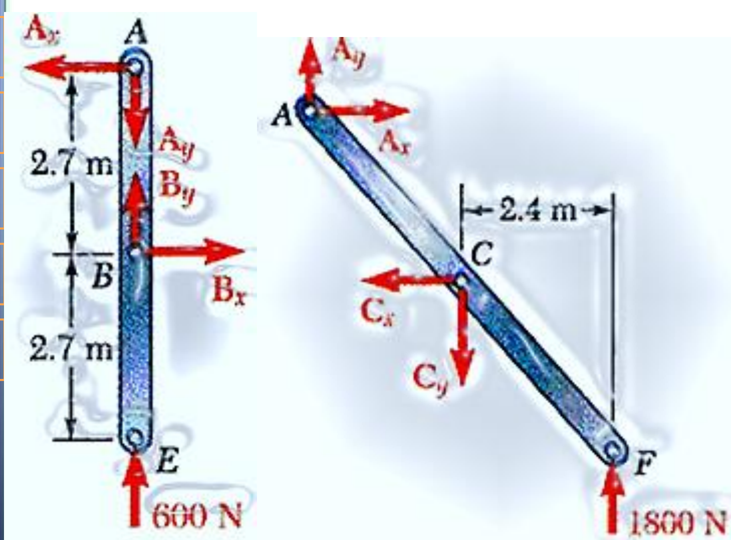
$$\sum M_B = 0:$$

$$-(2400\text{ N})(3.6\text{ m}) + C_y(2.4\text{ m}) = 0 \qquad \boxed{C_y = 3600\text{ N}}$$

$$\sum M_C = 0:$$

$$-(2400\text{ N})(1.2\text{ m}) + B_y(2.4\text{ m}) = 0 \qquad \boxed{B_y = 1200\text{ N}}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad -B_x + C_x = 0$$



✓ بادرنظرگرفتن نمودار جسم آزاد ABE

$$\sum M_A = 0: \qquad B_x(2.4\text{ m}) = 0 \qquad \boxed{B_x = 0}$$

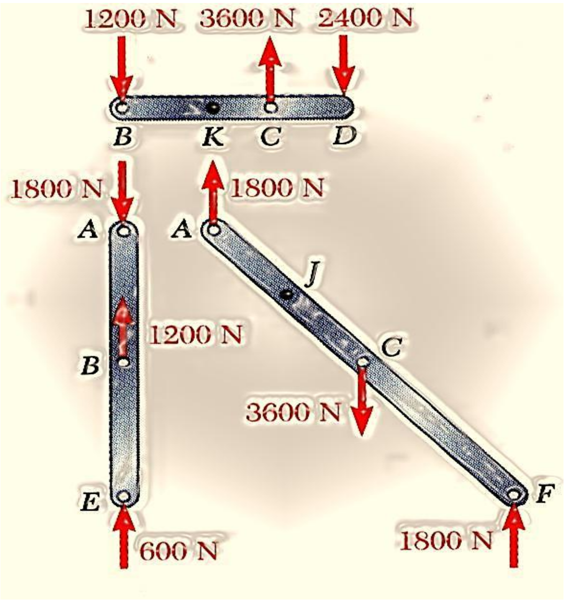
$$\sum F_x = 0: \qquad B_x - A_x = 0 \qquad \boxed{A_x = 0}$$

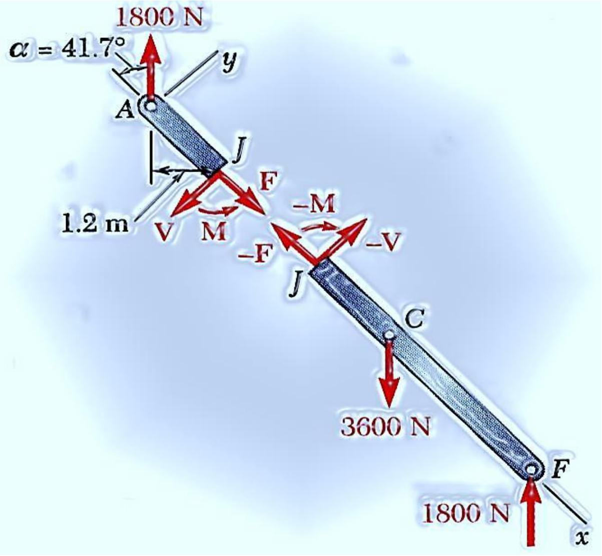
$$\sum F_y = 0: \qquad -A_y + B_y + 600\text{ N} = 0 \qquad \boxed{A_y = 1800\text{ N}}$$

✓ درعضو BCD,

$$\sum F_x = 0: \qquad -B_x + C_x = 0 \qquad \boxed{C_x = 0}$$

مثال ۱





✓ عضو ACFرا در J برش زده ودر دو قسمت سرعضو نیروهاي ازقبل تعین شده را قرار مي دهیم

✓ نمودار جسم آزاد AJ

$$\sum M_J = 0:$$

$$-(1800\ \mathrm{N})(1.2\ \mathrm{m}) + M = 0$$

$$\boxed{M = 2160\ \mathrm{N\cdot m}}$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$F - (1800\ \mathrm{N})\cos 41.7° = 0$$

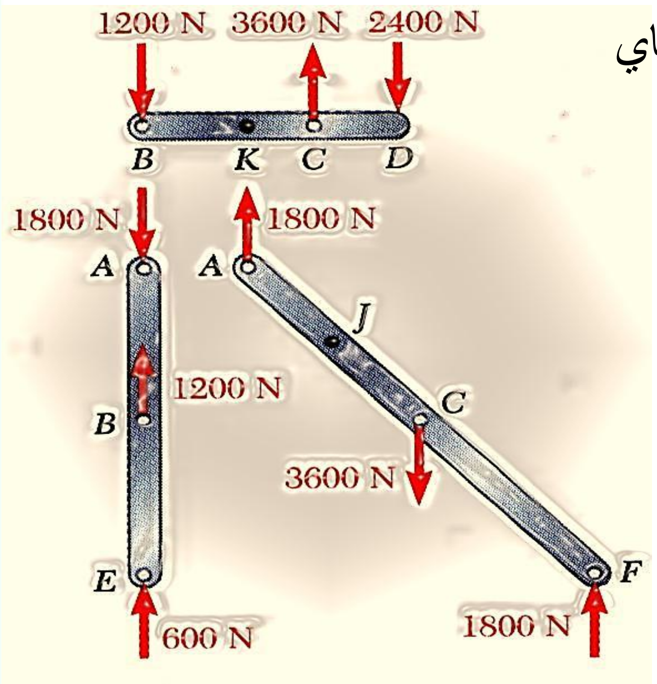
$$\boxed{F = 1344\ \mathrm{N}}$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$-V + (1800\ \mathrm{N})\sin 41.7° = 0$$

$$\boxed{V = 1197\ \mathrm{N}}$$

مثال ١



✓ عضو BCD را در K برش زده ودر دو قسمت سرعضو نيروهاي ازقبل تعين شده را قرار مي دهيم

✓ نمودار جسم آزاد BK

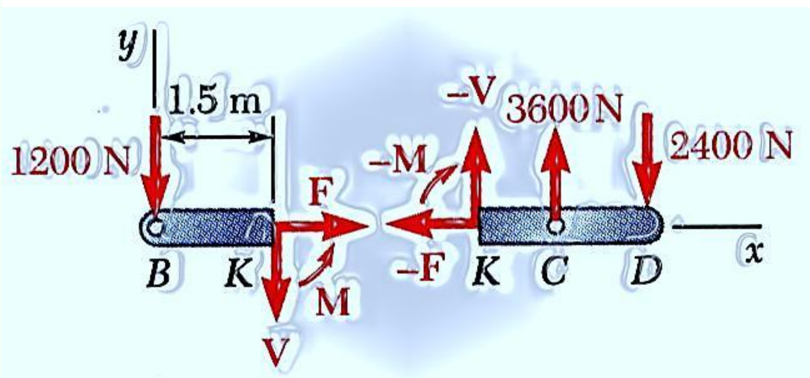
$$\sum M_K = 0:$$

$$(1200\ \text{N})(1.5\,\text{m}) + M = 0 \qquad \boxed{M = -1800\ \text{N}\cdot\text{m}}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad \boxed{F = 0}$$

$$\sum F_y = 0:$$

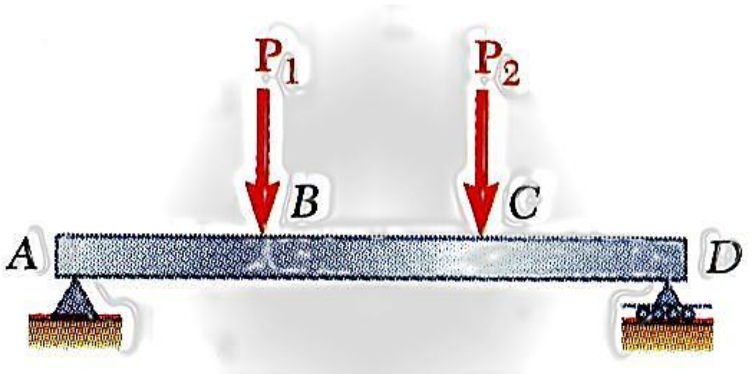
$$-1200\ \text{N} - V = 0 \qquad \boxed{V = -1200\ \text{N}}$$

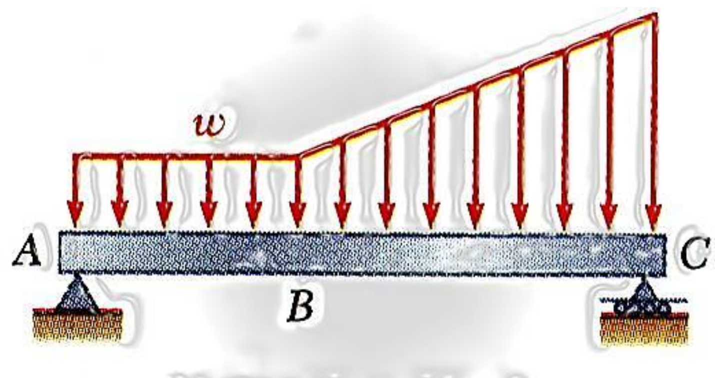


انواع بارگذاري و تكيه گاه

- عضوي ازسازه را كه براي تحمل بارهاي واردبرنقاط مختلف درامتداد طولش طراحي شده باشد را **تير** نامند.

- تيرممكن است در معرض بارهاي متمركز يا گسترده قرار گيرد.





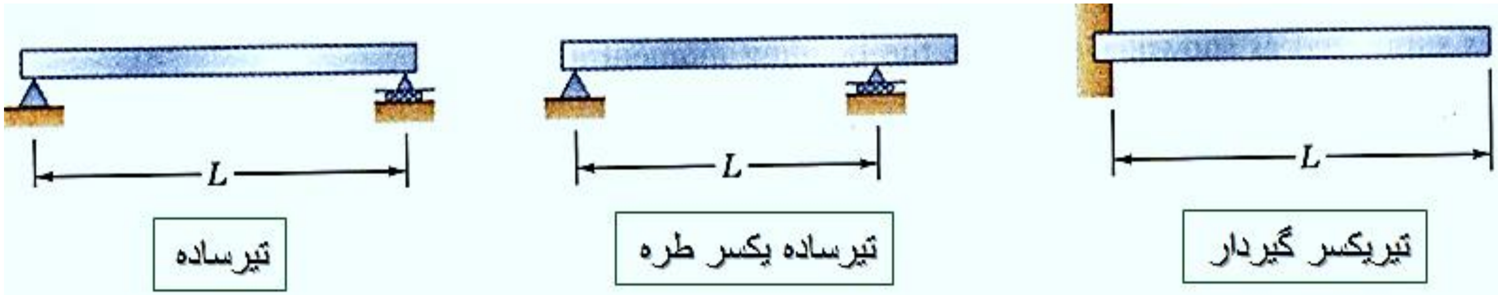
- طراحي تير طي دو مرحله:

۱) تعيين نيروهاي برشي وخمشي ناشي از بارها

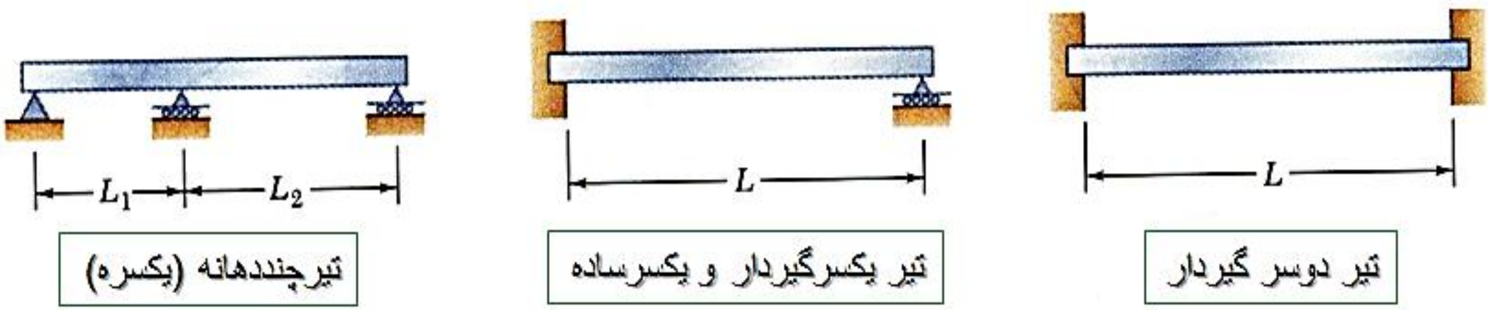
۲) انتخاب مناسبترين سطح مقطع براي مقاومت دربرابر نيروهاي برشي وخمشي تعيين شده.

انواع بارگذاري و تكيه گاه

- استاتيكي معين

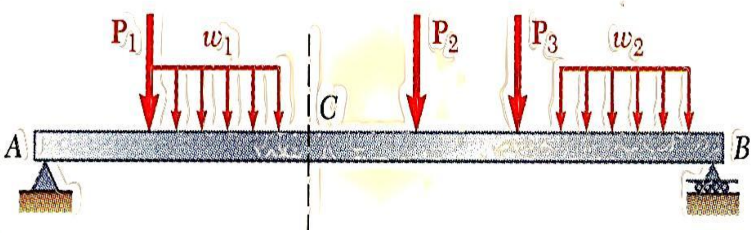


- استاتيكي نامعين

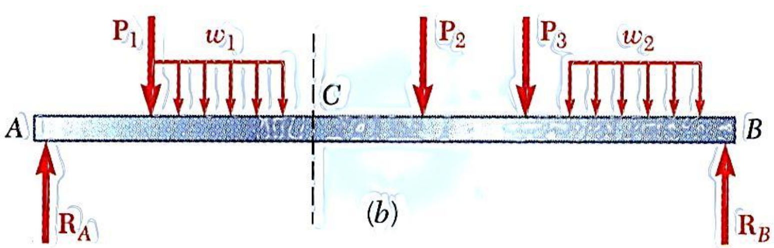


- اگر درجه نامعيني تير صفر باشد معين استاتيكي و اگر مثبت وبيشترازصفرباشد نامعين استاتيكي واگر منفي وكمترازصفرباشد ناپايدار گويند.

برش وگشتاور خمشي درتير



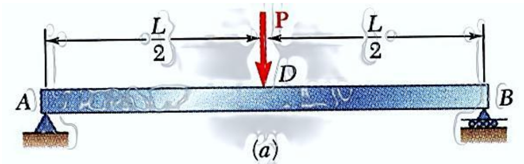
- محاسبه نيروي برشي وخمشي رابراي تير ساده تحت بارگذاري متمركز و گسترده با تعيين واكنشهاي تكيه گاهي شروع مي گردد.



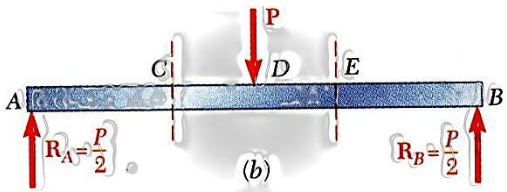
- تير را درنقطه اي مانند C برش زده ودياگرام آزاد نيروهارا درآن نقطه رسم مي كنيم:

- برش V وخمش M در نقطه اي مانند C مثبت اند وقتي كه نيروهاي داخلي وكوپلها وارد بر هربخش تير مانند شكل زير باشند.

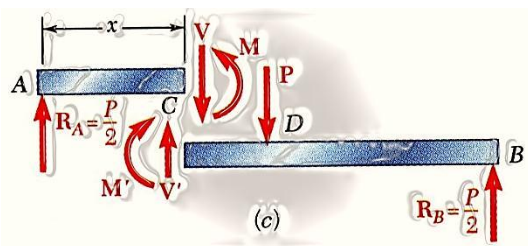
نمودارهاي برشي وخمشي

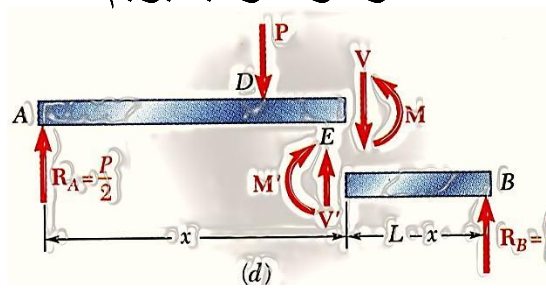


- مقدار نيروي برشي وخمشي در نقاط مختلف تير متغيير است لذا بارسم اين نمودارها ازميزان اين نيروها در نقاط مختلف تير آگاه مي شويم.



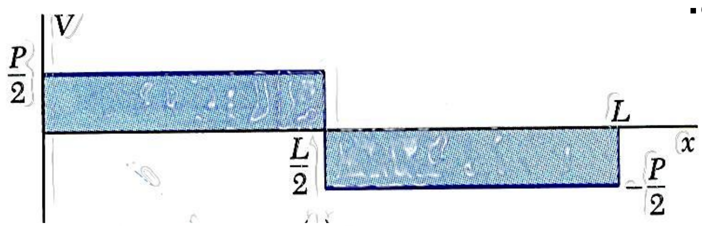
- ابتدا واكنشهاي تكيه گاهي راتعيين ميكنيم.
- تيررادرنقطه اي مانند C برش زده وسمت ACرادرنظرميگيريم.



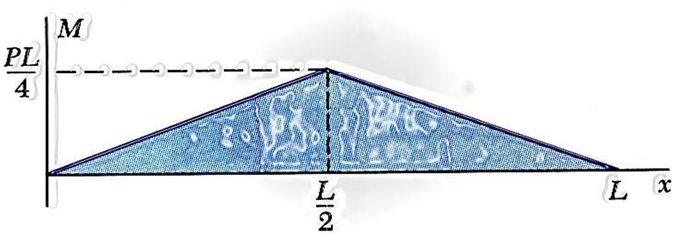


$$V = +P/2 \quad M = +Px/2$$

- تيررادرنقطه اي مانند E برش زده وسمت EBرادرنظرميگيريم.



$$V = -P/2 \quad M = +P(L-x)/2$$

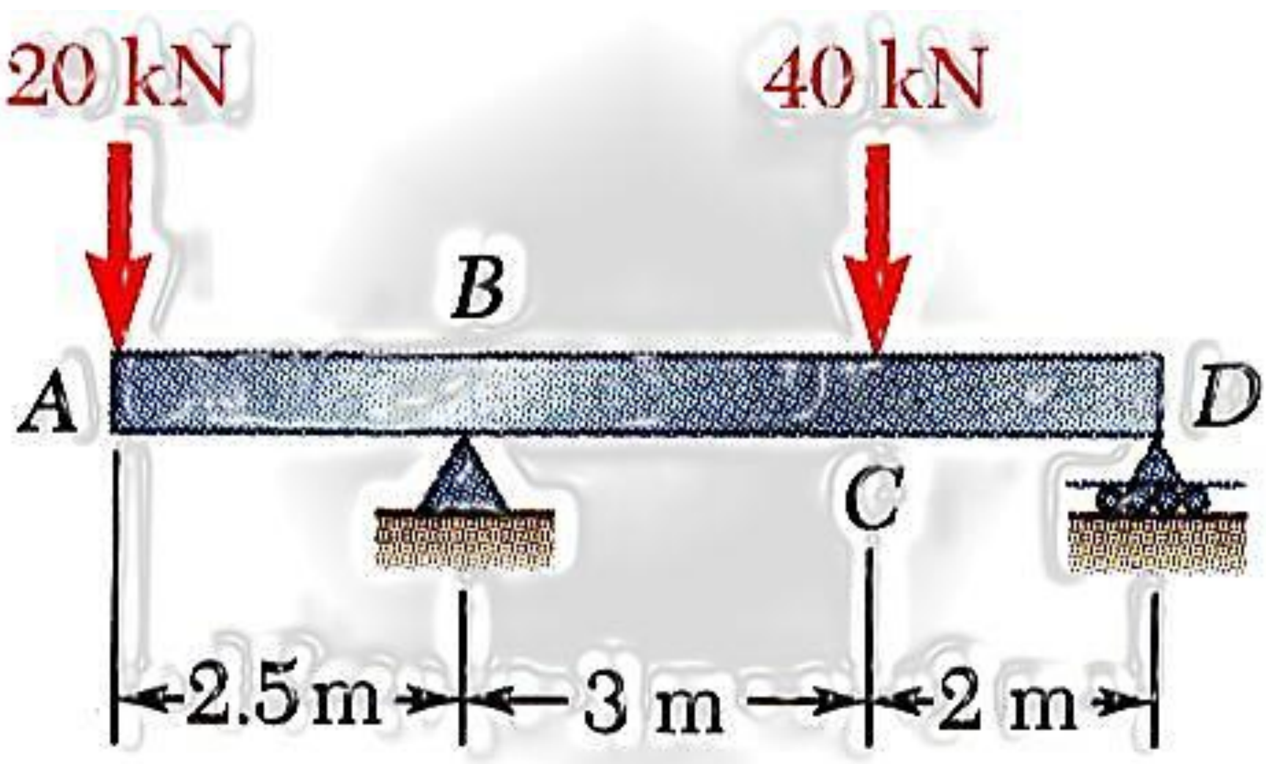


- وقتي تيري فقط تحت تاثيربارمتمركز قرار دارد مقداربرش بين بارهاثابت وگشتاورخمشي دراين فاصله بطور خطي تغيير مي كند.درمورد بار گسترده اين طور نيست.

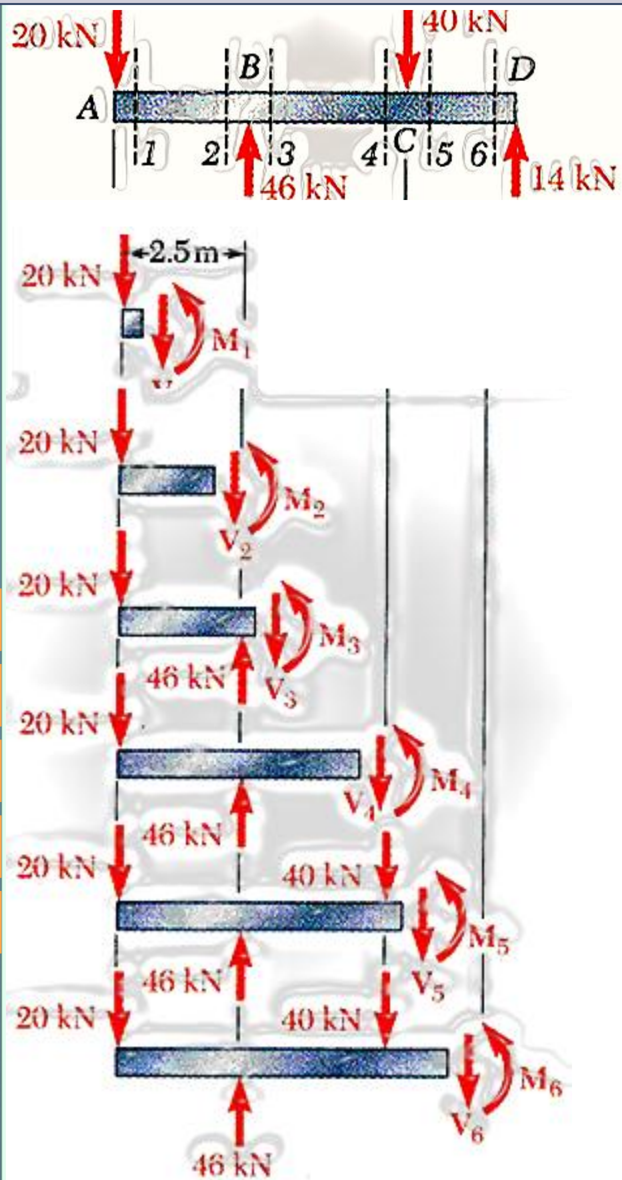
Meysam4366@yahoo.com

مثال ۲

- مطلوبست نمودار هاي برشي و خمشي براي تير بارگذاري شده زير.



مثال ۲



✓ بارسم جسم آزاد کل تير واکنشهاي تکيه گاهي را رسم مي کنيم:

✓ ابتدانيروهاي داخلي درقسمت برشهاي مقطع راتعيين مي کنيم:

$$\sum F_y = 0: \quad -20\,\text{kN} - V_1 = 0 \qquad \boxed{V_1 = -20\,\text{kN}}$$

$$\sum M_2 = 0: \quad (20\,\text{kN})(0\,\text{m}) + M_1 = 0 \qquad \boxed{M_1 = 0}$$

✓ بطور مشابه خواهيم داشت:

$\boxed{V_2 = -20\,\text{kN}}$ $\boxed{M_2 = -50\,\text{kN.m}}$

$\boxed{V_3 = +26\,\text{kN}}$ $\boxed{M_3 = -50\,\text{kN.m}}$

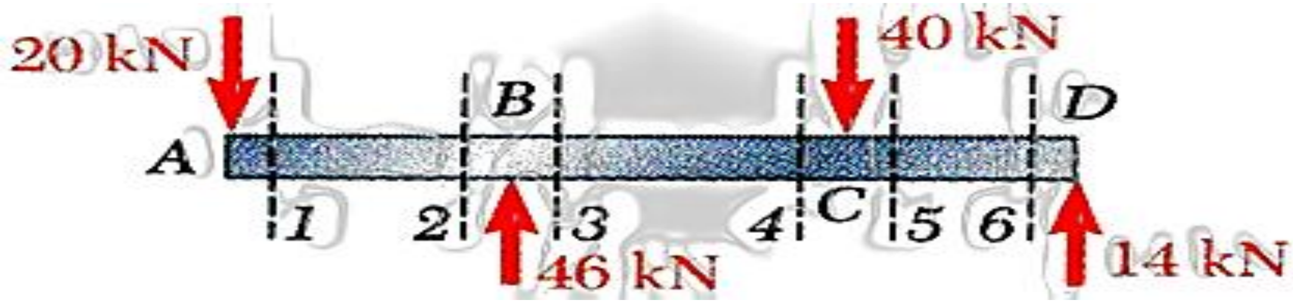
$\boxed{V_4 = +26\,\text{kN}}$ $\boxed{M_4 = +28\,\text{kN.m}}$

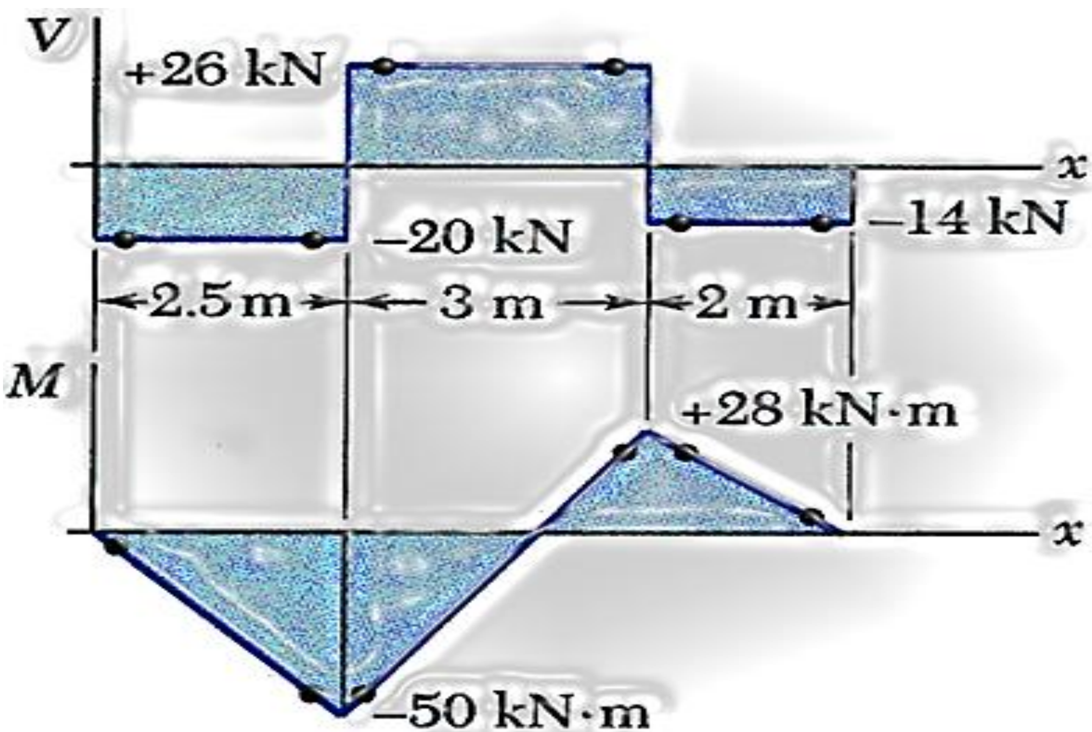
$\boxed{V_5 = -14\,\text{kN}}$ $\boxed{M5 = +28\,\text{kN.m}}$

$\boxed{V_6 = -14\,\text{kN}}$ $\boxed{M_6 = 0}$

مثال ۲

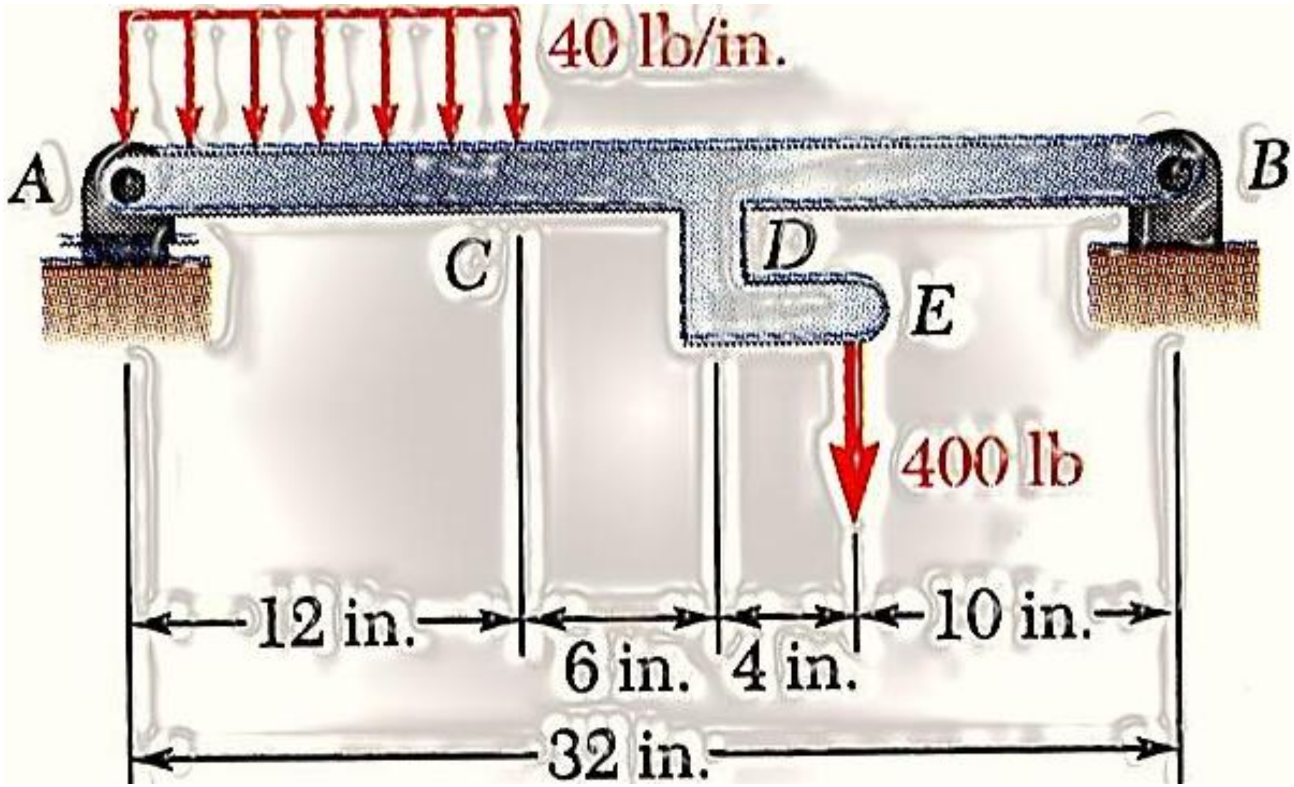
✓ حال باتوجه به نقاط بدست آمده نمودارهاي برش وخمش را رسم مي كنيم.





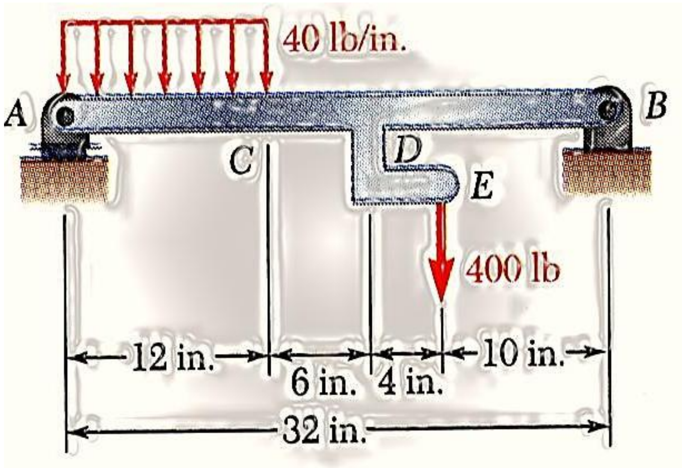
مثال ۳

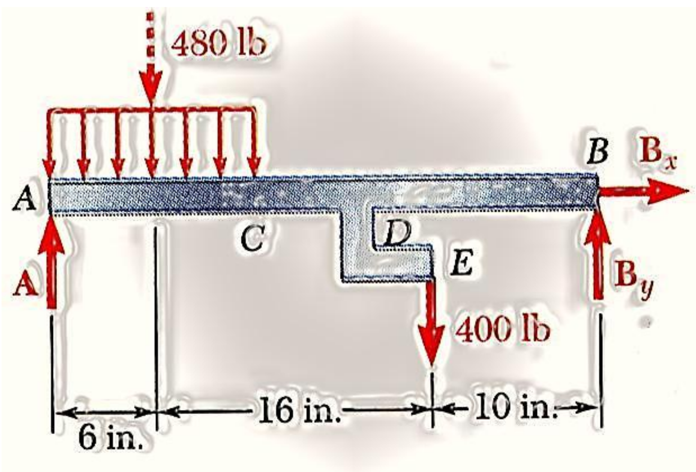
- نمودارهاي برش وخمش رابراي تير زير رسم كنيد.



مثال ۳

✓ بارسم جسم آزاد کل تير واكنشهاي تكيه گاهي را رسم مي كنيم:





$$\sum M_A = 0:$$

$$B_y(32\,\text{in.}) - (480\,\text{lb})(6\,\text{in.}) - (400\,\text{lb})(22\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{B_y = 365\,\text{lb}}$$

$$\sum M_B = 0:$$

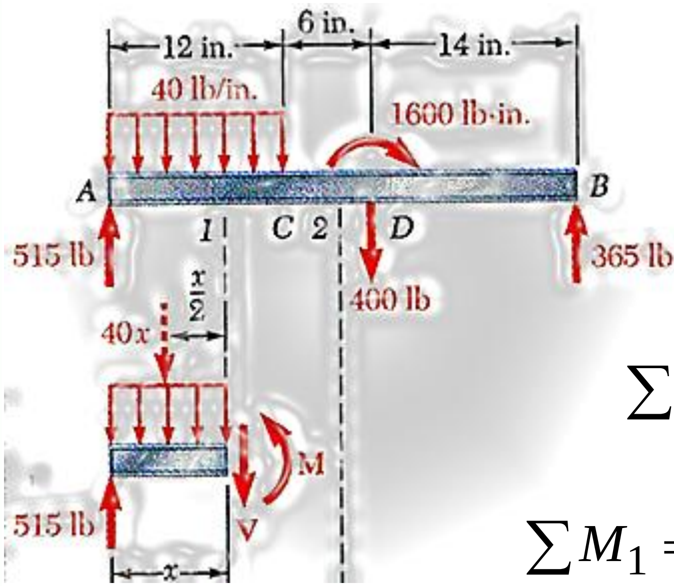
$$(480\,\text{lb})(26\,\text{in.}) + (400\,\text{lb})(10\,\text{in.}) - A(32\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{A = 515\,\text{lb}}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad \boxed{B_x = 0}$$

- نكته: نيروي 400_{lb} در دستك DE معادل يه نيروي خمشي ($1600_{\text{lb.in}}$) در تيرخواهد بود.

مثال ۳

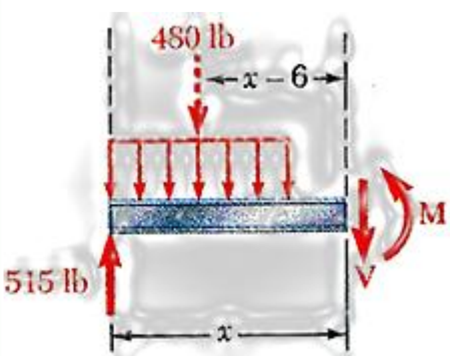


✓ نيروهاي داخلي در فاصله x از A رابا توجه به بخشي ازتير واقع درسمت چپ تعيين مي كنيم.بجاي بارگسترده بارمعادل آن را قرار مي دهيم.

✓ از A تا C:

$$\sum F_y = 0: \quad 515 - 40x - V = 0 \qquad \boxed{V = 515 - 40x}$$

$$\sum M_1 = 0: \quad -515x - 40x\left(\tfrac{1}{2}x\right) + M = 0 \qquad \boxed{M = 515x - 20x^2}$$



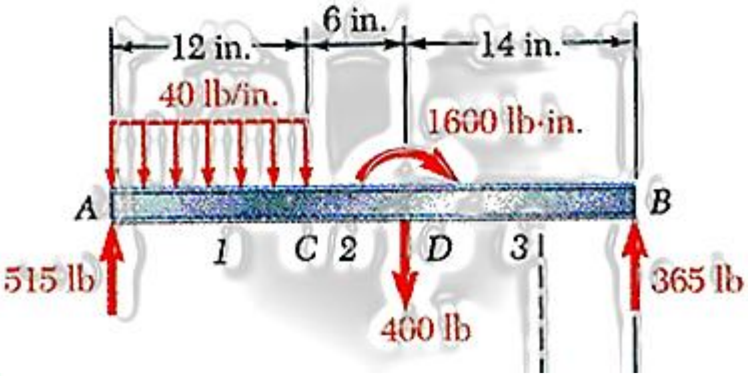
✓ از C تا D:

$$\sum F_y = 0: \quad 515 - 480 - V = 0 \qquad \boxed{V = 35\,\text{lb}}$$

$$\sum M_2 = 0: \quad -515x + 480(x-6) + M = 0 \qquad \boxed{M = (2880 + 35x)\,\text{lb}\cdot\text{in.}}$$

مثال ۳

✓ از D تا B:

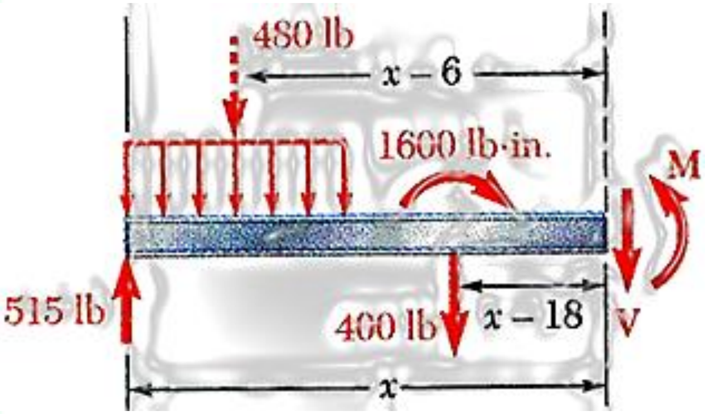


$$\sum F_y = 0: \quad 515 - 480 - 400 - V = 0$$

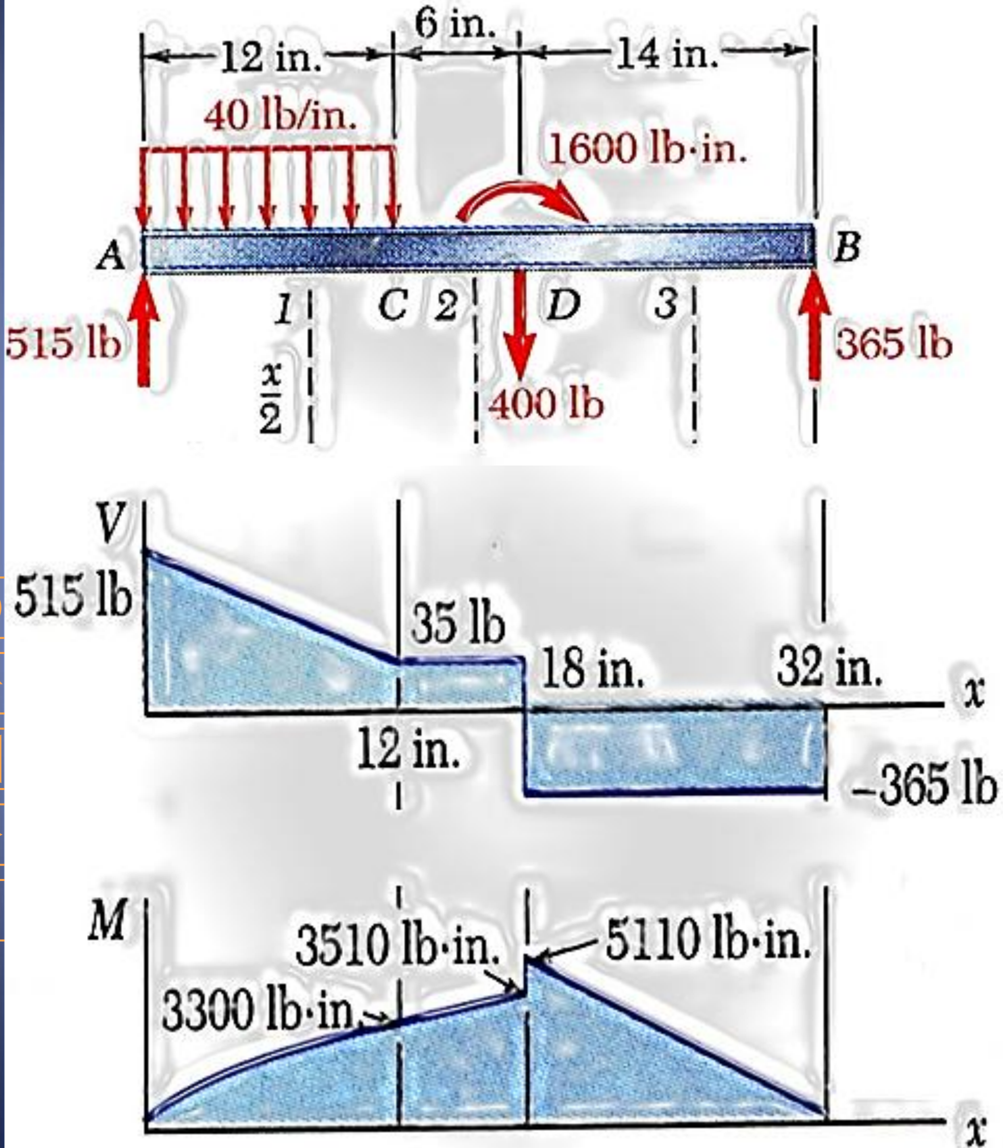
$$\boxed{V = -365 \text{ lb}}$$

$$\sum M_2 = 0: \quad -515x + 480(x-6) - 1600 + 400(x-18) + M = 0$$

$$\boxed{M = (11680 - 365x) \text{ lb} \cdot \text{in.}}$$



مثال ۳



✓ از A تا C:

$$\boxed{V = 515 - 40x}$$

$$\boxed{M = 515x - 20x^2}$$

✓ از C تا D:

$$\boxed{V = 35\ \text{lb}}$$

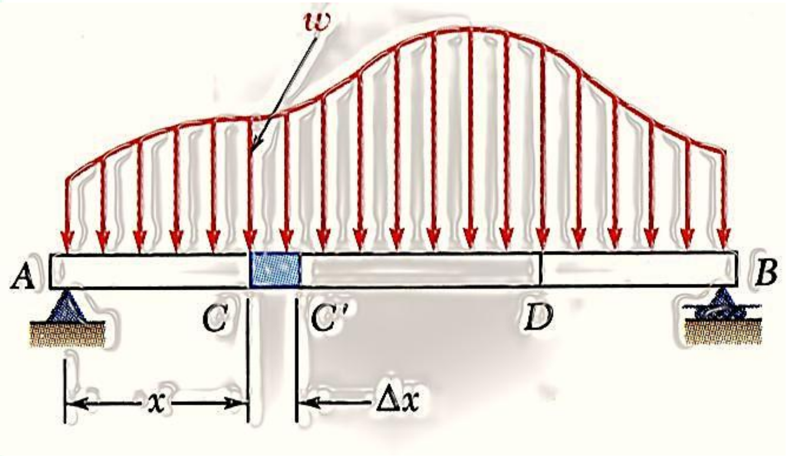
$$\boxed{M = (2880 + 35x)\ \text{lb}\cdot\text{in.}}$$

✓ از D تا B:

$$\boxed{V = -365\ \text{lb}}$$

$$\boxed{M = (11680 - 365x)\ \text{lb}\cdot\text{in.}}$$

روابط میان بار،برش وگشتاورخمشي

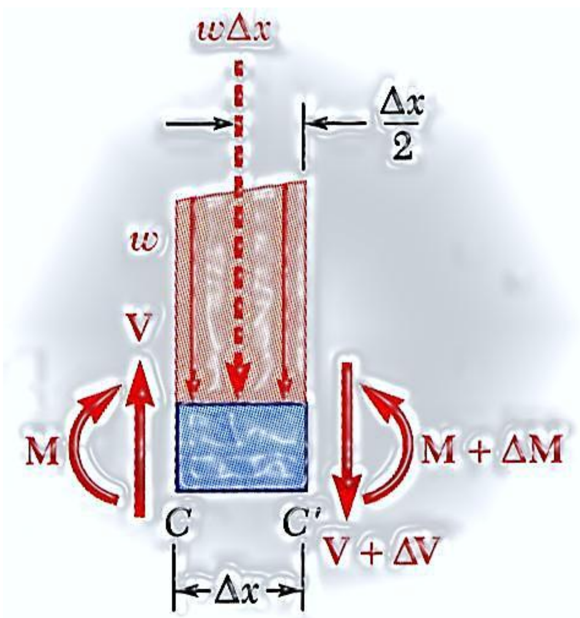


- ارتباط بین بار و برش

$$V-(V+\Delta V)-w\Delta x=0$$

$$\frac{dV}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=-w$$

$$V_D-V_C=-\int_{x_C}^{x_D} w\,dx=-(\text{مساحت زیر منحني بار})$$



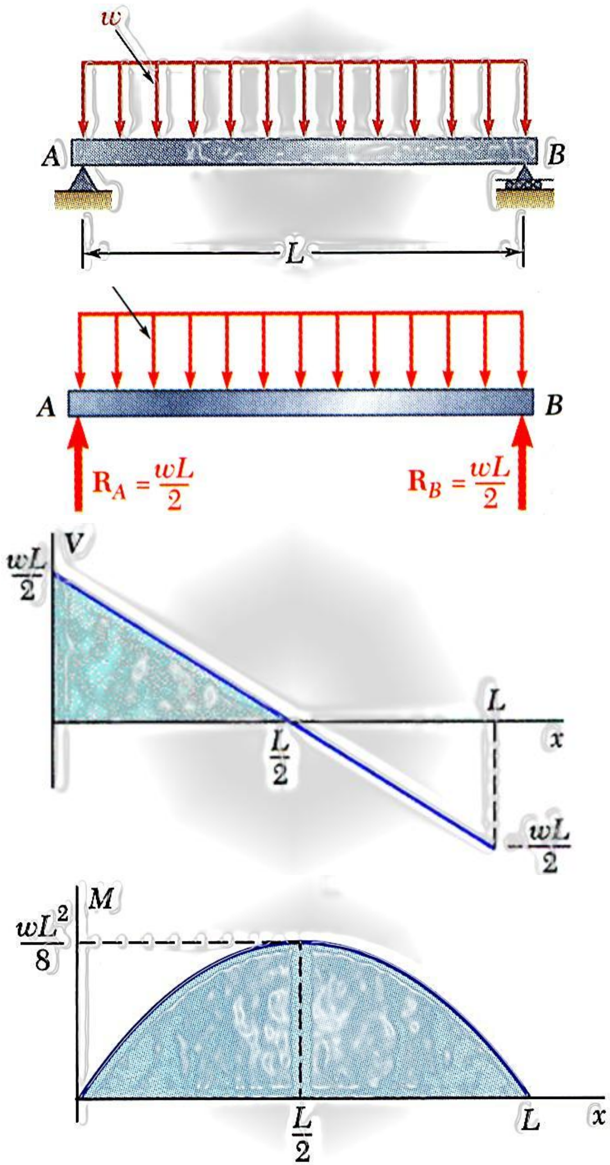
- ارتباط بین برش و لنگر خمشي :

$$(M+\Delta M)-M-V\Delta x+w\Delta x\frac{\Delta x}{2}=0$$

$$\frac{dM}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(V-\tfrac{1}{2}w\Delta x\right)=V$$

$$M_D-M_C=\int_{x_C}^{x_D} V\,dx=(\text{مساحت زیر منحني برش})$$

روابط ميان بار،برش وگشتاورخمشي



- عکس العمل تکيه گاه

$$R_A = R_B = \frac{wL}{2}$$

- منحني برش

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

- منحني خمش

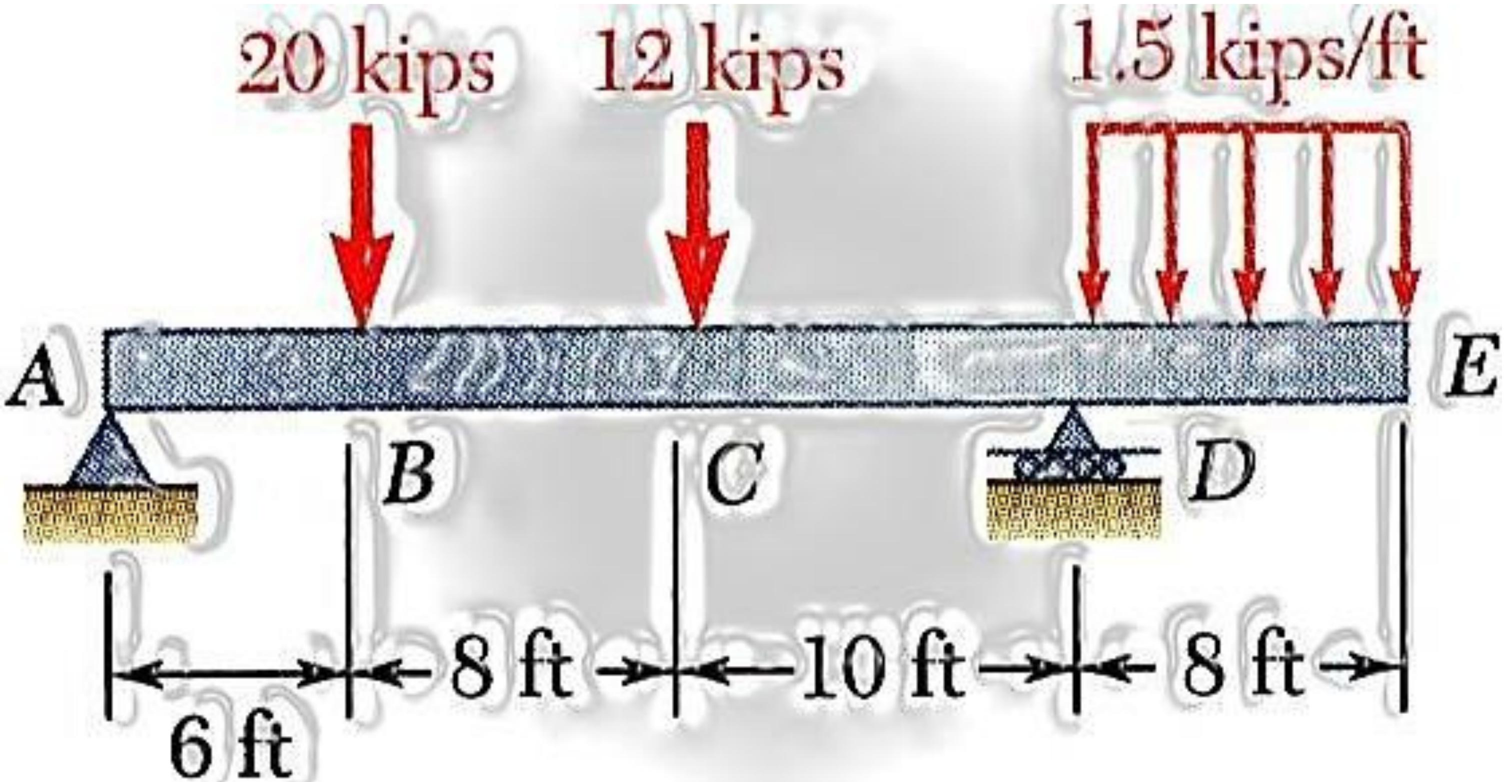
$$M - M_A = \int_0^x V dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \frac{w}{2}\left(Lx - x^2\right)$$

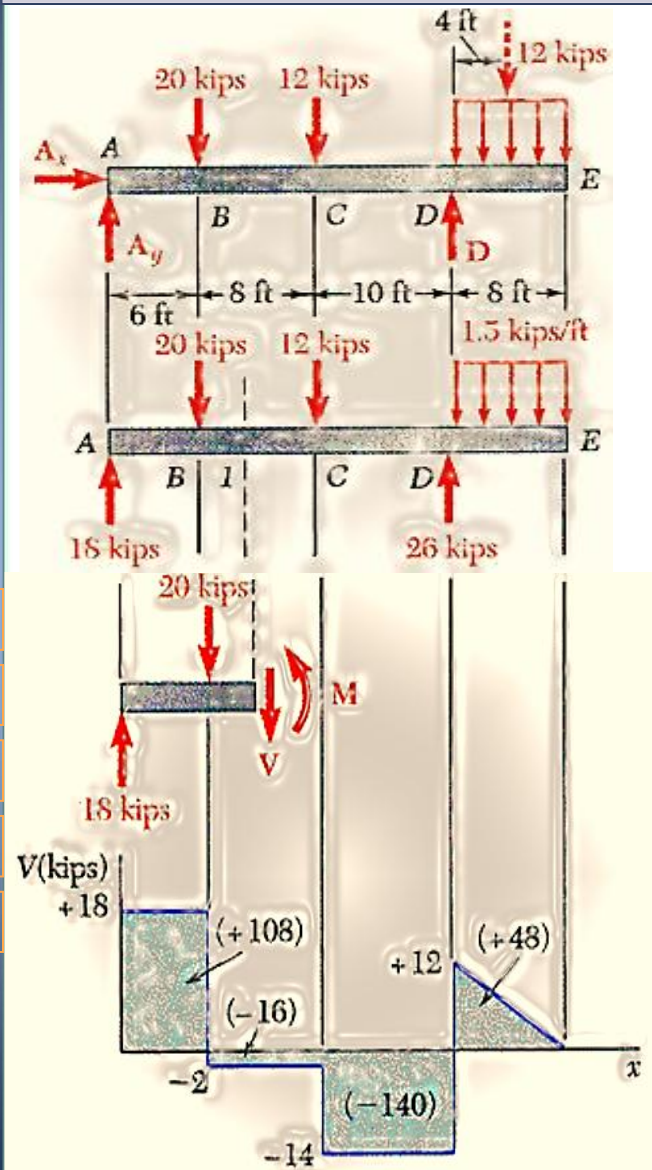
$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \quad \left(M \text{ at } \frac{dM}{dx} = V = 0\right)$$

مثال ۴

- نمودارهاي برش وخمش رابراي تير تحت بارگذاري مقابل رسم كنيد.



مثال ۴



✓ بارسم جسم آزاد کل تیر واکنشهاي تکیه گاهي را رسم مي کنیم:

$$\sum M_A = 0:$$

$$D(24\text{ ft}) - (20\text{ kips})(6\text{ ft}) - (12\text{ kips})(14\text{ ft}) - (12\text{ kips})(28\text{ ft}) = 0$$

$$\boxed{D = 26\text{ kips}}$$

$$\sum F_y = 0:$$

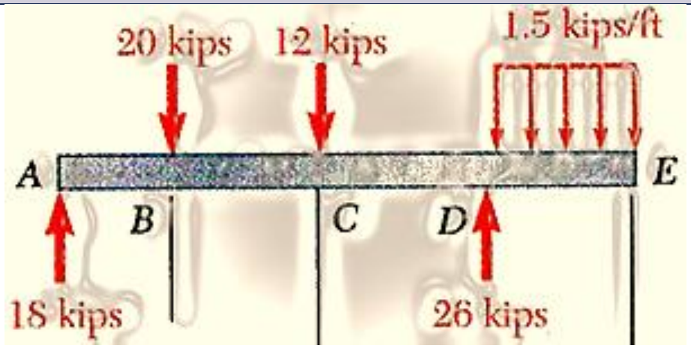
$$A_y - 20\text{ kips} - 12\text{ kips} + 26\text{ kips} - 12\text{ kips} = 0$$

$$\boxed{A_y = 18\text{ kips}}$$

✓ بین بارهاي متمرکز وعکس العملها شیب نمودار برش صفر است. $dV/dx = -w = 0$

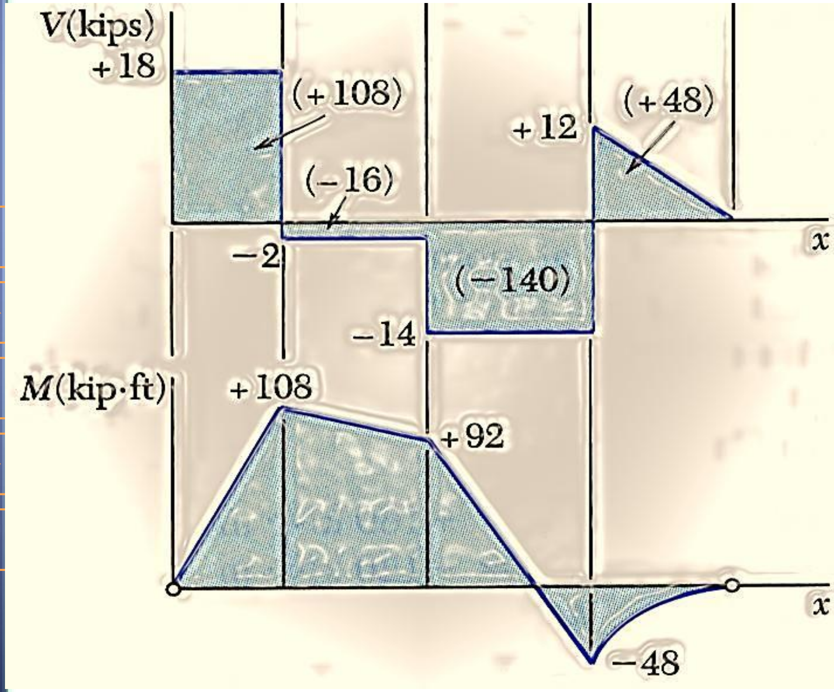
✓ درقسمت DE بارگسترده وجود دارد، لذا نمودار برشي داراي شیب وبصورت متغیر خطي مي باشد.

مثال ۴



✓ بين بارهاي متمركز وعكس العماها برش ثابت است پس شيب ثابت است.نمودارخمشي با وصل كردن نقطه هاي معلوم توسط خطهاي مستقيم رسم مي شود.

$$dM/dx = V = \text{cte}$$

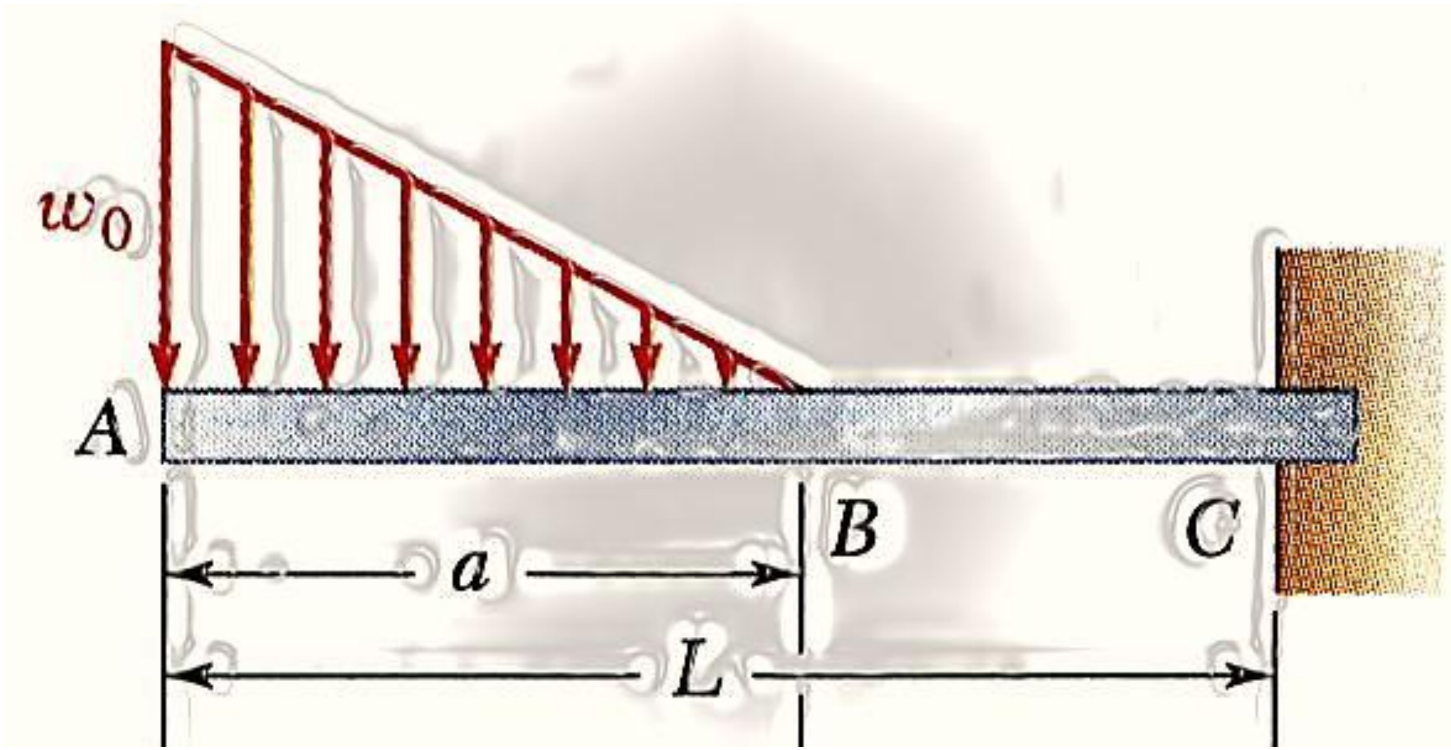


$$M_B - M_A = +108 \qquad M_B = +108 \text{ kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_C - M_B = -16 \qquad M_C = +92 \text{ kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_D - M_C = -140 \qquad M_D = -48 \text{ kip}\cdot\text{ft}$$
$$M_E - M_D = +48 \qquad M_E = 0$$

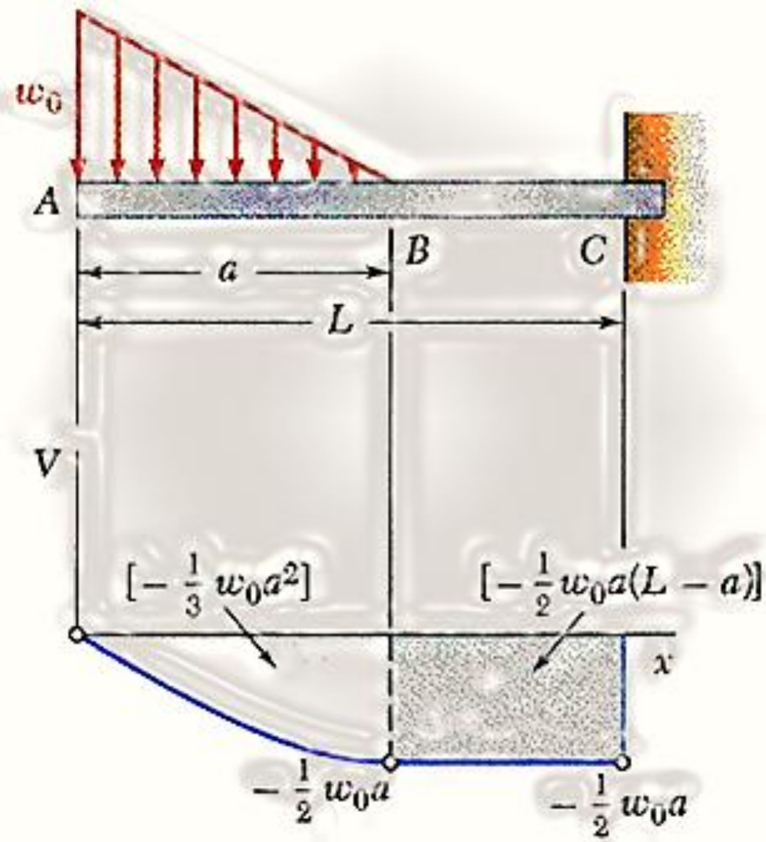
✓ درناحيه DE كه نمودار برش درجه يك مي باشد منحني خمش درجه دوم مي باشد.

مثال ۵

- نمودارهاي برش وخمش رابراي تير يكسر گيردار نشان داده شده رسم كنيد.



مثال ۵



✓ قبل از هر کاري بايد واكنش در تكيه گاه تعين شود.

در A :
$$V_A = 0, \quad \frac{dV}{dx} = -w = -w_0$$

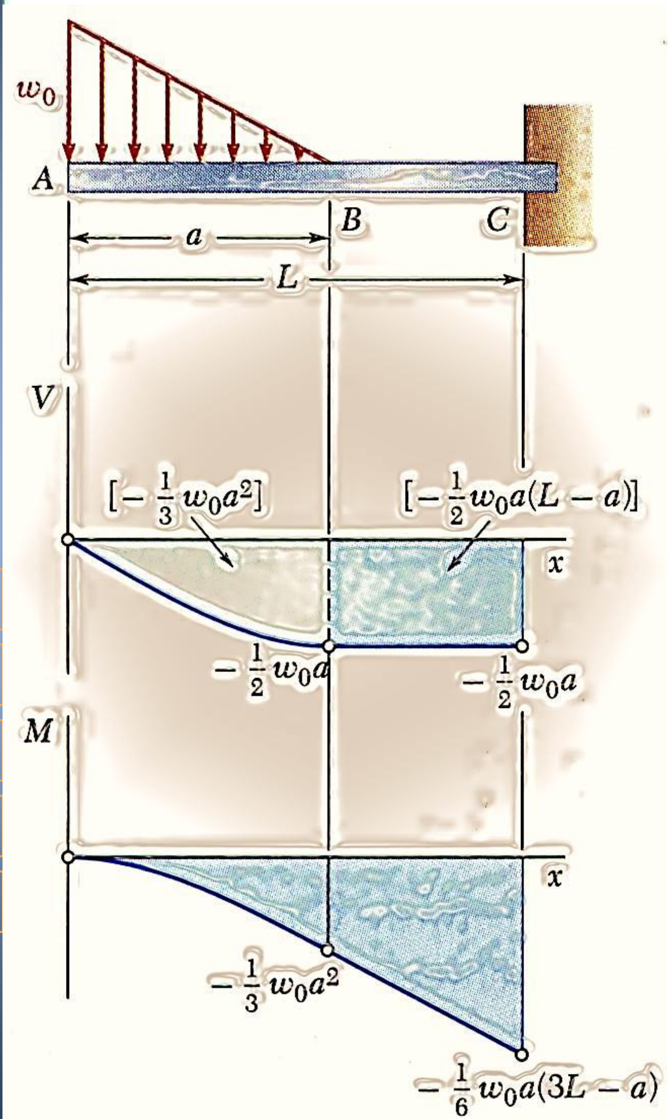
$$V_B - V_A = -\frac{1}{2}w_0a \qquad V_B = -\frac{1}{2}w_0a$$

در B :
$$\frac{dV}{dx} = -w = 0$$

✓ در B تا C تير بدون بار است، پس برش بدون تغيير همان ميزان نقطه B يا C خواهد بود.

✓ درقسمت AB باروارد‌برتير بطور خطي كاهش ميابد ونمودار برش سهمي است.

مثال ۵



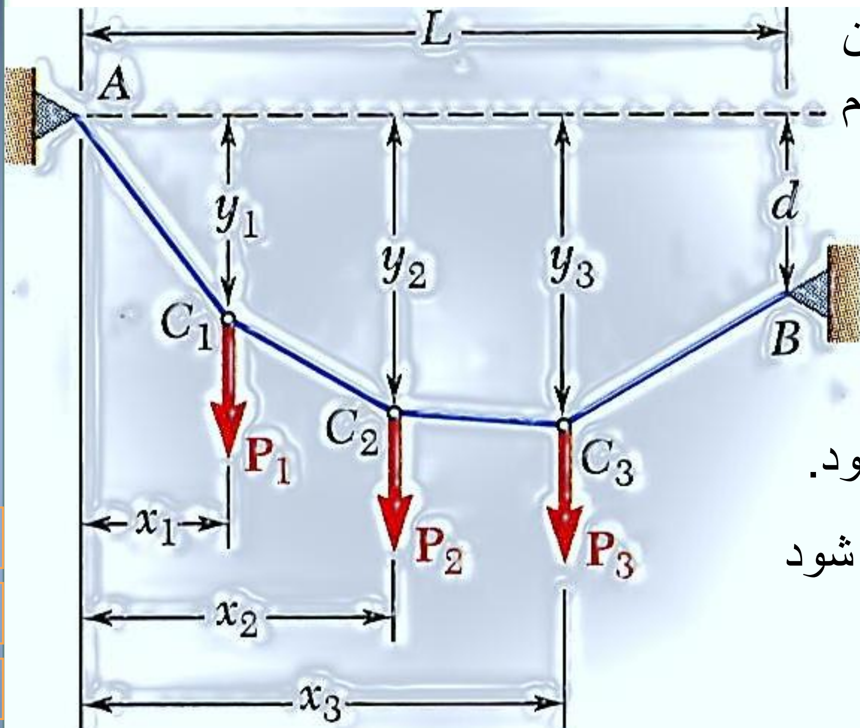
- ✓ نمودارخمشي در قسمت AB منحني درجه سه خواهد بود كه در A شيب صفر داشته و در BC بصورت خط راست است.

$$M_A = 0, \quad \frac{dM}{dx} = V = 0$$

$$M_B - M_A = -\frac{1}{3}w_0a^2 \qquad M_B = -\frac{1}{3}w_0a^2$$

$$M_C - M_B = -\frac{1}{2}w_0a(L-a) \qquad M_C = -\frac{1}{6}w_0a(3L-a)$$

كابلهاي حامل بارهاي متمركز



- كابله موارد كاربرد كاربرد فراواني درمهندسي دارند: پلهاي معلق ، خطوط انتقال نيرو، سيمهاي مهار، تلكابين ها...و به دوگروه حامل بارهاي متمركز وگسترده تقسيم مي شوند.

- جهت تحليل فرض مي كنيم:

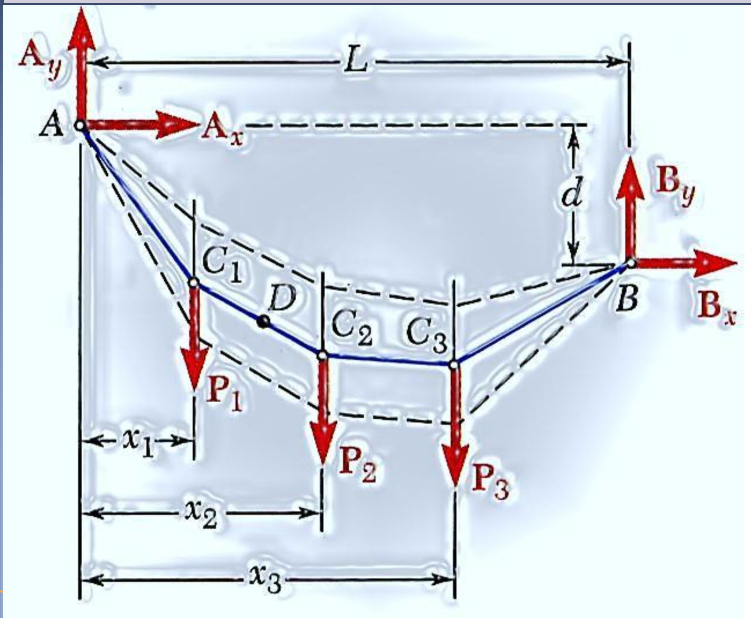
I. كابل انعطاف پذير است.

II. ازوزن كابل درمقابل بارهاي وارده صرفنظر مي شود.

III. كابل به عنوان عضوي دونيرويي درنظرگرفته مي شود وتنها به عنوان يك عضو كششي عمل مي كند.

- فرض مي كنيم شكل نهايي كابل پس ازبارگذاري مشخص بوده وبارروي يك خط عمود بين تكيه گاهها قراردارددوفواصل عمودي وافقي مشخص هستند(x_i و y_i)

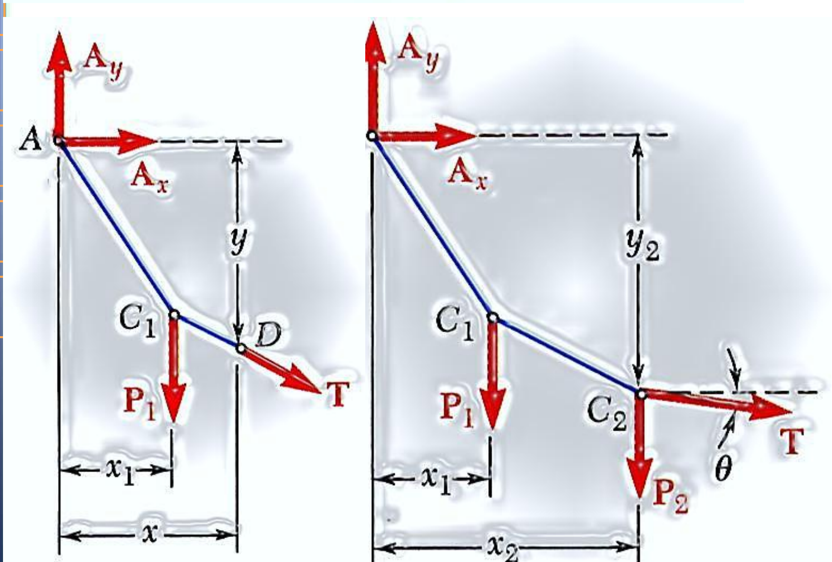
كابلهاي حامل بارهاي متمركز



- بادرنظرگرفتن نمودارجسم آزاد وجود چهارمجهول درتكيه گاهها معين مي شود كه سه معادله براي حل آنها داريم وبراي تعيين آنها كافي نيست.

- بادرنظرگرفتن تعادل براي يك قسمت ازكابل يك معادله ديگربدست مياوريم براي اين كاربايد مختصات نقطه اي مثل D راداشته باشيم.بانوشتن معادله لنگر دراين نقطه مي توانيم واكنشهاي A رابدست آوريم.

$$\sum M_D = 0.$$



- براي ديگر نقاط روي كابل :

$$\sum M_{C_2} = 0$$

حل براي: y_2

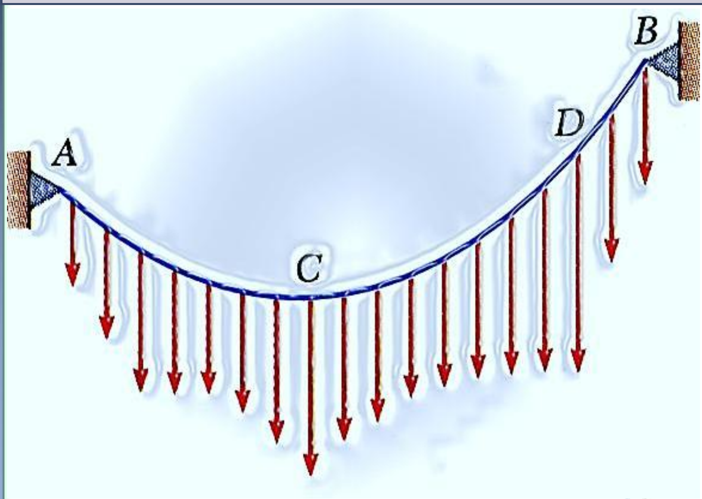
$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0$$

حل براي: T_x , T_y

- مولفه افقي كشش درهرنقطه از كابل يكسان است:

$$T_x = T\cos\theta = A_x = \text{cte}$$

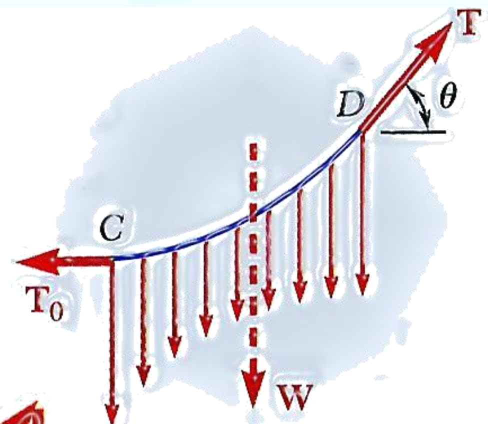
كابل با بارهاي گسترده



- درمورد كابلهاي حامل بارگسترده:

I. كابل به شكل منحني آويزان مي شود.

II. نيروي كششي درامتداد مماس برمنحني قرار دارد.

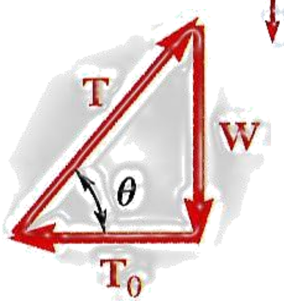


- بادرنظرگرفتن نمودارجسم آزاد نيروي كشش افقي T_0 در C نيروي كشش T درD درامتداد مماس بركابل در D وبرآيند W توسط قسمت CD كابل تحمل مي شود.

- بارسم مثلث نيرو:

$$T\cos\theta = T_0 \qquad T\sin\theta = W$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan\theta = \frac{W}{T_0}$$

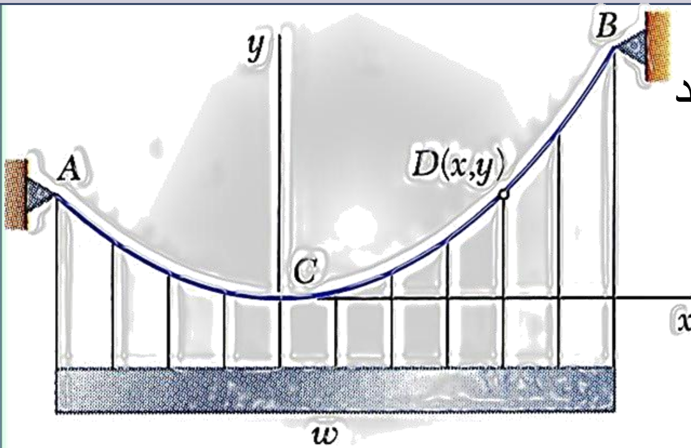


- نيروي كشش T درهمه نقاط يكسان است.مولفه عمودي T برابربابزرگي W است كه ازپايين ترين نقطه اندازه گيري مي شود.

- كشش درپايين ترين نقطه حداقل و در نقاط A و B حداكثر است.

 Meysam4366@yahoo.com

كابل بامنحني سهمي

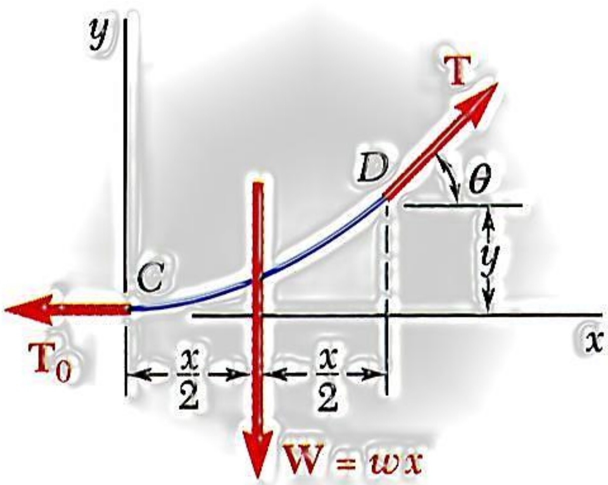


- كابل AB حاملبارگسترده يكنواختي درامتداد افقي است،فرض كنيد كابلهاي پلهاي معلق اينگونه بارگذاري مي شوند.بارآناها را با w نشان مي دهيم.(واحد N/mm يا lb/ft)

- اگرمبدا مختصات رادر C قرار دهيم متوجه مي شويم كه مقدار W باركلي كه توسط قسمت DC به مختصات xوy حمل مي شود برابر است با : $W = wx,$

- بزرگي وراستاي كشش در D خواهد شد:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \qquad \tan\theta = \frac{wx}{T_0}$$



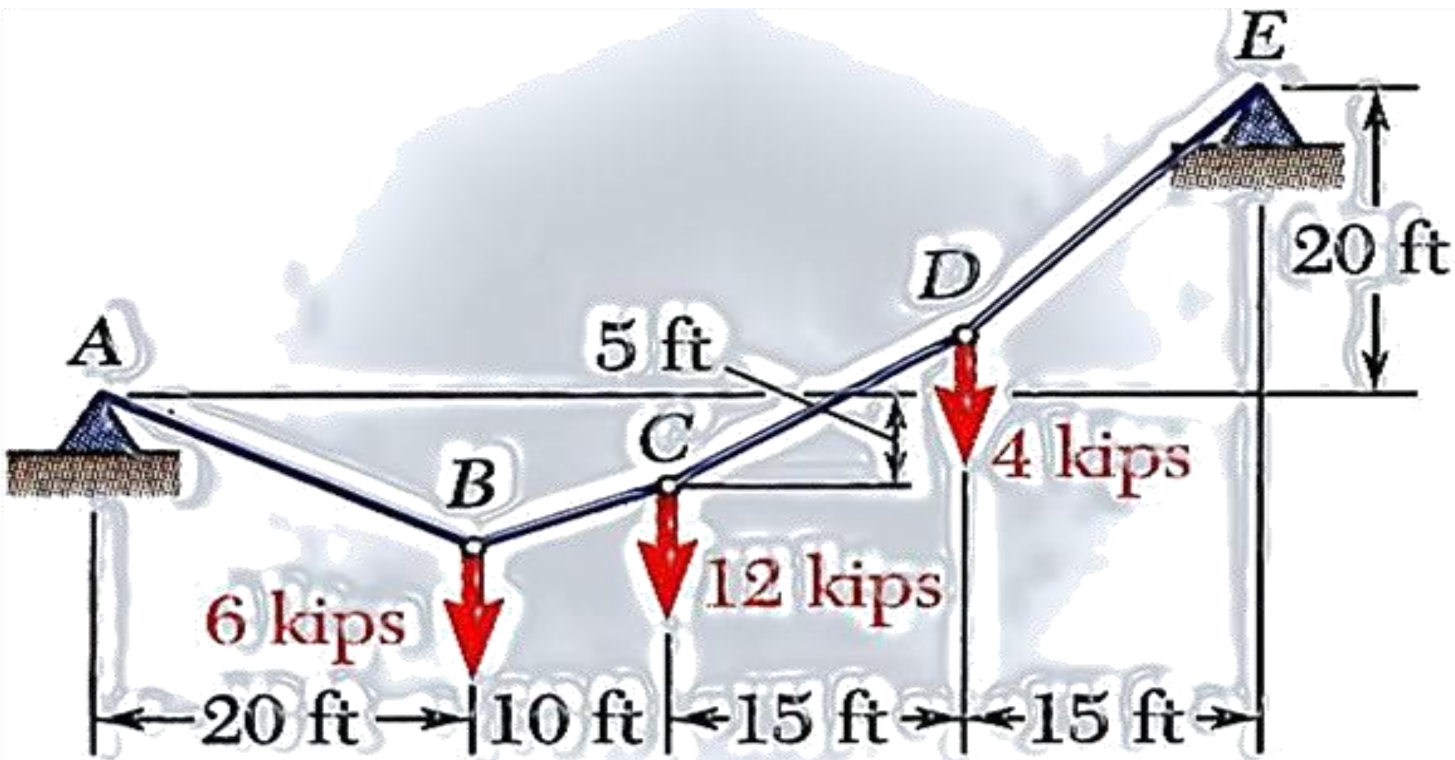
- جمع گشتاورها حول D :

$$\sum M_D = 0: \qquad wx\frac{x}{2} - T_0 y = 0 \qquad \boxed{y = \frac{wx^2}{2T_0}}$$

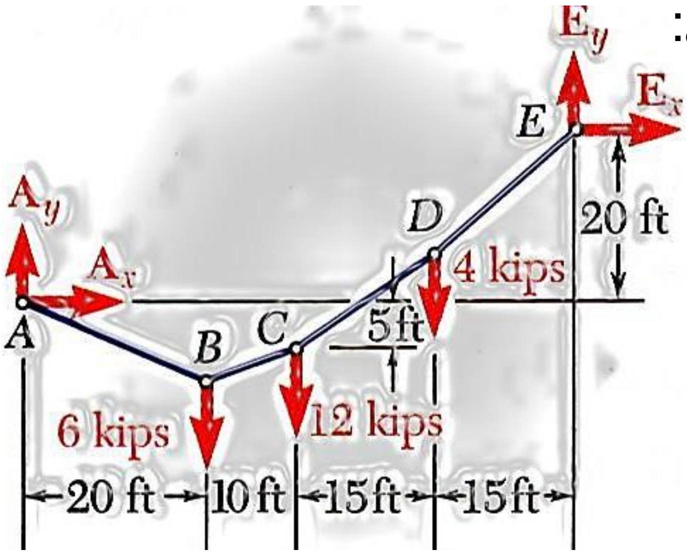
- اين معادله يك سهمي با محوري عمودي است كه راس آن در مبدا مختصات است.

مثال ۶

- کابل AE سه بار عمودي رامطابق شكل نگه داشته است.مطلوبست:
  - فاصله عمودي نقاط B و D ازتكيه گاه A.
  - حداكثر شيب وكشش كابل.



مثال ۶

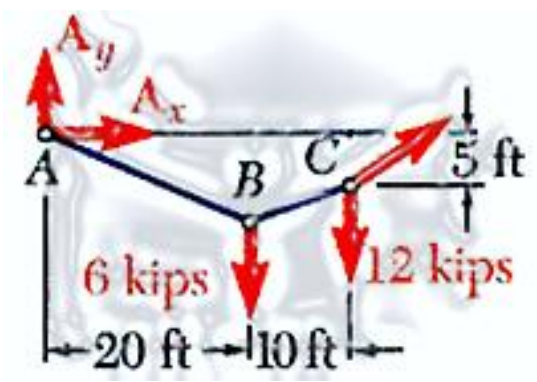


- بارسم جسم آزاد مولفه هاي مجهول تكيه گاهي را تعيين مي كنيم:

$$\sum M_E = 0:$$
$$20A_x - 60A_y + 40(6) + 30(12) + 15(4) = 0$$
$$20A_x - 60A_y + 660 = 0$$

- جسم آزاد ABC :

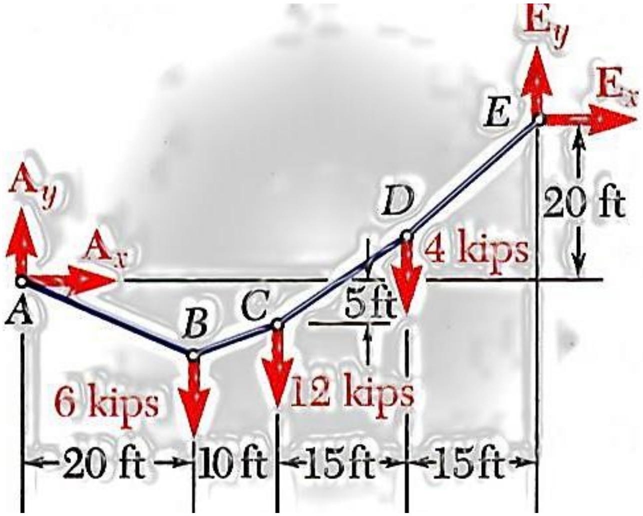
$$\sum M_C = 0:$$
$$-5A_x - 30A_y + 10(6) = 0$$



- حل همزمان دومعادله دو مجهول ما را بدست مي دهد:

$$A_x = -18\,\text{kips} \qquad A_y = 5\,\text{kips}$$

مثال ۶

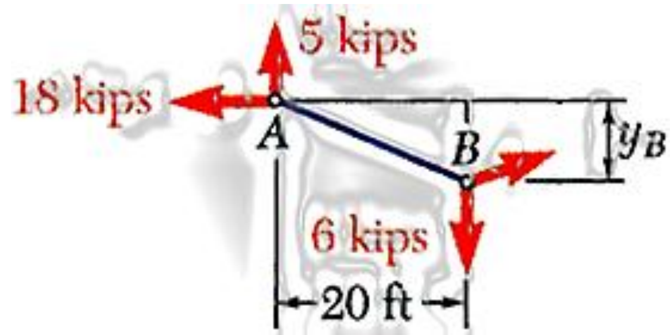


- فاصله عمودي نقاط B و D را تعين مي كنيم:

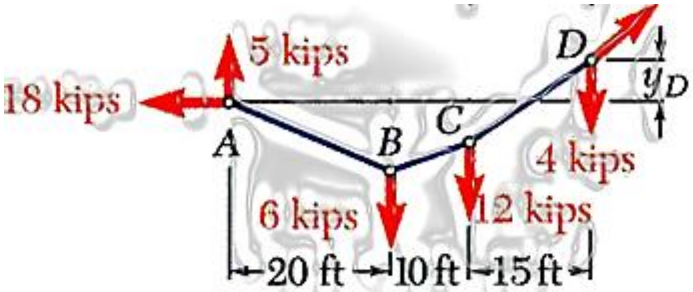
جسم آزاد AB براي تعين y_B

$$\sum M_B = 0: \qquad y_B(18) - 5(20) = 0$$

$$\boxed{y_B = -5.56 \text{ ft}}$$



- جسم آزاد ABCD براي تعين y_D



$$\sum M = 0:$$

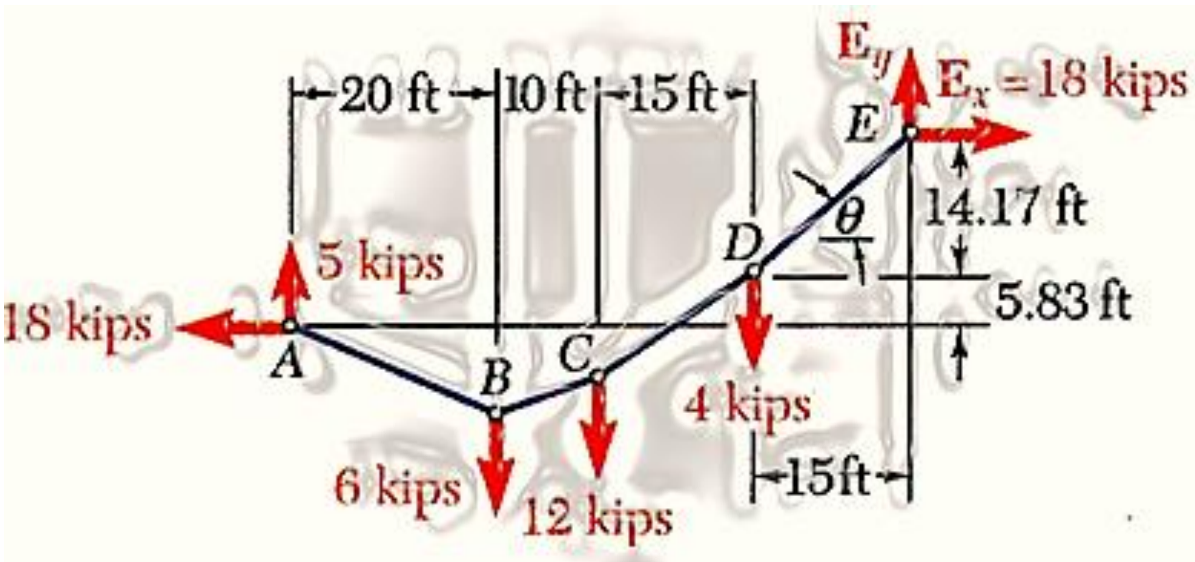
$$-y_D(18) - 45(5) + 25(6) + 15(12) = 0$$

$$\boxed{y_D = 5.83 \text{ ft}}$$

مثال ۶

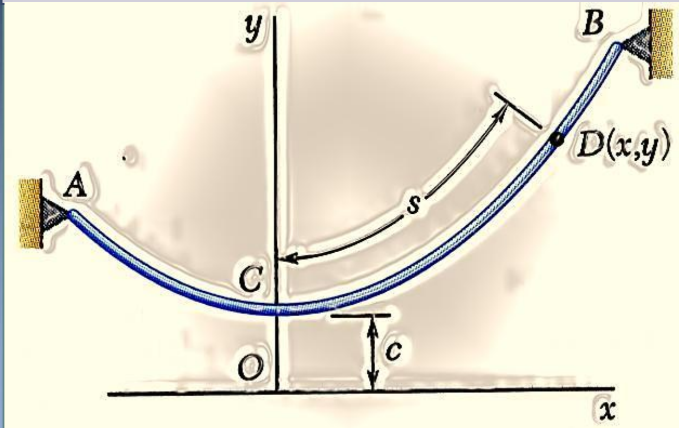
• حداکثر شیب وکشش :

درقسمت DE بیشترین شیب راداریم



$$\tan\theta = \frac{14.7}{15} \qquad \boxed{\theta = 43.4^\circ} \qquad T_{\max} = \frac{18\text{ kips}}{\cos\theta} \qquad \boxed{T_{\max} = 24.8\text{ kips}}$$

كابل با منحني زنجيري

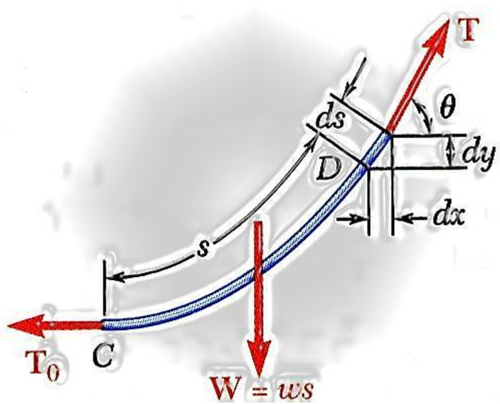


- كابلي كه حامل باري بطور يكنواخت درامتداد طولش گسترده شده است مثل كابل تحت وزن خودش.

- بزرگي W باركل وارد برقسمتي از كابل بطول s كه ازپايين ترين نقطه C تا D امتداد دارد برابراست با: $W = ws$,

- لذا كشش در D خواهد شد:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2} = w\sqrt{c^2 + s^2} \qquad c = T_0 / w$$



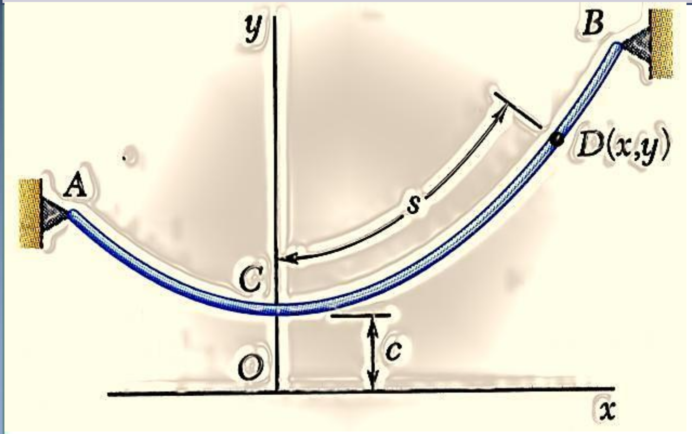
- طول s قسمت CD رابه فاصله افقي x مربوط مي كند:

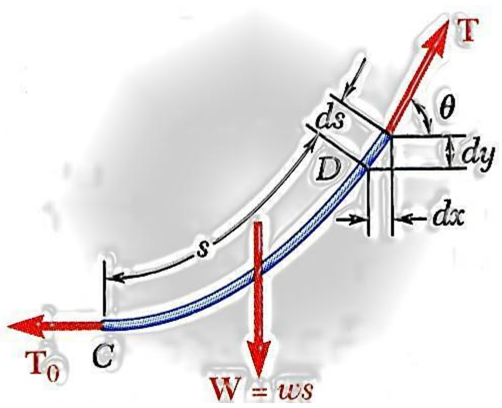
$$dx = ds\cos\theta = \frac{T_0}{T}\cos\theta = \frac{ds}{\sqrt{q + s^2/c^2}}$$

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{q + s^2/c^2}} = c\sinh^{-1}\frac{s}{c} \quad \text{and} \quad s = c\sinh\frac{x}{c}$$

Meysam4366@yahoo.com

کابل با منحني زنجيري





- رابطه بین مختصات x و y :

$$dy = dx\tan\theta = \frac{W}{T_0}dx = \frac{s}{c}dx = \sinh\frac{x}{c}\,dx$$

$$y - c = \int_0^x \sinh\frac{x}{c}\,dx = c\cosh\frac{x}{c} - c$$

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

- اين معادله منحني زنجيري با محور عمودي است.

8

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.SC.

اصطـــــطکاک

- درفصول گذشته فرض براين بود كه سطوح تماس ياكامل بدون اصطكاك اند يا ناصاف.درسطوح بدون اصطكاك دوسطح آزادانه نسبت به هم حركت مي كردند.درسطوح ناصاف نيروهاس مماسي ايجاد شده وازحركت سطوح نسبت به هم جلوگيري مي كرد.

- درواقع سطح كاملا صيقلي وبدون اصطكاك وجود ندارد.وقتي دوسطح درتماس اند نيروهاي مماسي كه نيروهاي اصطكاك ناميده مي شوند بخوبي ظاهرمي شوند.

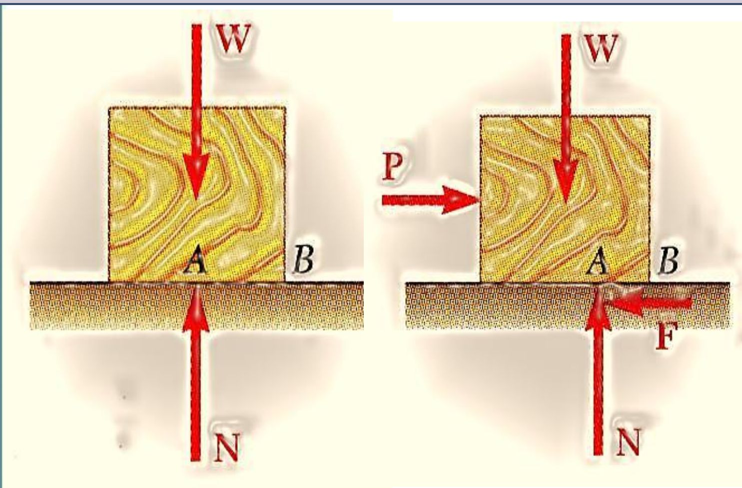
- البته نيـــروهاي اصطكاك ازنظر مقدار محدودند ودرصورتي كه نيــروي كافي وارد كنيم نمي توانند از حركت جلوگيري كنند.

- تمايز بين سطوح بدون اصطكاك وناصاف در واقع يك صفت مقايسه اي است.

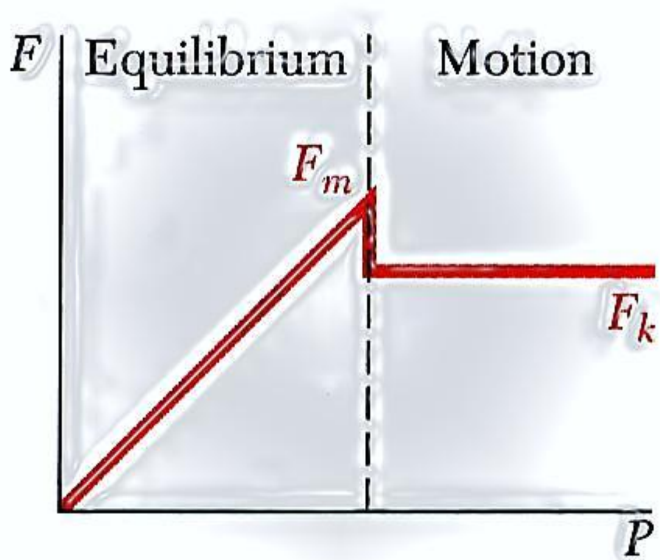
- دو نوع اصطكاك:

  - اصطكاك **خشك** واصطكاك **سيالي** هستند كه نوع سيالي درميان لايه هايي ازسيال كه باسرعتهاي متفاوت حركت مي كنند پديد مي آيد. به اصطكاك خشك گاهاً اصطكاك **كولني** نيز مي گويند.

قوانين اصطكاك خشك،ضرايب اصطكاك



- وزن W برروي يك سطح تخت افقي قرارداده شده است،نيروهاي وارد برقطعه عبارتند از وزن(W)وعكس العمل سطح(N)، بافرض تاثير نيروي افقي P :
  - اگر P كوچك باشد قطعه حركت نخواهد كرد.لذا نيرويي وجوددارد كه آنرا خنثي مي كند.اين نيرو همان اصطكاك ايستايي F است.



  - اگرنيروي P زياد شود نيروي اصطكاك F هم افزايش مي يابد وهمواره درجهت مخالف P عمل خواهد كرد،تااينكه مقدارش به مقدار حداكثر F_m برسد:

$$F_m = \mu_s N$$

قطعه دراين حالت درآستانه لغزش است.

  - باافزايش P قطعه شروع بع حركت كرده ومقدار Fاز F_m به F_k تنزل ميابد.

$$F_k = \mu_k N$$

F_k همان اصطكاك جنبشي است

قوانين اصطكاك خشك،ضرايب اصطكاك

مقادير تقريبي ضريب اصطكاك ايستايي براي سطوح خشك

0.15–0.60	فلز روي فلز
0.20–0.60	فلزروي چوب
0.30–0.70	فلزروي سنگ
0.30–0.60	فلزروي چرم
0.25–0.50	چوب روي چوب
0.25–0.50	چوب روي چرم
0.40–0.70	سنگ روي سنگ
0.20–1.00	خاك روي خاك
0.60–0.90	لاستيك روي سيمان

- μ_s در رابطه اصطكاك ايستايي، ضريب اصطكاك ايستايي نام دارد.

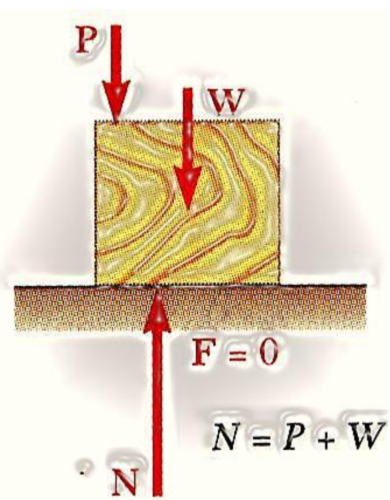
$$F_m = \mu_s N$$

- μ_k در رابطه اصطكاك جنبشي، ضريب اصطكاك جنبشي نام دارد.

$$F_k = \mu_k N$$

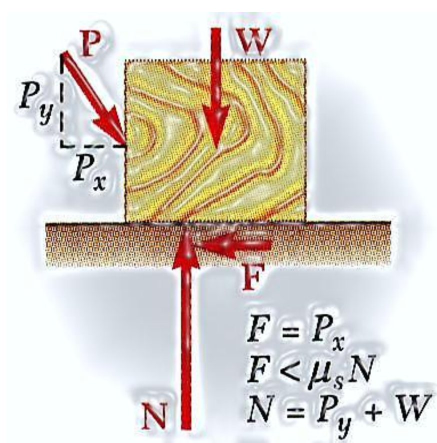
$$\mu_k \cong 0.75\mu_s$$

- درهنگام تماس يك جسم صلب بايك سطح افقي ممكن است چهارحالت اتفاق بيفتد:



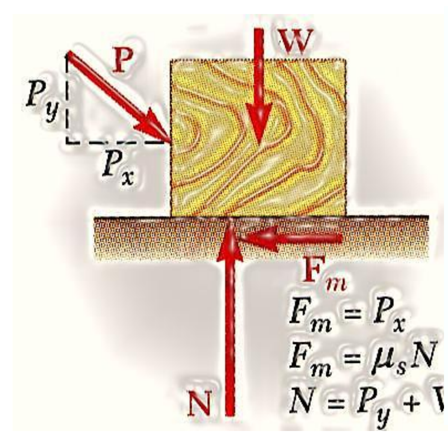
- بدون اصطكاك

$(P_x = 0)$



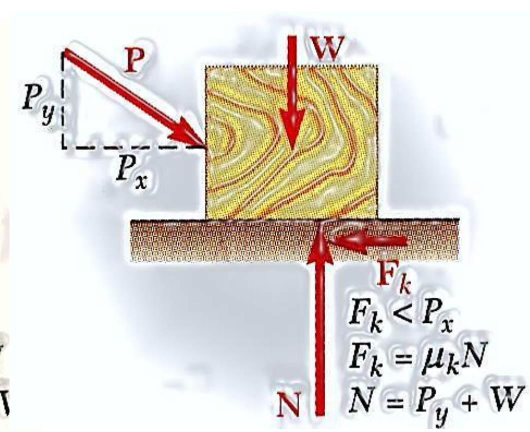
- بدون حركت

$(P_x < F_m)$



- درشرف حركت

$(P_x = F_m)$

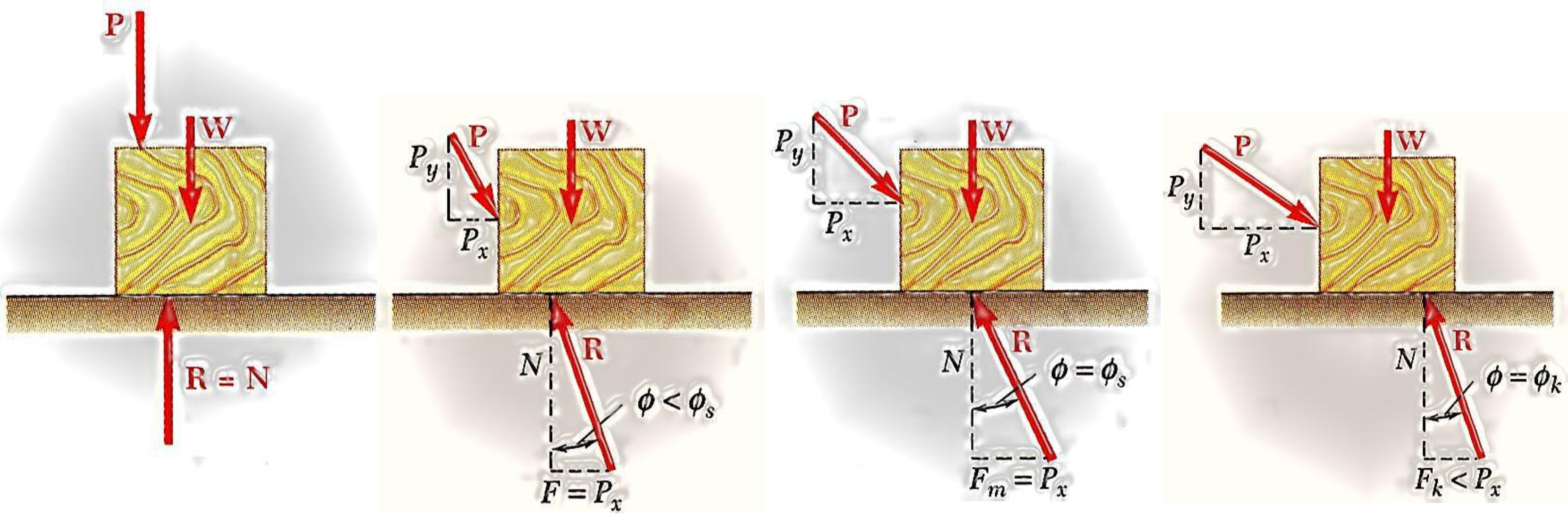


- حركت

$(P_x > F_m)$

زاویه اصطکاک

- گاهي بهتر است بجاي نيروي قائم N ونيروي اصطكاك F برآيندشان را R را قرار دهيم.به زاويه ايجاد شده بين برآيند وخط قايم زاويه اصكاك ايستايي يا جنبشي $\varnothing_{s \text{ or } k}$ گويند.



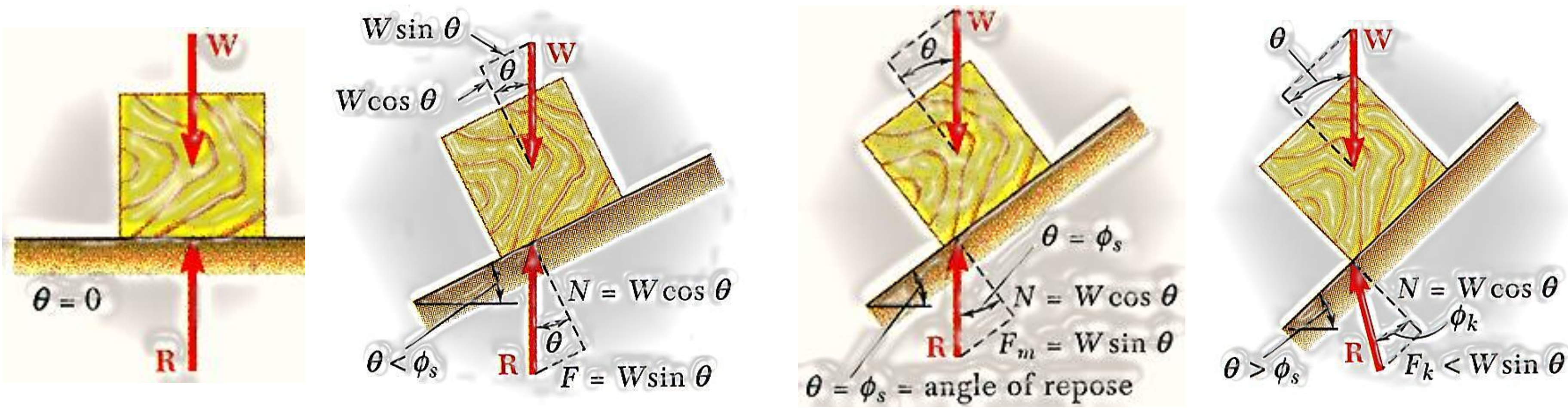
- بدون اصطكاك
- بدون حرکت
- درشرف حرکت
- درحال حرکت

$$\tan \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s N}{N}$$
$$\tan \phi_s = \mu_s$$

$$\tan \phi_k = \frac{F_k}{N} = \frac{\mu_k N}{N}$$
$$\tan \phi_k = \mu_k$$

زاویه اصطكاك

- قطعه وزني را را روي سطح شيبداري با شيب كوچك θ درنظر بگيريد،باتغيير زاويه مانند حالات زير خواهيم داشت:



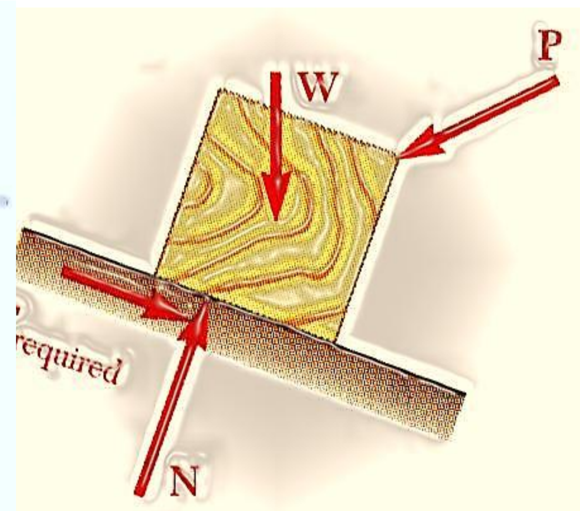
- بدون اصطكاك
- بدون حركت
- درشرف حركت
- درحال حركت

- مقدار زاويه شيب متناظر با آستانه حركت را زاويه قرار (angel of repose) مي نامند.واضح است اين زاويه برابر زاويه اصطكاك ايستايي است.

مسائل مربوط به اصطكاك خشك

• بيشتر مسايل مربوط به اصطكاك دريكي از سه دسته زير قرار مي گيرند:

❑ دسته اول

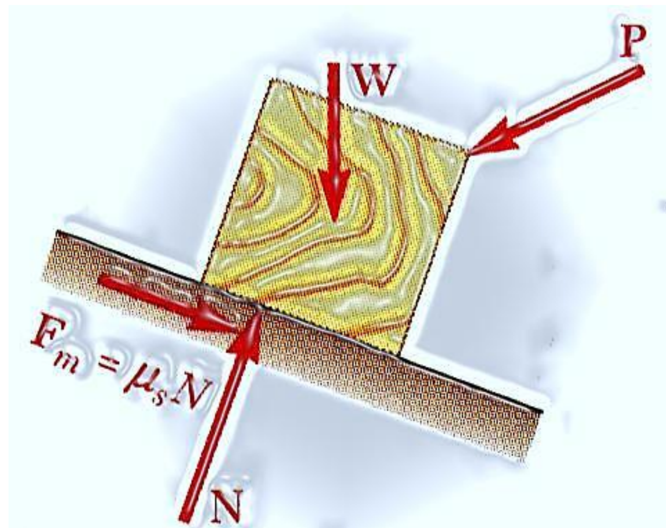


❑ همه نيروهاي وارد معين اند

❑ ضرايب اصطكاك معلومند

❑ بايد تعين كنيم كه آيا جسم درحال سكون مي ماند يا مي لغزد.

○ دسته دوم

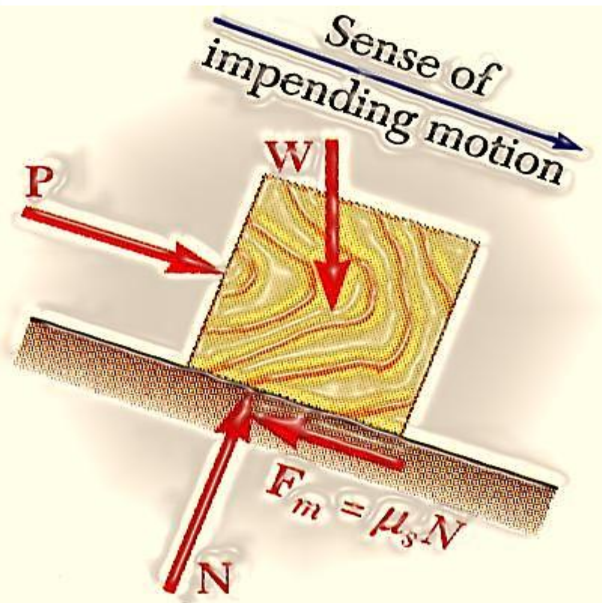


○ همه نيروهاي اعمال شده معلومند

○ حركت درآستانه وقوع است

○ بايد مقدار ضريب اصطكاك ايستايي راتعين كنيم.

➢ دسته سوم



➢ ضريب اصطكاك ايستايي معلوم است

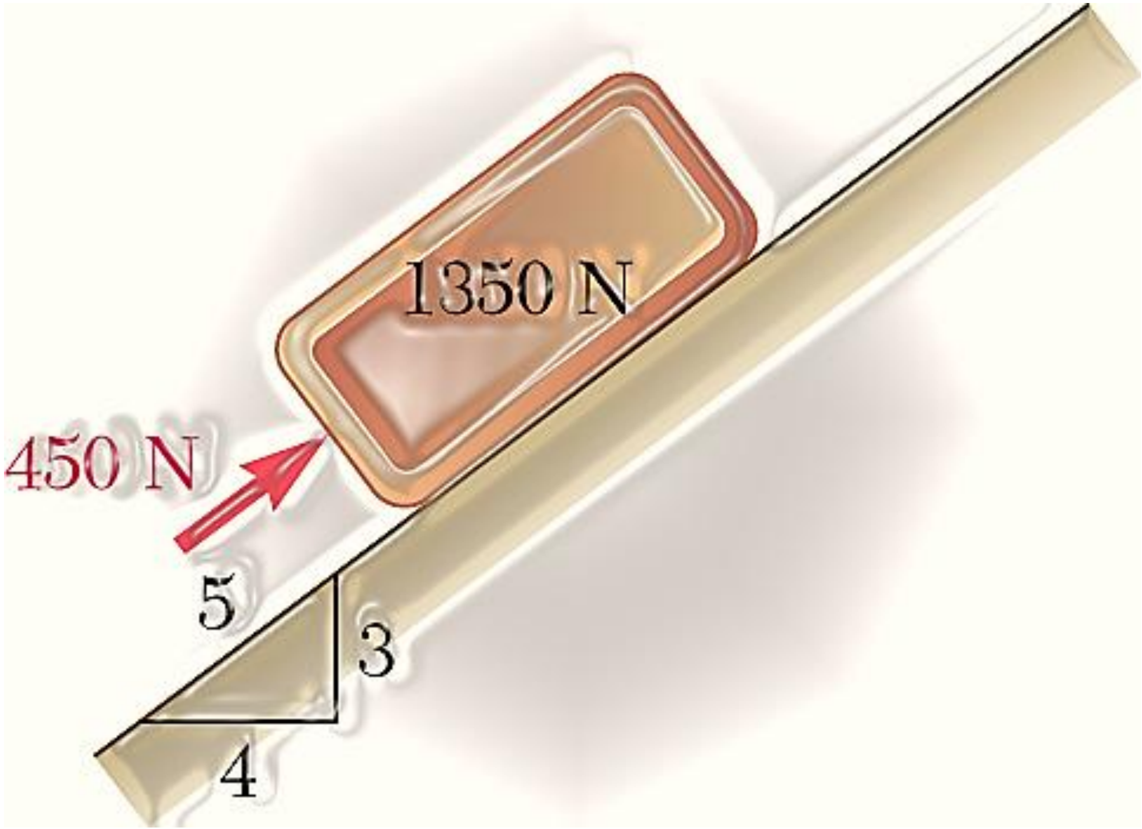
➢ جسم درراستاي معين در آستانه حركت است

➢ بايدبزرگي ياراستاي يكي از نيروهاي اعمال شده راتعين كنيم.

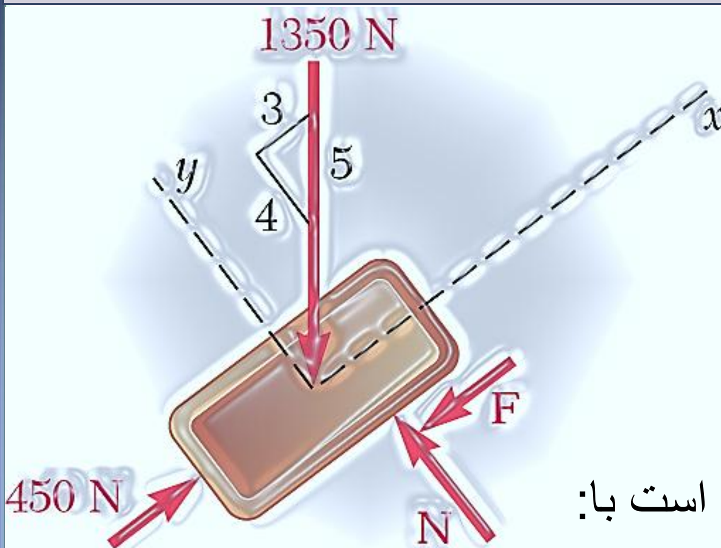
مثال ۱

- باتوجه به شكل تعيين كنيد كه آيا جسم درحال تعادل است ومقدار نيروي اصطكاك را بدست آوريد.

$\mu_s = 0.25$, $\mu_k=0.20$



مثال ۱



- ✓ ابتدا مقدار نيروي لازم براي تعادل را بدست مي آوريم.

$$\sum F_x = 0: \qquad 450\ \text{N} - \tfrac{3}{5}(1350\ \text{N}) - F = 0$$

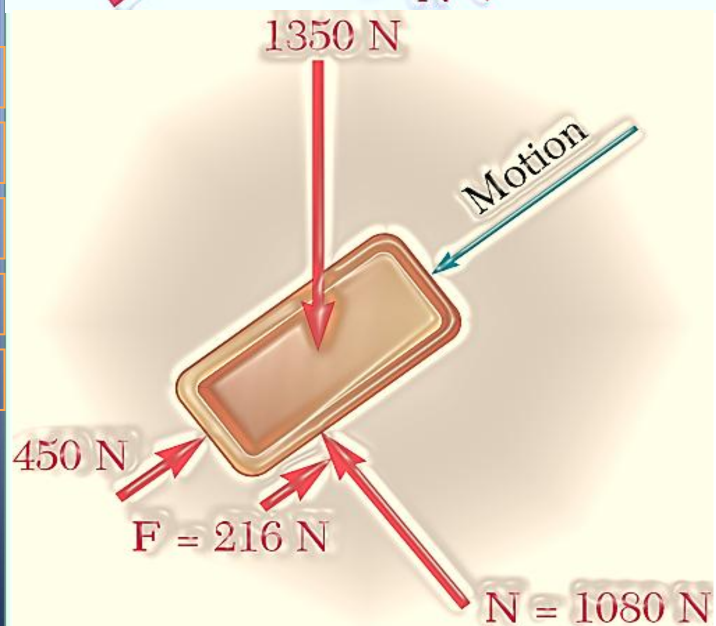
$$\boxed{F = -360\ \text{N}}$$

$$\sum F_y = 0: \qquad N - \tfrac{4}{5}(1350\ \text{N}) = 0$$

$$\boxed{N = 1080\ \text{N}}$$

- ✓ مقدار حداكثر نيروي اصطكاك كه ممكن است ايجاد شود برابر است با:

$$F_m = \mu_s N \qquad F_m = 0.25(1080\ \text{N}) = 270\ \text{N}$$



قطعه به طرف پايين سطح خواهد لغزيد.

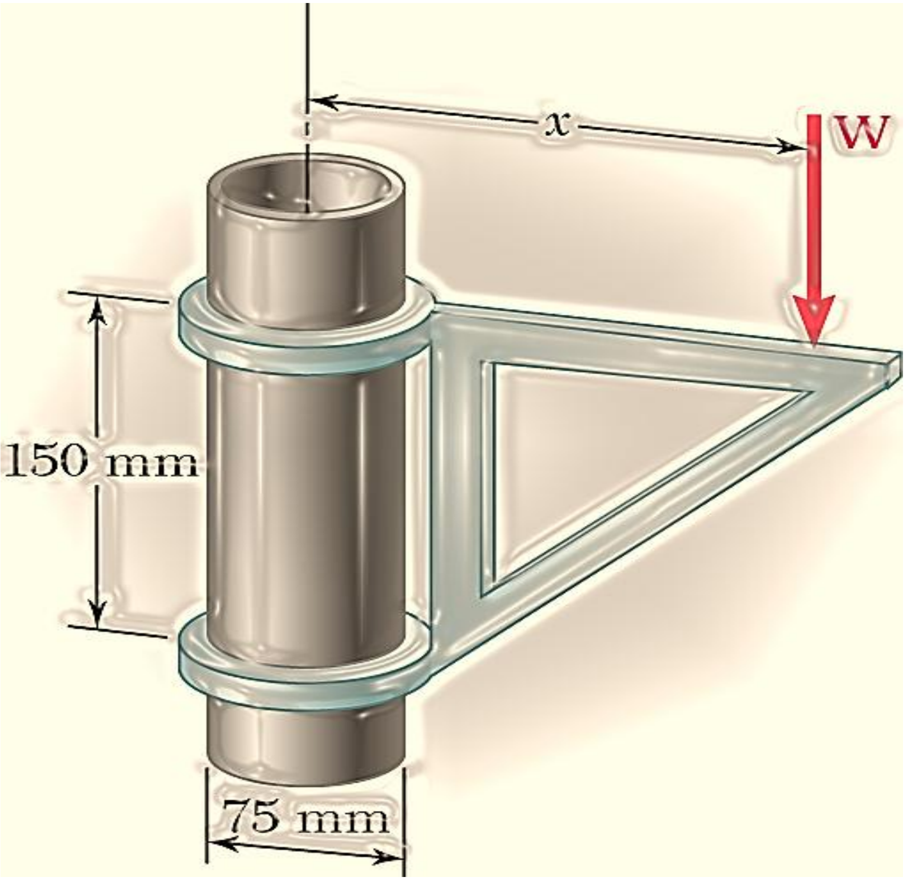
- ✓ مقدار واقعي نيروي اصطكاك به اين ترتيب بدست خواهد آمد:

$$F_{actual} = F_k = \mu_k N$$
$$= 0.20(1080\ \text{N})$$

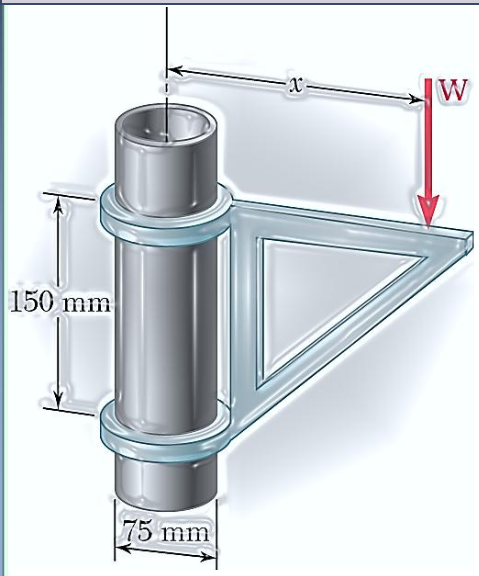
$$\boxed{F_{actual} = 216\ \text{N}}$$

مثال ۲

- نگهدارنده متحرك نشان داده شده رامي شود درهرارتفاعي روي لوله به قطر75mm قرارداد.اگرضريب اصطكاك ايستايي بين لوله ونگهدارنده 0.25 باشد ،حداقل فاصله x براي آنكه بار W رانگه دارد چقدراست؟ازوزن نگهدارنده صرفنظر شده است.



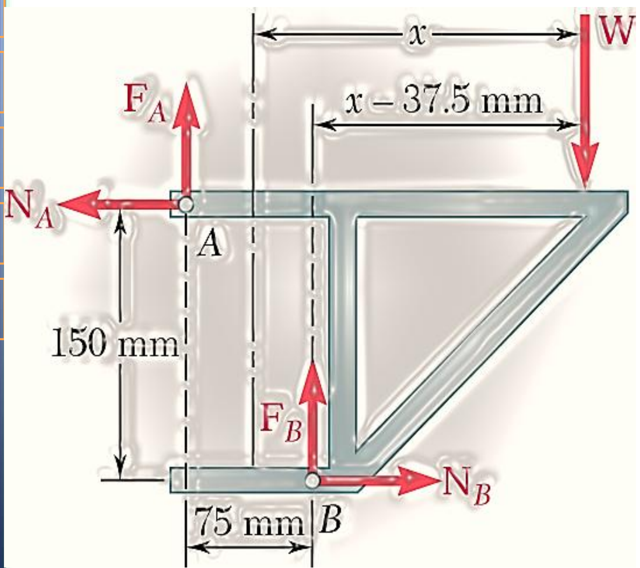
مثال ۲



✓ وقتي نگهدارنه در فاصله x باشد يعني درآستانه لغزش است.

$$F_A = \mu_s N_A = 0.25 N_A$$
$$F_B = \mu_s N_B = 0.25 N_B$$

✓ معادلات تعادل:

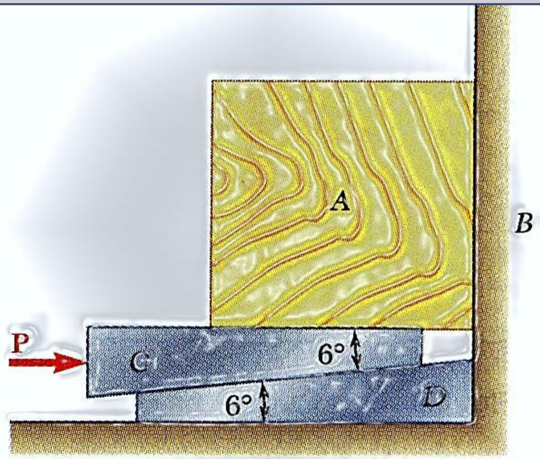


$$\sum F_x = 0: \qquad N_B - N_A = 0 \qquad \boxed{N_B = N_A}$$

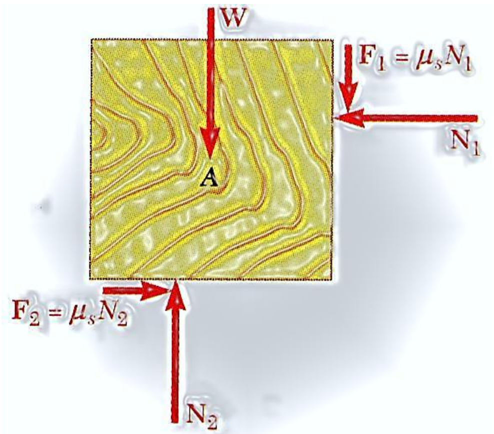
$$\sum F_y = 0: \quad F_A + F_B - W = 0$$
$$0.25 N_A + 0.25 N_B - W = 0$$
$$0.5 N_A = W \qquad \boxed{N_A = N_B = 2W}$$

$$\sum M_B = 0:$$
$$N_A(150 \text{ mm}) - F_A(75 \text{ mm}) - W(x - 37.5 \text{ mm}) = 0$$
$$150 N_A - 75(0.25 N_A) - W(x - 37.5 \text{ mm}) = 0$$
$$150(2W) - 18.75(2W) - W(x - 37.5 \text{ mm}) = 0$$
$$\boxed{x = 300 \text{ mm}}$$

گوه ها



- گوه ها،ماشينهاي ساده اي براي بلند كردن قطعه سنگهاي بزرگ وساير بارهاي سنگين هستند.
- بااستفاده از گوه مي توان بارها را با اعمال نيرويي كمتر از وزن بار،بلند كرد.
- اصطكاك ميان سطوع مانع از بيرون رانده شدن گوه از بين سطوح خواهد شد.
- مي توان نيروي P را براي حركت دادن گوه محاسبه كرد.

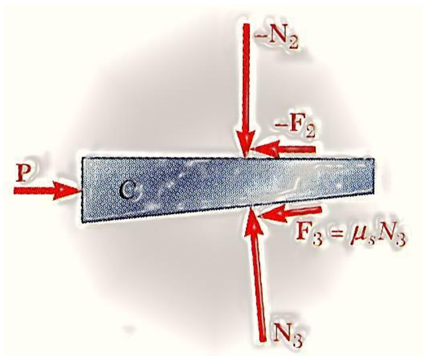


- با توجه به نمودار جسم آزاد بلوك

$$\sum F_x = 0:$$
$$-N_1 + \mu_s N_2 = 0$$
$$\sum F_y = 0:$$
$$-W - \mu_s N_1 + N_2 = 0$$

يا

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{W} = 0$$



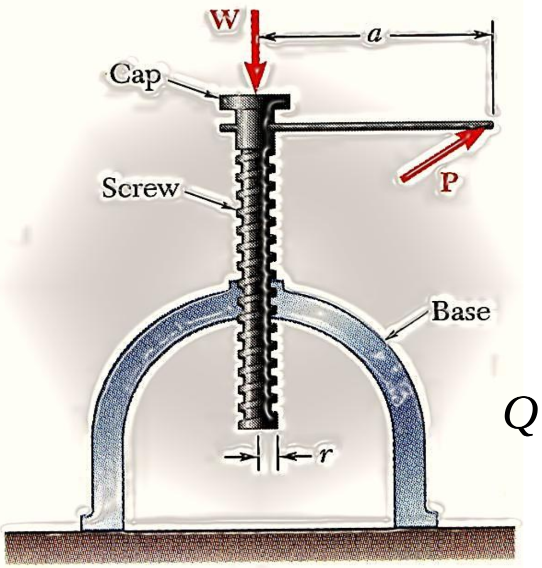
- با توجه به نمودار جسم آزاد گوه

$$\sum F_x = 0:$$
$$-\mu_s N_2 - N_3(\mu_s \cos 6° - \sin 6°) + P = 0$$
$$\sum F_y = 0:$$
$$-N_2 + N_3(\cos 6° - \mu_s \sin 6°) = 0$$

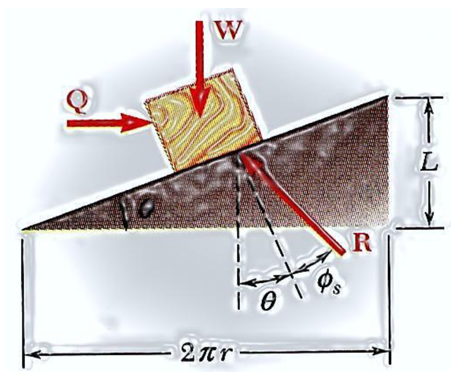
يا

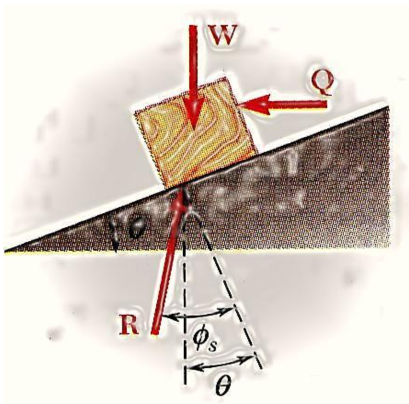
$$\vec{P} - \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = 0$$

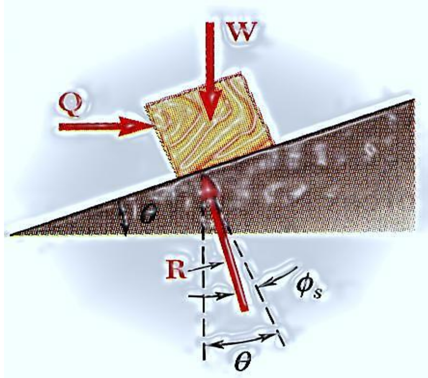
پیچهاي دنده چهار گوش



- ازپيچ دنده هاي چهارگوش درجکها پرسها و سايرمکانيسمها استفاده مي شود. تحليل اين پيچها شبيه تحليل قطعه لغزنده درامتداد سطح شيبدار است.
- شيب ازطريق حاصلضرب $2\pi r$ درامتداد افقي وجلوبر L پيچ درامتداد قائم بدست مي آيد. r شعاع ميانگين دنده ها و L فاصله ايست که پيچ دريك نوبت چرخيدن بالا مي رود.
- گشتاور نيروي افقي Q حول محور پيچ بايد با گشتاور P برابر باشد: $Q = Pa/r$



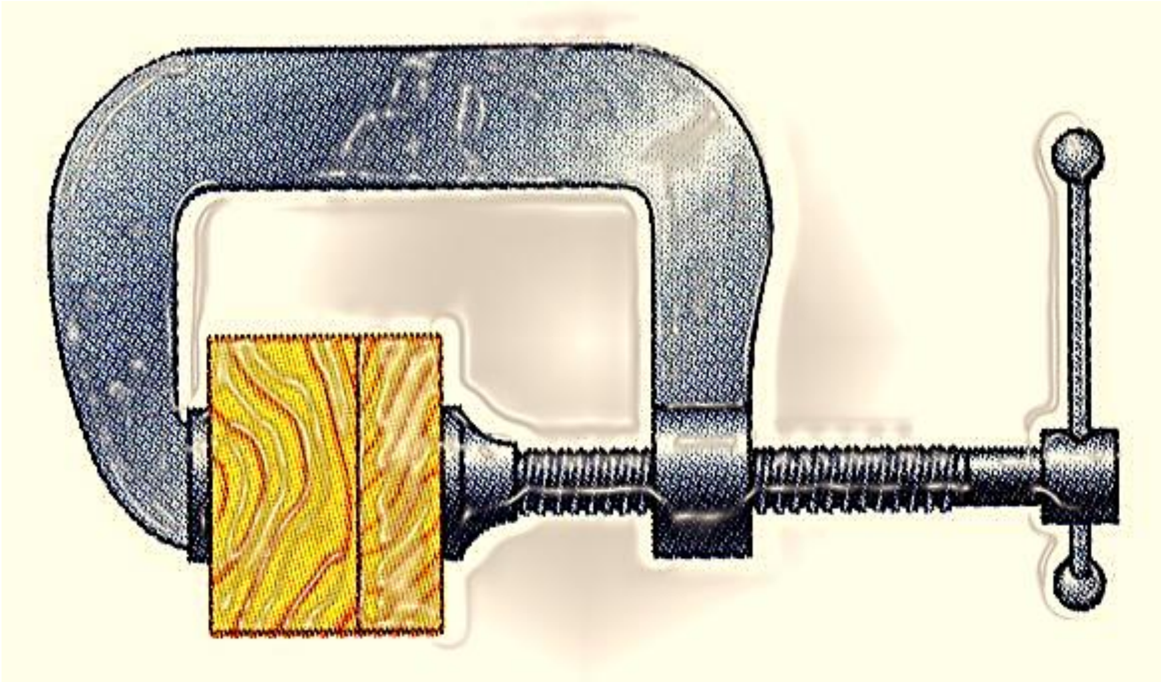




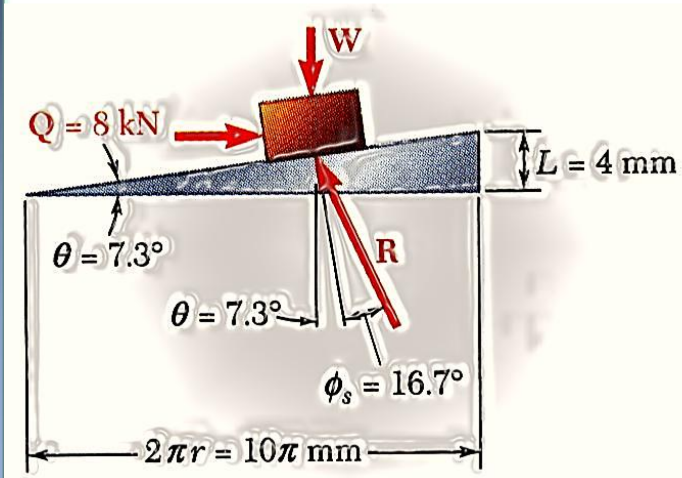
- درشرف حرکت به طرف بالا
- درشرف حرکت به طرف پايين با: $\phi_s > \theta,$
- درشرف حرکت به طرف پايين با: $\phi_s > \theta,$

مثال ۳

- ازيك گيره براي نگهداري دو قطعه استفاده شده است.گيره داراي دنده چهارگوش دوراهه باقطر ميانگين 10mm وگام 2mm است.ضريب اصطكاك ميان دنده ها برابر 0.3است.اگربراي سفت كردن گيره حداكثر 40N.m گشتاور اعمال شده باشد،مطلوبست:
  - نيروي وارد برقطعات چوب.
  - گشتاور لازم براي شل كردن گيره.



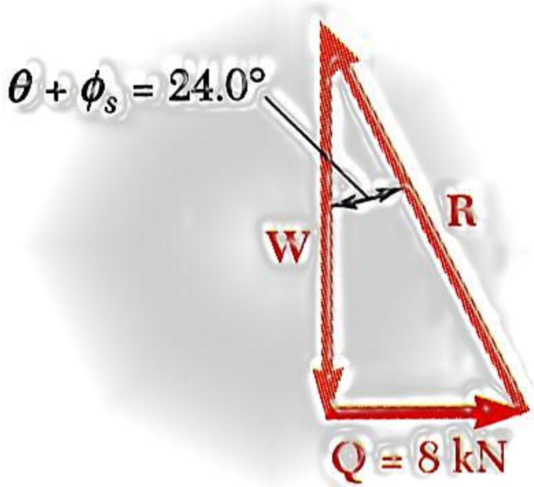
مثال ۳



✓ محاسبه نيروي اعمال شده توسط گيره:

$$\tan\theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{2(2\text{ mm})}{10\pi\text{ mm}} = 0.1273 \qquad \theta = 7.3^\circ$$

$$\tan\phi_s = \mu_s = 0.30 \qquad \phi_s = 16.7^\circ$$



✓ نيروي Q كه بايد به قطعه نماينده پيچ واردشود برابر قراردادن گشتاور Qr حول محور پيچ با گشتاور اعمال شده بدست مي آيد:

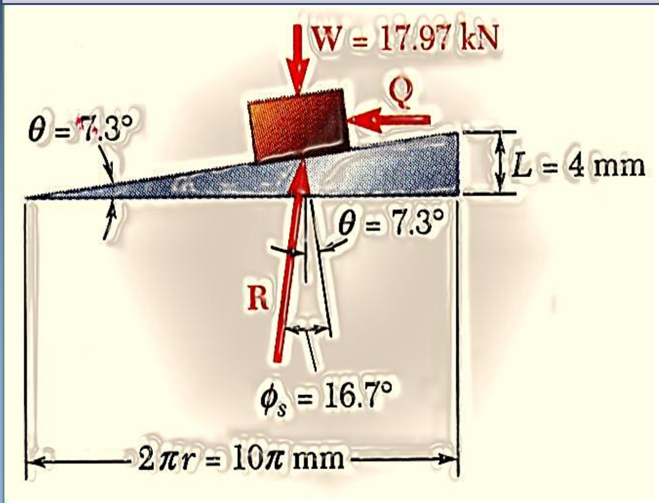
$$Qr = 40\text{ N}\cdot\text{m} \qquad Q = \frac{40\text{ N}\cdot\text{m}}{5\text{mm}} = 8\text{kN}$$

$$\tan(\theta+\phi_s) = \frac{Q}{W} \qquad W = \frac{8\text{kN}}{\tan 24^\circ}$$

$$\boxed{W = 17.97\text{ kN}}$$

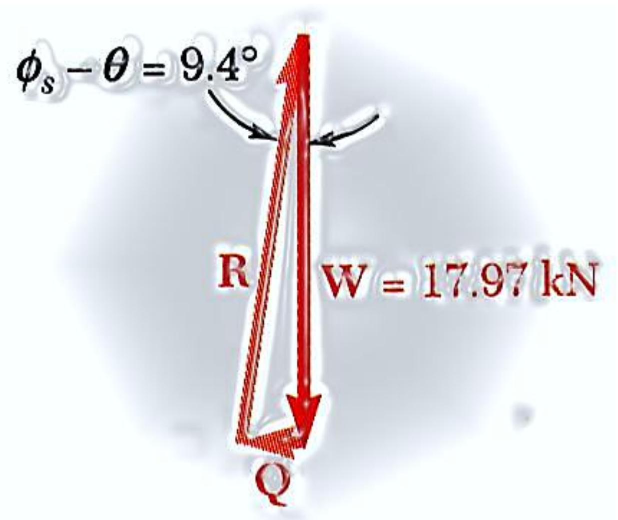
مثال ۳

✓ نيروي Q براي شل كردن گيره:



$$\tan(\phi_s - \theta) = \frac{Q}{W} \qquad Q = (17.97\,\text{kN})\tan 9.4^\circ$$

$$Q = 2.975\,\text{kN}$$

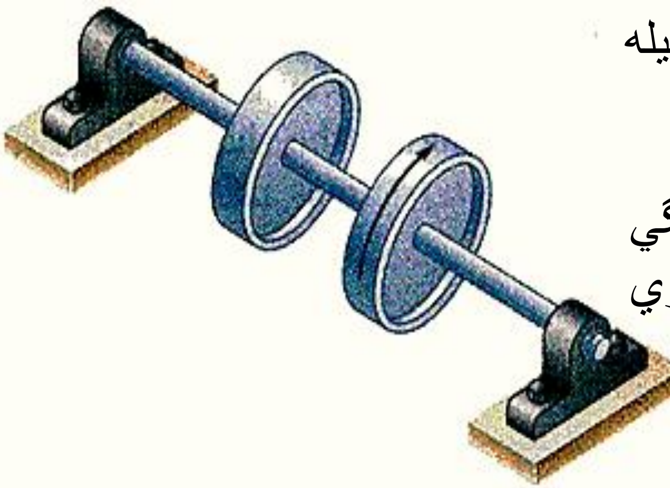


$$\text{گشتاور} = Q\,r = (2.975\,\text{kN})(5\,\text{mm})$$

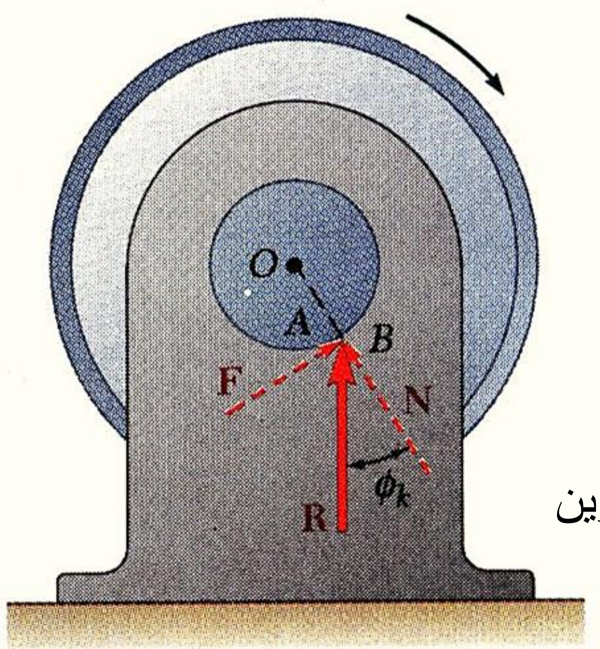
$$= \left(2.975 \times 10^{3}\,\text{N}\right)\left(5 \times 10^{-3}\,\text{m}\right)$$

$$\boxed{\text{گشتاور} = 14.87\,\text{N}\cdot\text{m}}$$

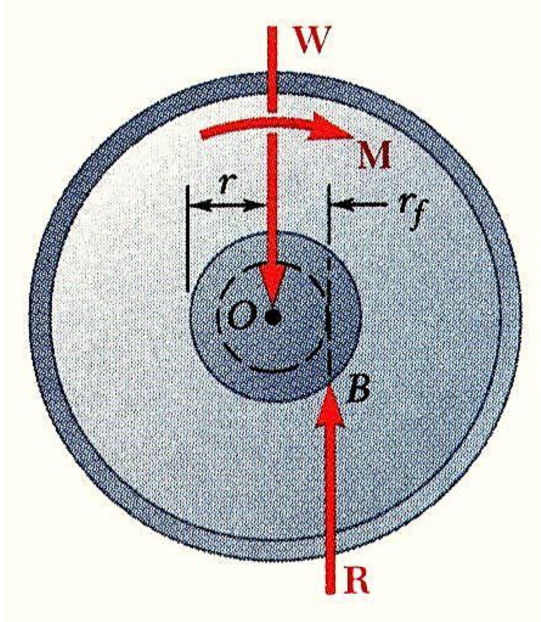
ياتاقانهاي بوشي.اصطكاك محوري

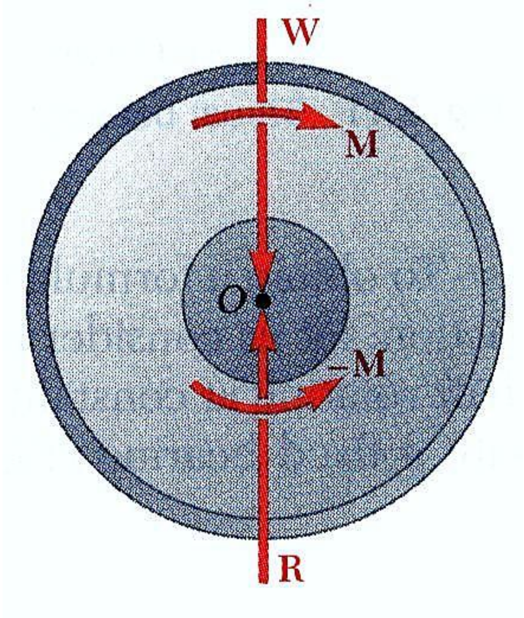


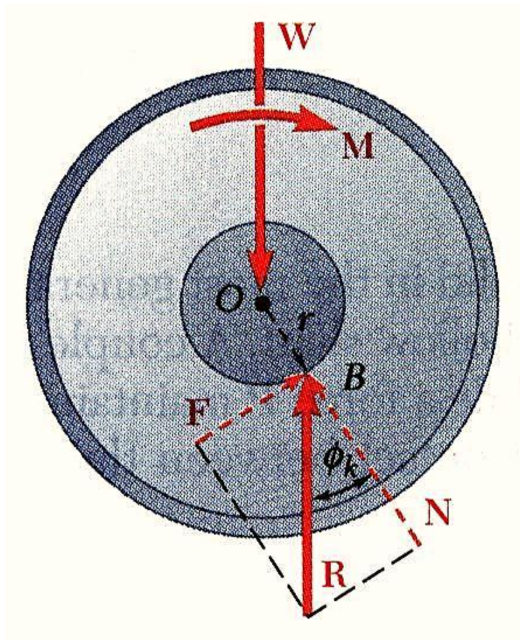
- ياتاقان هاي بوشي براي تامين تكيه گاه جانبي براي محورها وميله هاي درحال چرخش كار ميروند.
- اين ياتاقان ها اگركاملا روغنكاري شود،مقاومت اصطكاكي بستگي به سرعت چرخش ،فاصله آزاد(لقي)بين محور وياتاقان،وگرانروي روغن دارد.
- نيروهاي وارد برجسم آزاد ياتاقان : وزن چرخ W ،كوپل لازم براي ادامه حركت M ،نيروي نماينده عكس العمل ياتاقان R .
- نيروي R عمودي ، برابر T ودرجهت مخالف W است.اما خط اثرآن از مركز O عبور نخواهد كرد تا با گشتاور M مقابله كند.
- تماس ميان محور و ياتاقان در نقطه B رخ خواهد داد نه در پائين ترين نقطه مانند A.



ياتاقانهاي بوشي.اصطكاك محوري







- گاهي خط اثر R رابه سهولت مي توان رسم كرد به شرط آنكه بردايره اصطكاك محور وياتاقان به مركزيت O وشعاع r_f مماس باشد.

$$r_f = r \sin \phi_k$$
$$\approx r\mu_k$$

- گاهي كوپل نماينده مقاومت اصطكاكي ياتاقان است.

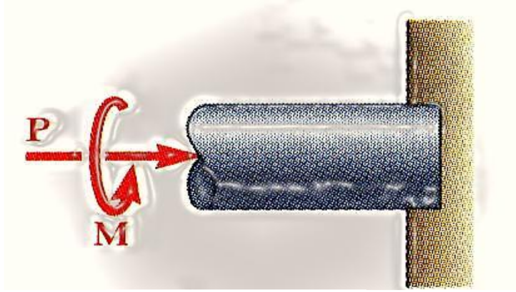
- زاويه بين R و عمود برسطح ياتاقان برابر بازاويه اصطكاك جنبشي φ_k است.

$$M = Rr\sin\phi_k$$
$$\approx Rr\mu_k$$

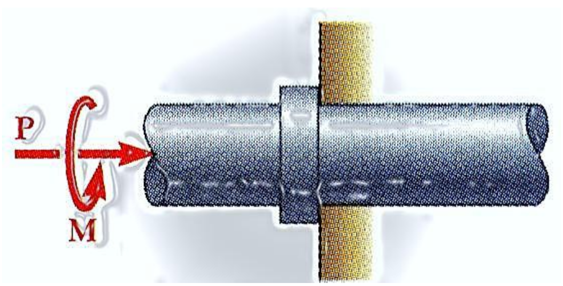
ياتاقانهاي كف گرد. اصطكاك ديسكي

- اصطكاك ميان سطوح دايره اي رااصطكاك ديسكي مي نامند و درمكانيسمهايي مثل كلاچ ديسكي رخ مي دهد.

- يك محور توخالي درحال چرخش رادرنظر بگيريد:



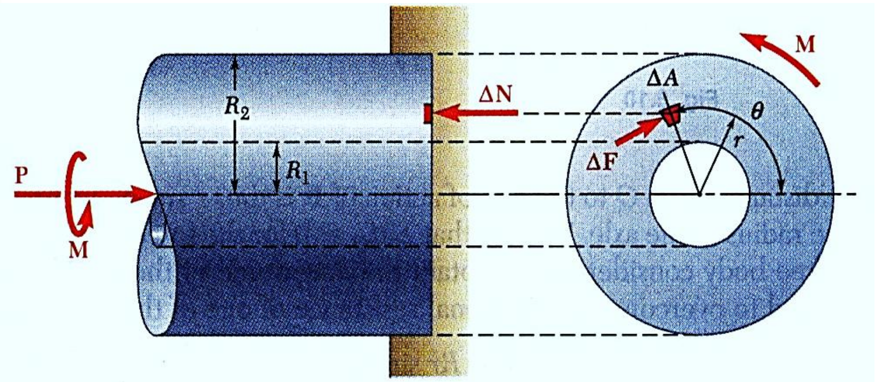
ياتاقان انتهايي



ياتاقان طوقه اي

$$\Delta M = r\Delta F = r\mu_k \Delta N = r\mu_k \frac{P}{A}\Delta A = \frac{r\mu_k P\Delta A}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

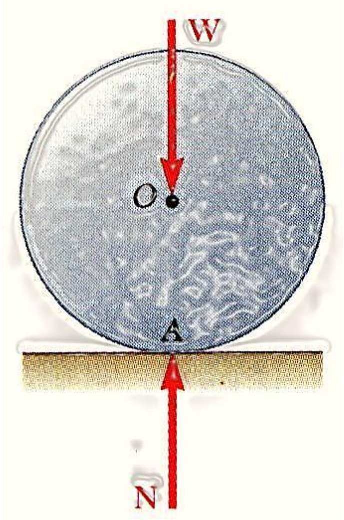
$$M = \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr d\theta = \frac{2}{3}\mu_k P\frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$



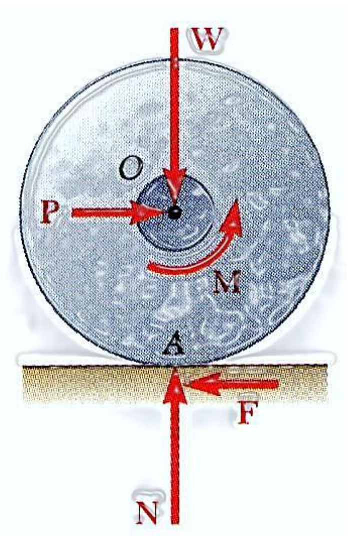
- اگر محور وياتاقان روي تمام سطح دايره اي به شعاع R باهم درتماس باشند:

$$M = \frac{2}{3}\mu_k PR$$

اصطكاك چرخ . مقاومت غلتشي

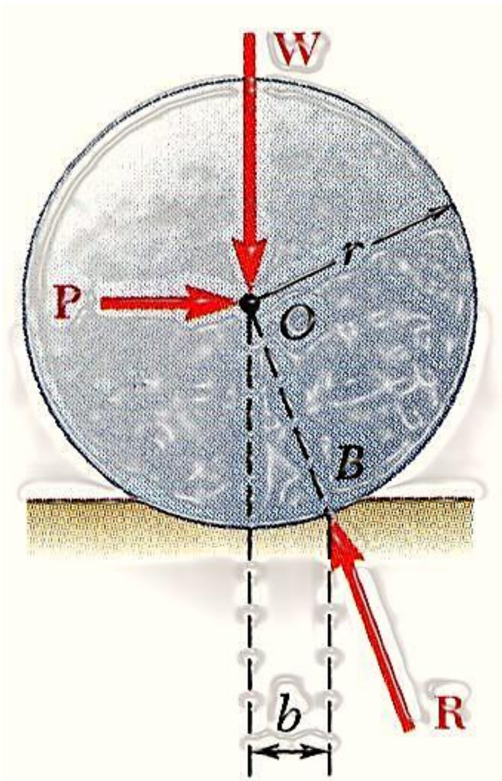


- حركت دادن بارهاي سنگين باستفاده از چرخ باتلاش نسبتا كمي ممكن است زيرا نقطه تماس چرخ بازمين درهرلحظه معين نسبت به زمين حركت ندارد.
- درشرايط ايده آل اصطكاك ازبين مي رود.



- نيروهاي واردبرجسم آزاد: وزن وبار روي چرخ W ،عكس العمل عمودي ريل N ، مقاومت اصطكاكي ياتاقان را با كوپل M نشان ميدهند.براي حفظ تعادل بايد دونيروي برابر ودرخلاف جهت FوP رااضافه كنيم تا ايجاد M– كنند.
- وقتي اصطكاك نباشد MوPوF صفر ميشوند.

اصطكاك چرخ . مقاومت غلتشي



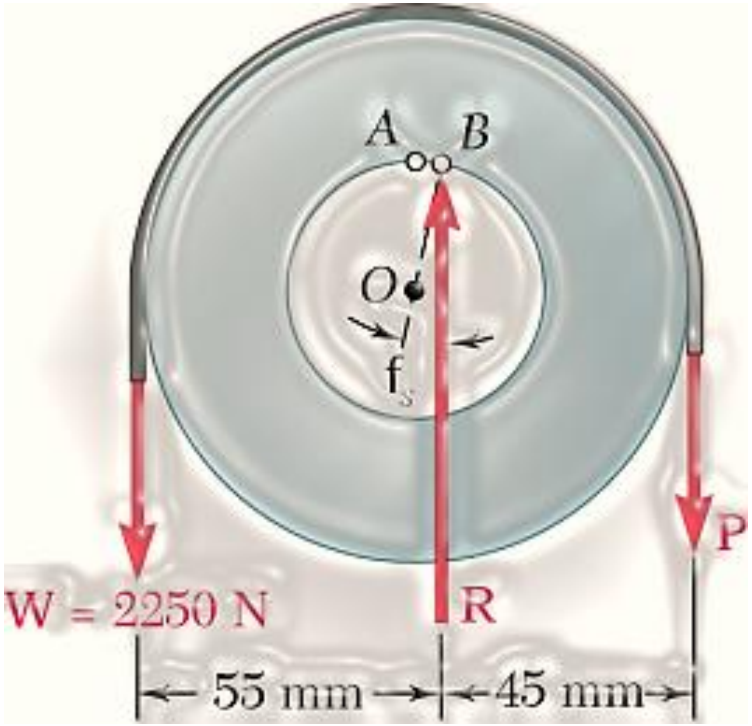
- تحت بار W هم چرخ وهم زمين تغييرشكل داده وتماس ميان چرخ وزمين درناحيه معيني برقرار شده وبرآيندي مانند R در نقطه B خواهد داشت.
- B زير مركز قرار ندارد لذابراي خنثي كردن گشتاور W حول B وادامه غلتش چرخ لازم است نيروي افقي P درمركز چرخ وارد شود.تا باغلبه بر مقاومت غلتشي حركت با سرعت ثابت صورت گيرد.
- بانوشتن معادله تعادل لنگر حول B خواهيم داشت:

$$Pr = Wb$$

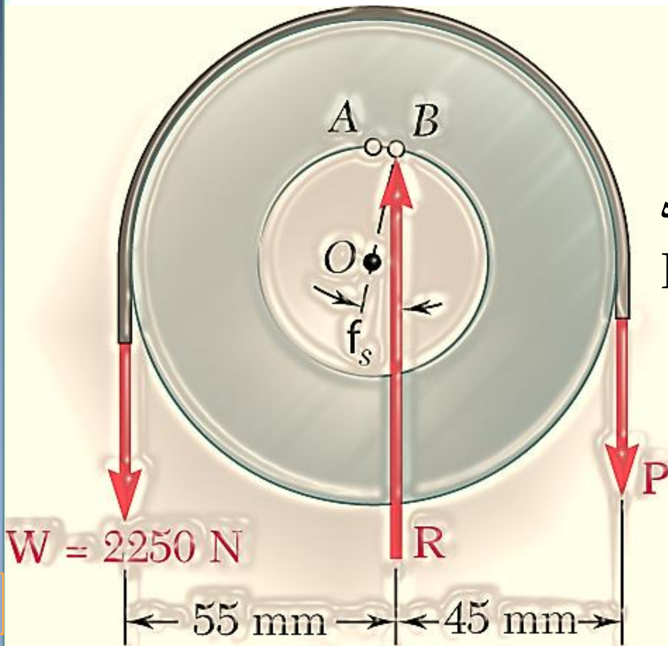
b فاصله افقي ميان O و B است.

مثال ۴

- قرقره اي به قطر 100mm حول محور ثابتي به قطر 50mm مي چرخد.ضريب اصطكاك ايستايي ميان قرقره ومحور 0.2 است ،مطلوبست:
  - نيروي عمودي p براي بالابردن بار 2250N .
  - نيروي عمودي P حداقل چقدرباشد تا بار رانگه دارد.
  - اگر P افقي وارد شود براي شروع حركت روبه بالاي همين بار چقدر بايد باشد؟



مثال ۴



✓ نيروي عمودي لازم براي شروع حركت بار به سمت بالا:

✓ اگر نيروها دردو طرف طناب برابر باشند تماس ميان قرقره ومحور درنقطه A رخ مي دهد.اگر P افزايش يابد تماس در B رخ مي دهد:

$$r_f = r\sin\varphi_s \approx r\mu_s \qquad r_f \approx (25\text{ mm})0.20 = 5\text{mm}$$

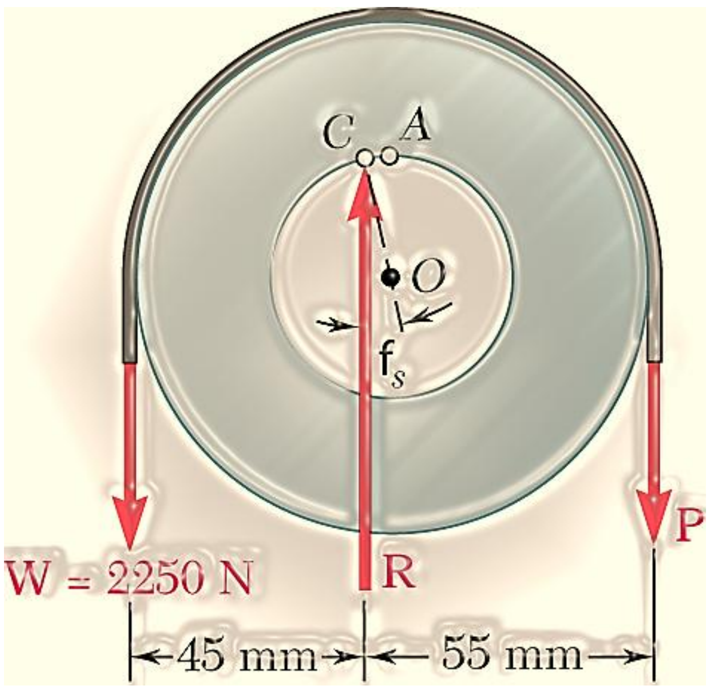
✓ باجمع گشتاورها حول B:

$$\sum M_B = 0: \qquad (55\text{ mm})(2250\text{ N}) - (45\text{ mm})P = 0$$

$$\boxed{P = 2750\text{ N}}$$

مثال ۴

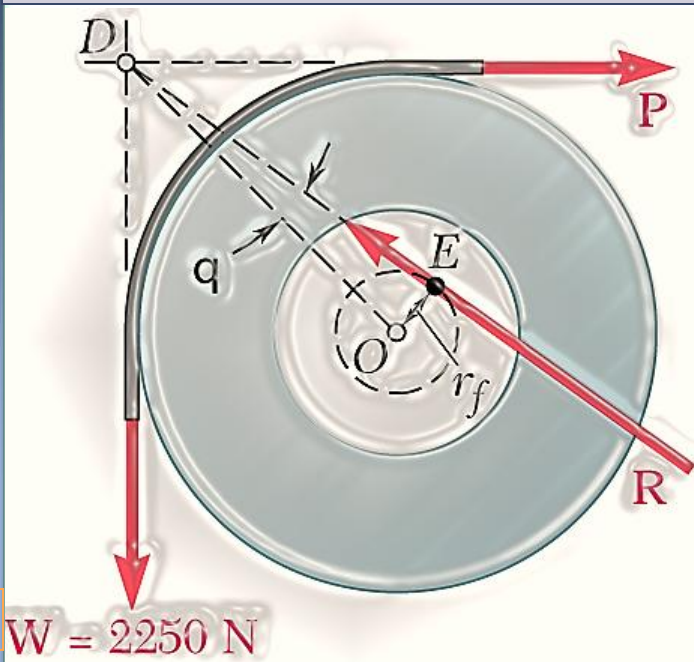
- ✓ نيروي عمودي لازم براي نگهداشتن :
- ✓ وقتي P كاهش ميابد قرقره حول محور مي غلتد وتماس در نقطه C ايجاد مي شود.باجمع گشتاورها حول C خواهيم داشت:



$$\sum M_C = 0: \qquad (45\,\text{mm})(2250\,\text{N}) - (55\,\text{mm})P = 0$$

$$\boxed{P = 1841\,\text{N}}$$

مثال ۴

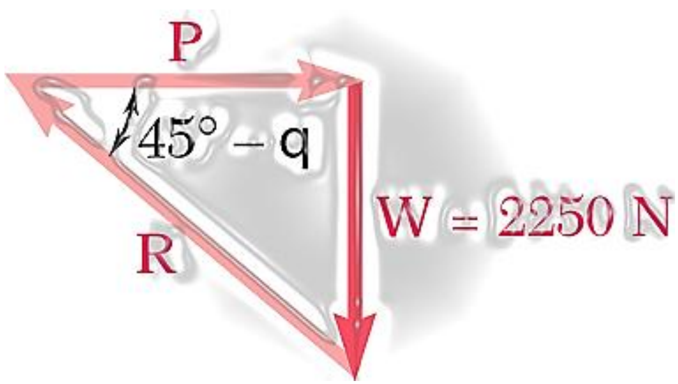


- ✓ نيروي افقي لازم براي شروع حركت بار به سمت بالا:

- ✓ چون سه نيروي W و P و R موازي نيستند بايد همرس باشند لذا امتداد R به اين ترتيب تعيين مي شود كه خط اثرش بايد ازنقطه تقاطع WوP يعني D عبور كند وبردايره اصطكاك هم مماس باشد: $r_f = 5\text{ mm}$

$$\sin\theta = \frac{OE}{OD} = \frac{5\,\text{mm}}{(50\,\text{mm})\sqrt{2}} = 0.0707$$

$$\theta = 4.1°$$

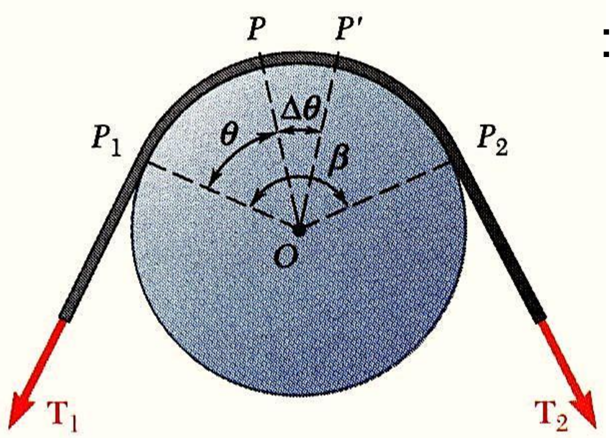


- ✓ ازمثلث نيرو خواهيم داشت:

$$P = W\cot(45° - \theta) = (2250\text{ N})\cot 40.9°$$

$$\boxed{P = 2597\text{ N}}$$

اصطکاك تسمه



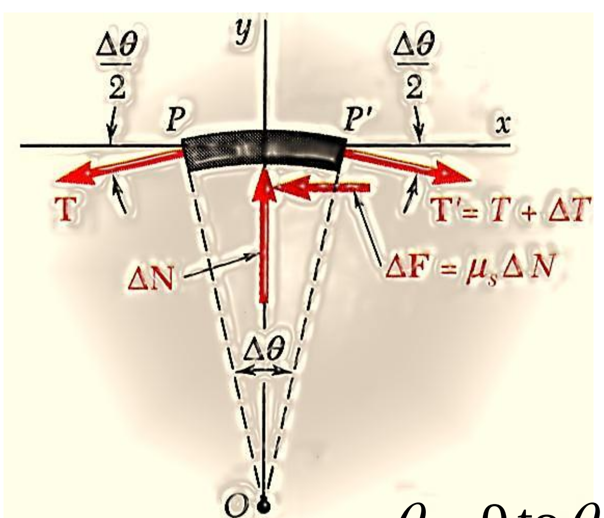
- رابطه میان T_1و T_2 که کشش دردوقسمت تسمه درآستانه لغزش است:
- جسم آزاد جز کوچك 'PP که روبروي زاويه $\Delta\theta$ است:

$$\sum F_x = 0: \quad (T+\Delta T)\cos\frac{\Delta\theta}{2} - T\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad \Delta N - (T+\Delta T)\sin\frac{\Delta\theta}{2} - T\sin\frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

- ΔNعکس العمل غلتك و ΔF نيروي اصطكاك

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta}\cos\frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s\left(T + \frac{\Delta T}{2}\right)\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}$$



- حد $\Delta\theta$ به سمت صفر ميل مي كند:

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_s T = 0$$

- عضو سمت چپ برابرلگاريتم طبيعي خارج قسمت T_2وT_1است:

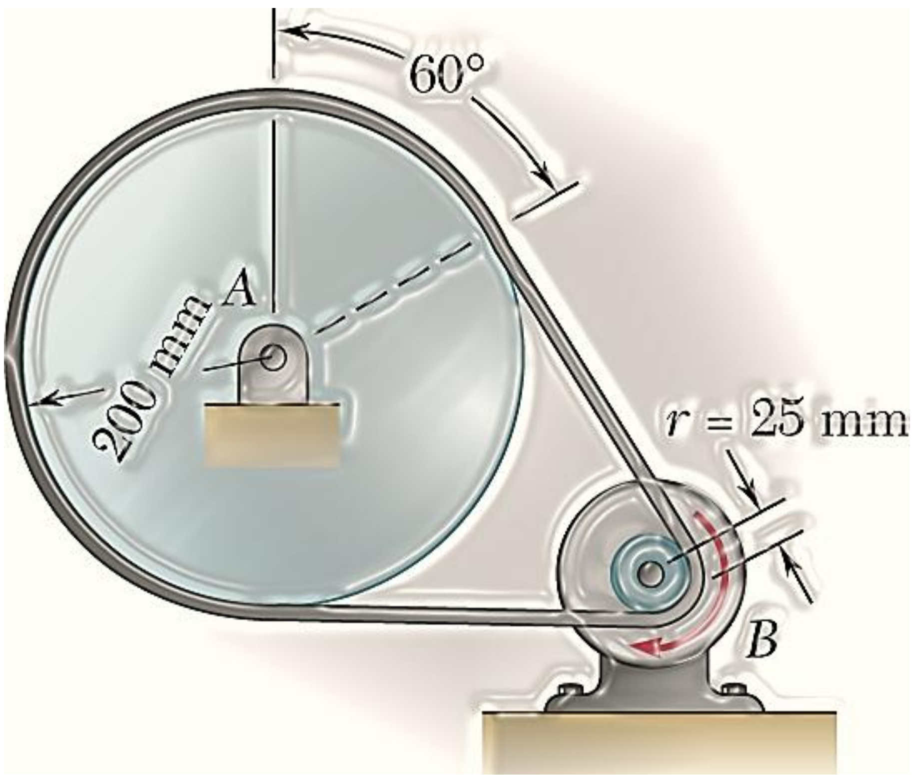
$$\theta = 0 \text{ to } \theta = \beta$$

$$\ln\frac{T_2}{T_1} = \mu_s\beta \quad \text{or} \quad \frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s\beta}$$

مثال ۵

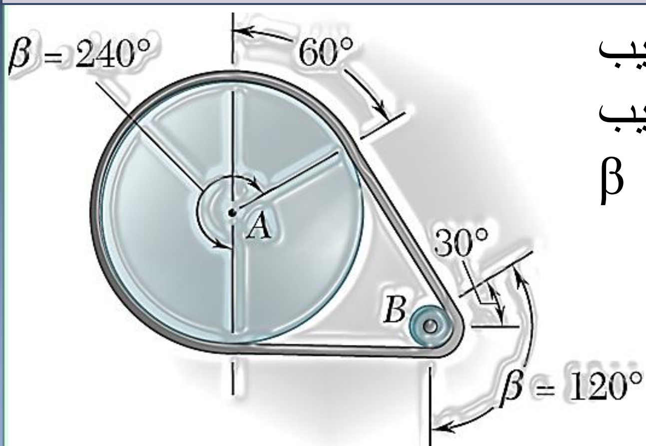
- تسمه تختي قرقره A راكه ماشين ابزاري رابكار مي اندازد،به قرقره B متصل مي كند كه خود به محور يك موتور الكتريكي متصل است. اگر حداكثر كشش مجاز تسمه 2700N باشد،مطلوبست:
  - حداكثر گشتاوري كه مي توان به قرقره A وارد كرد.

ضرايب اصطكاك ميان هردوقرقره وتسمه : $\mu_s = 0.25$ و $\mu_k = 0.20$



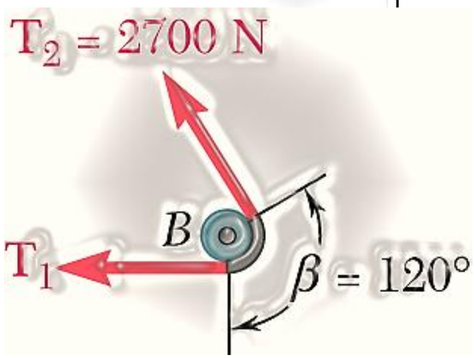
مثال ۵

✓ چون مقاومت لغزشي به زاوه تماس ميان قرقره وتسمه وضريب اصطكاك ايستايي بستگي دارد باتوجه به برابر بودن ضرايب درهردو قرقره لغزش ابتدا در روي قرقره B رخ مي دهد.زيرا β كوچكتري دارد.

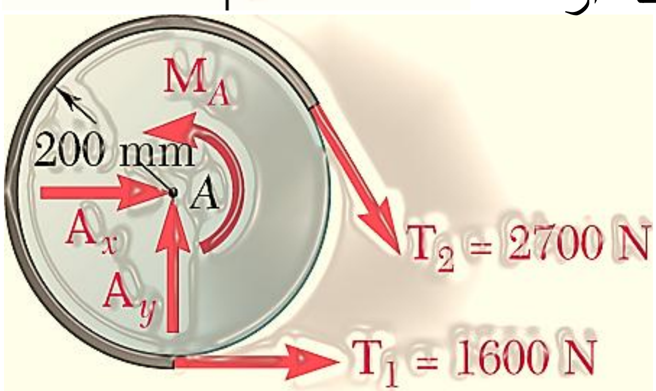


$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta} \qquad \frac{2700\ \text{N}}{T_1} = e^{0.25(2\pi/3)} = 1.688$$

$$T_1 = \frac{2700\ \text{N}}{1.688} = 1600\ \text{N}$$



✓ بارسم نمودارجسم آزاد قرقره A كوپل M_A كه توسط ماشين ابزار به قرقره واردمي شود برابر ودرخلاف جهت گشتاوري است كه از تسمه به آن وارد مي شود.



$$\sum M_A = 0: \quad M_A + (200\ \text{mm})(1600\ \text{N} - 2700\ \text{N}) = 0$$

$$\boxed{M_A = 220\ \text{N} \cdot \text{m}}$$

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

9

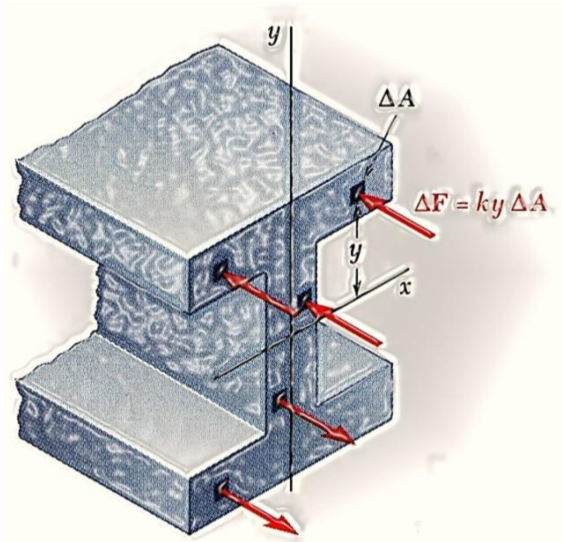
Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.SC.

نيروهاي گسترده :

گشتاورهاي لختي

گشتاور لختي ، يك سطح



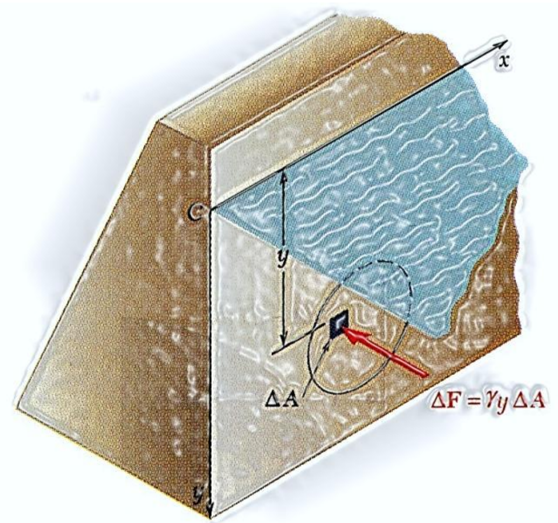
- نيروهاي گسترده اي را كه بزرگي آنها $\Delta\vec{F}$ متناسب با جزسطحهاي ΔAتحت تاثير اين نيروهاست؛درعين حال بطور خطي نسبت به فاصله ΔAتا يك محور معين تغير مي كند را درنظر بگيريد:

- براي مثال: تيري باسطح مقطع يكنواخت كه دوكوپل برابر ودرخلاف جهت هم به دوسر آن وارد مي شود را نظربگيريد:

$$\Delta\vec{F} = ky\Delta A$$

$$R = k\int y\,dA = 0 \qquad \int y\,dA = Q_x = \text{گشتاور اول}$$

$$M = k\int y^2 dA \qquad \int y^2 dA = \text{گشتاور دوم}$$



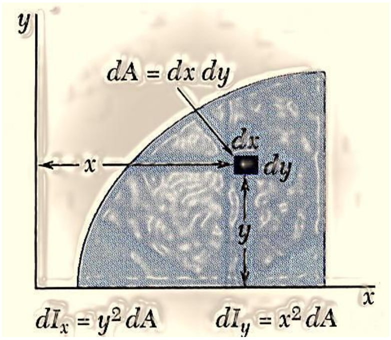
- دريچه عمودي دايره اي كه براي بستن مجراي خروجي يك مخزن بزرگ بكار مي رود:

$$\Delta F = p\Delta A = \gamma y\Delta A$$

$$R = \gamma\int y\,dA$$

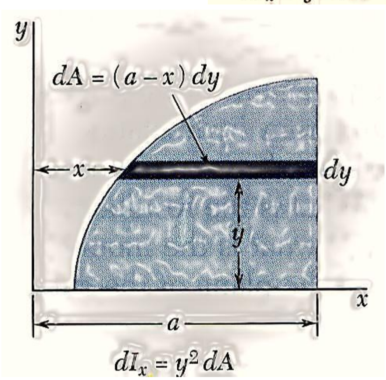
$$M_x = \gamma\int y^2 dA$$

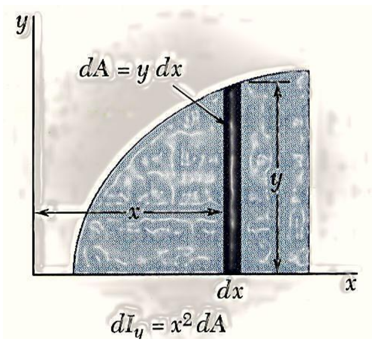
تعيين گشتاور لختي يك سطح به روش انتگرال گيري



- گشتاور دوم يا لختي نسبت به محورهاي x و y :

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

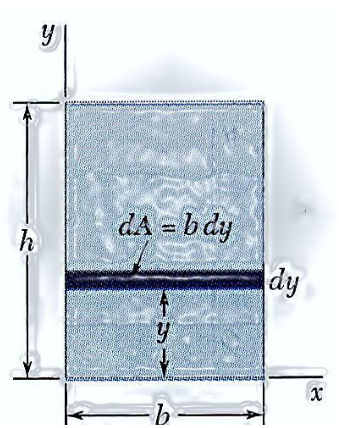


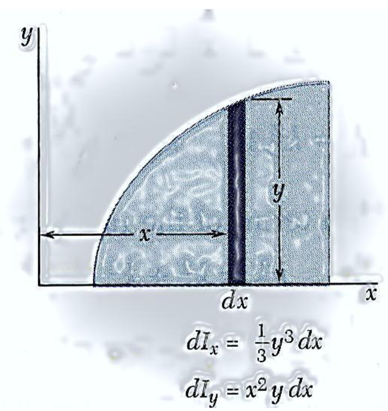


- اگردراين سطوح dA رابصورت نوار باريكي موازي بايكي از محورها انتخاب كنيم انتگرالها راحت محاسبه مي شوند.

- گشتاور لختي سطح مستطيل

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b\,dy = \tfrac{1}{3} b h^3$$





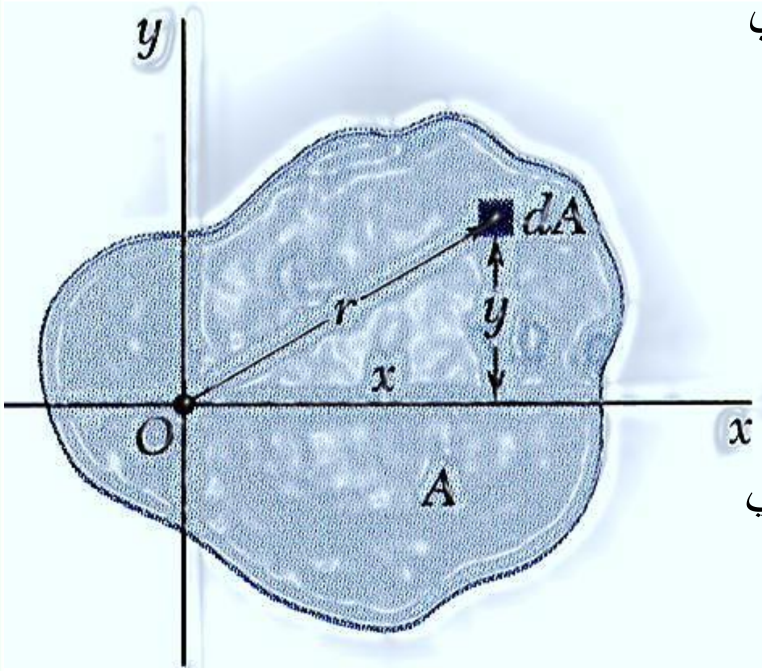
- باستفاده از فرمول فوق مي توانيم گشتاورلختي يك نوار مستطيلي موازي با محورهاي مختصات رابدست آوريم.

$$dI_x = \tfrac{1}{3} y^3 dx \qquad dI_y = x^2 dA = x^2 y\,dx$$

گشتاور لختي قطبي

- يكي از انتگرالهاي مهم در مسائله مربوط به پيچش محورهاي استوانه اي ، وچرخش دالها انتگرال زير است:

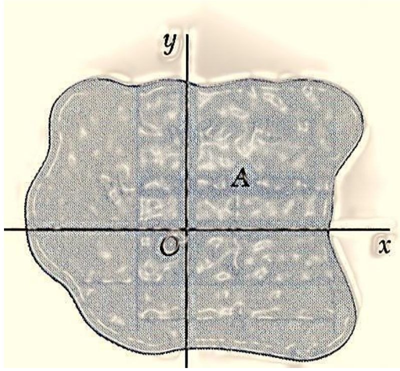
$$J_0 = \int r^2 dA$$



- گشتاور لختي قطبي يك سطح را مي توان ازگشتاورهاي لختي قائم I_x و I_y سطح بدست آورد.

$$J_0 = \int r^2 dA = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$
$$= I_y + I_x$$

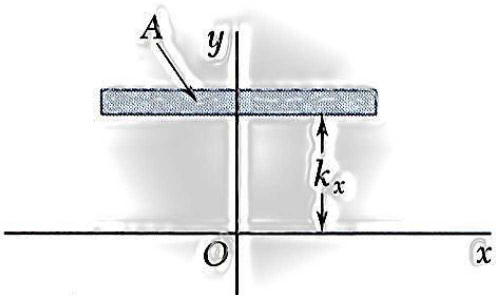
شعاع چرخش يك سطح

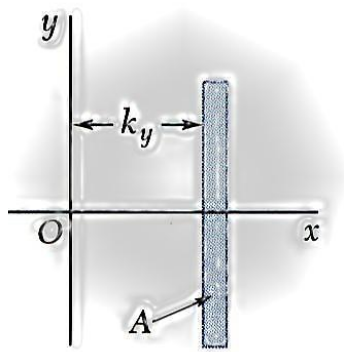


- سطح A راكه گشتاور لختي آن نسبت به محور x برابر I_x است واين سطح رادرنواري موازي بامحور x متمركز كرده ايم رادرنظربگيريد:

$$I_x = k_x^2 A \qquad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

k_x = شعاع چرخش سطح A نسبت به محور x

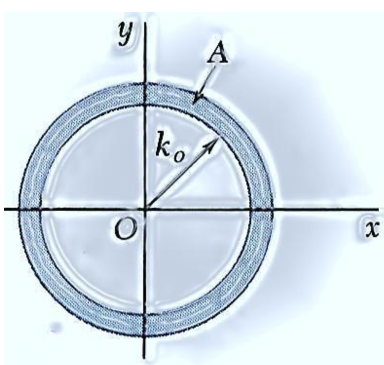




- بطريق مشابه:

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

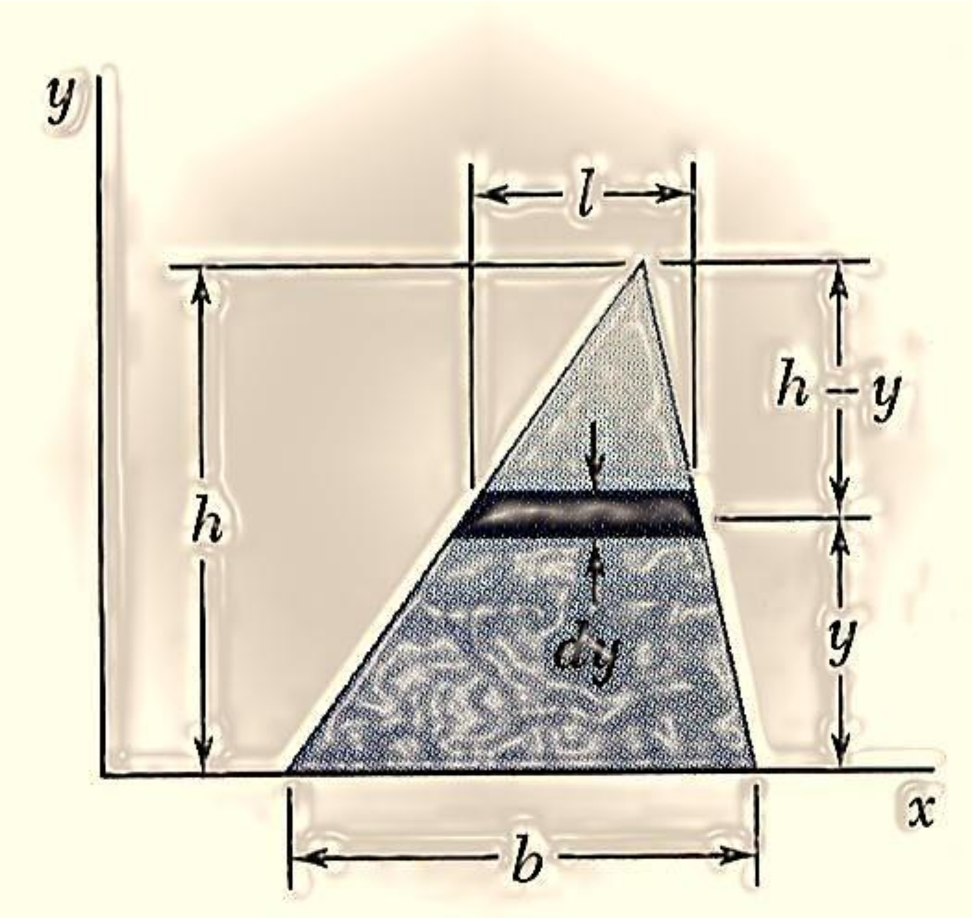
$$J_O = k_O^2 A \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$



$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2$$

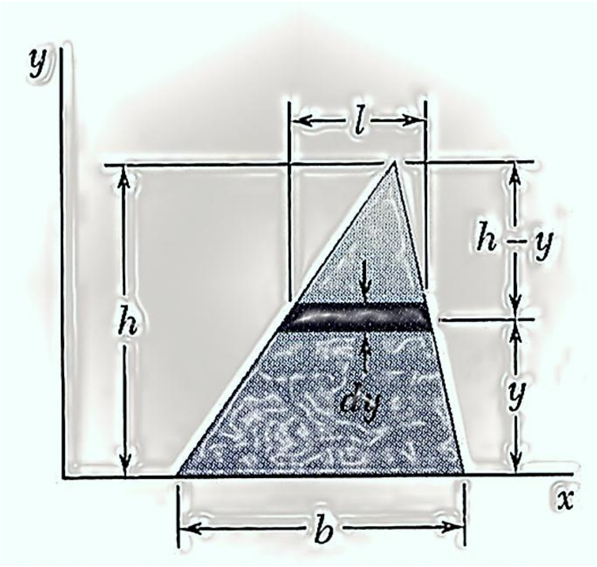
مثال ۱

- گشتاور لختي مثلث را نسبت به قاعده اش تعيين کنيد.



مثال ۱

✓ محور xرا منطبق بر قاعده مثلث اختيار مي كنيم. نوارباريكي به موازات محور x را dA مي گيريم.



$$dI_x = y^2 dA \qquad dA = l\,dy$$

✓ ازتشابه مثلثات :

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad l = b\frac{h-y}{h} \qquad dA = b\frac{h-y}{h}dy$$

✓ اگر dI_x از y=0 تا y=h انتگرال بگيريم:

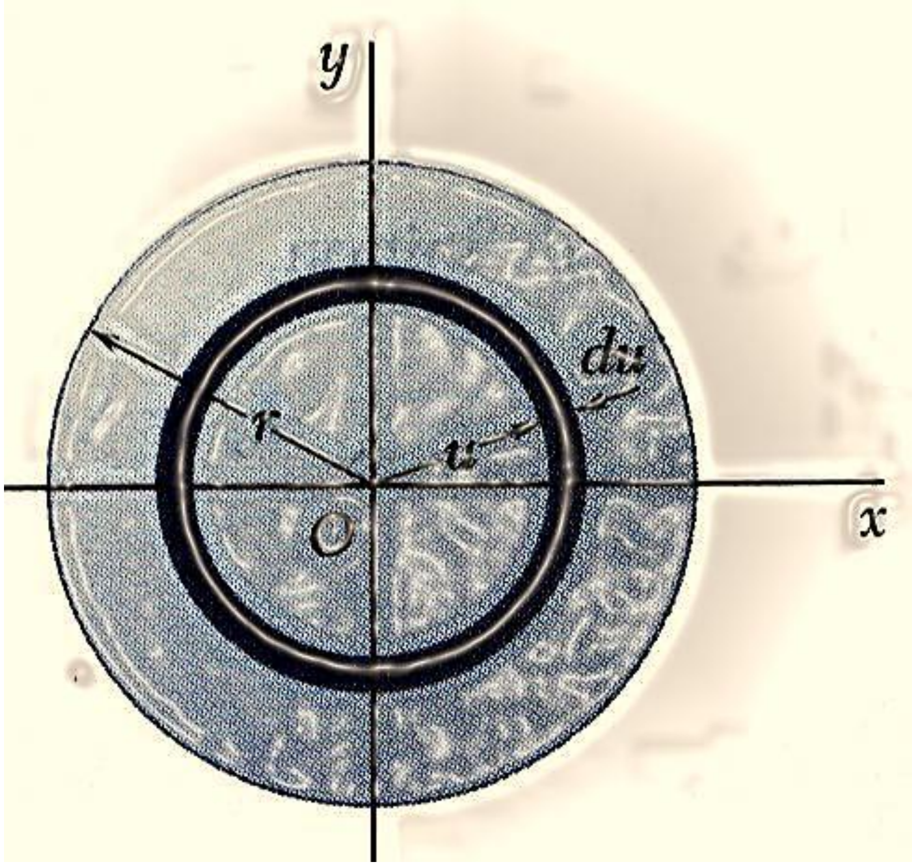
$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b\frac{h-y}{h}dy = \frac{b}{h}\int_0^h \left(hy^2 - y^3\right)dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h$$

$$\boxed{I_x = \frac{bh^3}{12}}$$

مثال ۲

- ابتدا گشتاور لختي قطبي مركز سطحي دايره اي رابا انتگرال گيري مستقيم تعيين كنيد.سپس گشتاور لختي سطح دايره رانسبت به يك قطرآن تعين كنيد.



Meysam4366@yahoo.com

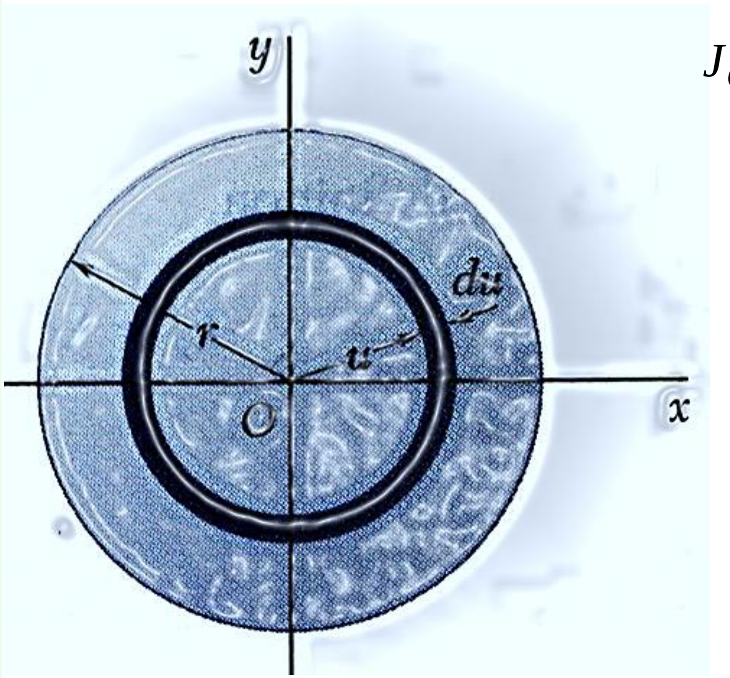
مثال ۲

✓ يك سطح حلقوي بسيار باريك dA را درنظربگيريد:

$$dJ_O = u^2 dA \qquad dA = 2\pi u\, du$$

$$J_O = \int dJ_O = \int_0^r u^2 (2\pi u\, du) = 2\pi \int_0^r u^3 du$$

$$\boxed{J_O = \frac{\pi}{2} r^4}$$



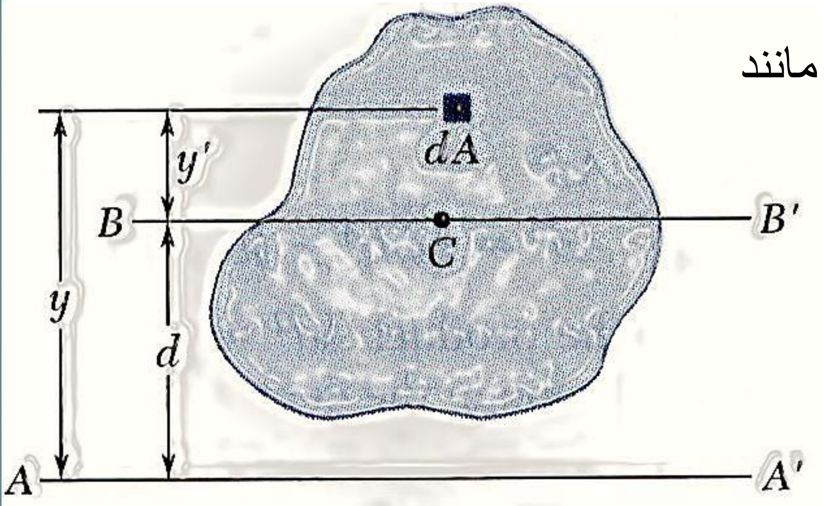
✓ با تقارن خواهيم داشت: $I_x = I_y$

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \frac{\pi}{2} r^4 = 2I_x$$

$$\boxed{I_{diameter} = I_x = \frac{\pi}{4} r^4}$$

Meysam4366@yahoo.com

قضيه محورهاي موازي



• گشتاور لختي I مربوط به سطح a رانسبت به محوري مانند AA' درنظربگيريد.

$$I = \int y^2 dA$$

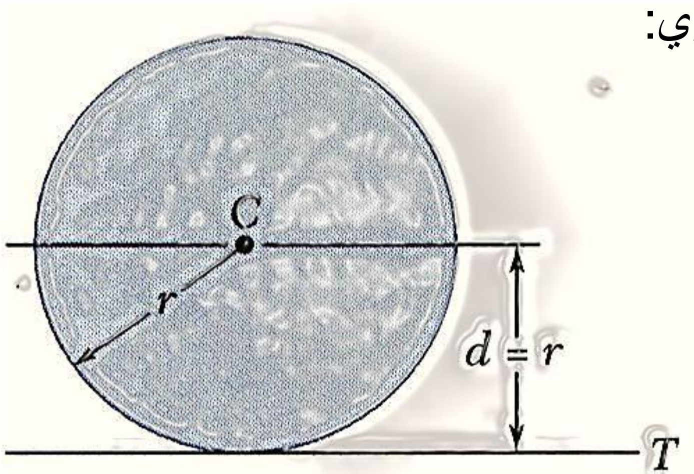
• محور BB' راكه موازي AA' است واز مركز سطح C مي گذرد رسم مي كنيم؛ اين محور را محور مركز سطحي مي گويند.

$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA$$
$$= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

$$I = \bar{I} + Ad^2$$ **قضيه محورهاي موازي**

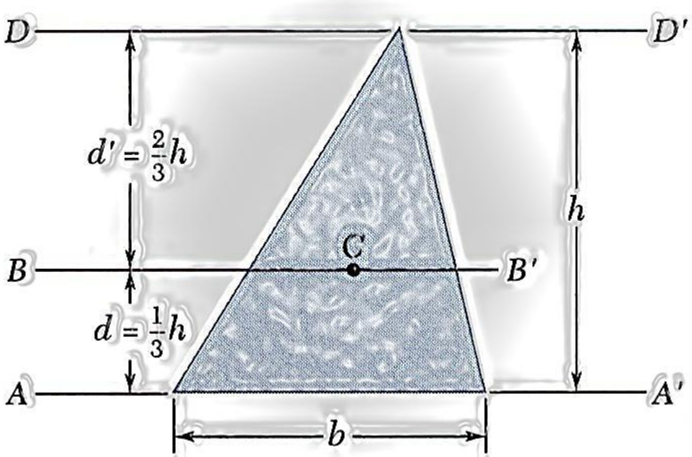
قضيه محورهاي موازي

- گشتاور لختي I_T سطح دايره اي با استفاده از قضيه خطوط موازي:



$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + \left(\pi r^2\right)r^2$$
$$= \tfrac{5}{4}\pi r^4$$

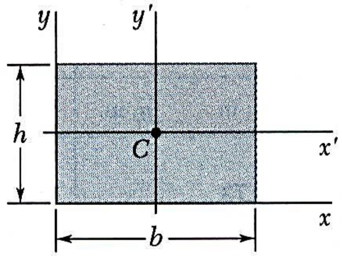
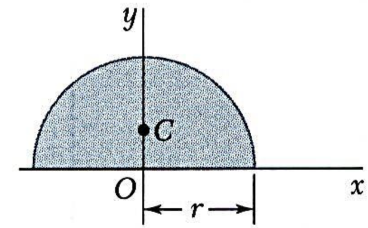
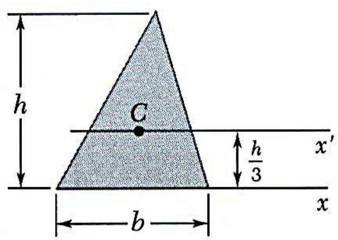
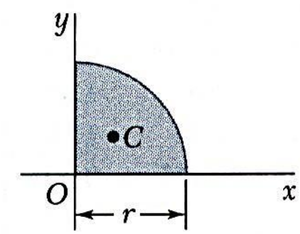
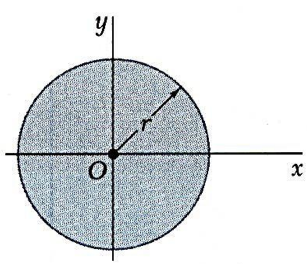
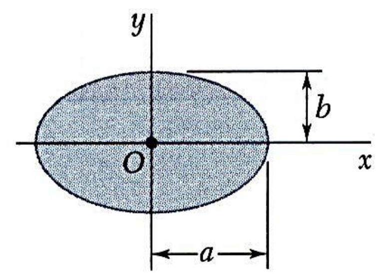
- گشتاور لختي I_T سطح مثلثي با استفاده از قضيه خطوط موازي ؛ بااستفاده از گشتاور لختي سطح نسبت به يك محور موازي معلوم:



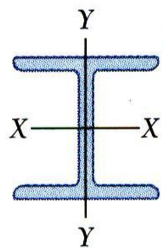
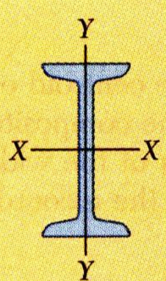
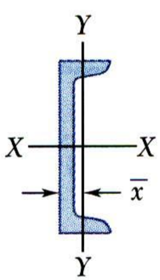
$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$
$$I_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \tfrac{1}{12}bh^3 - \tfrac{1}{2}bh\left(\tfrac{1}{3}h\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{36}bh^3$$

گشتاورهاي لختي سطوح مركب

- گشتاور لختي A نسبت به يك محور معين رامي توان با جمع بستن گشتاورهاي لختي A_1 و A_2 و A_3 و.. نسبت به آن محور بدست آورد.

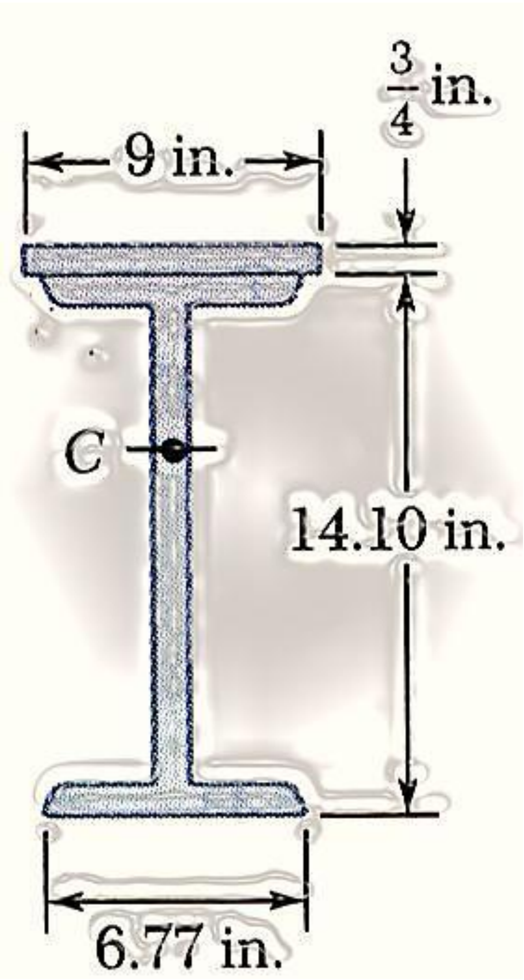
مستطيل		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2+h^2)$	نيم دايره		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
مثلث		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	ربع دايره		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
دايره		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	بيضي		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2+b^2)$

جدول اشتال

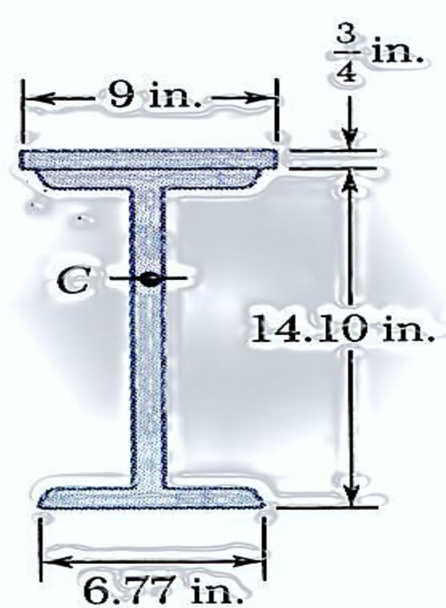
Shape	Designation	Area mm^2	Depth mm	Width mm	Axis X-X: $\bar{I}_x$ $10^6\ mm^4$	Axis X-X: $\bar{k}_x$ mm	Axis X-X: $\bar{y}$ mm	Axis Y-Y: $\bar{I}_y$ $10^6\ mm^4$	Axis Y-Y: $\bar{k}_y$ mm	Axis Y-Y: $\bar{x}$ mm
I شکل بال پهن 	W460 × 113†	14400	463	280	554	196.3		63.3	66.3	
	W410 × 85	10800	417	181	316	170.7		17.94	40.6	
	W360 × 57	7230	358	172	160.2	149.4		11.11	39.4	
	W200 × 46.1	5890	203	203	45.8	88.1		15.44	51.3	
I شکل استاندارد 	S460 × 81.4†	10390	457	152	335	179.6		8.66	29.0	
	S310 × 47.3	6032	305	127	90.7	122.7		3.90	25.4	
	S250 × 37.8	4806	254	118	51.6	103.4		2.83	24.2	
	S150 × 18.6	2362	152	84	9.2	62.2		0.758	17.91	
ناوداني 	C310 × 30.8†	3929	305	74	53.7	117.1		1.615	20.29	17.73
	C250 × 22.8	2897	254	65	28.1	98.3		0.949	18.11	16.10
	C200 × 17.1	2181	203	57	13.57	79.0		0.549	15.88	14.50
	C150 × 12.2	1548	152	48	5.45	59.4		0.288	13.64	13.00

مثال ۳

- مطلوبست گشتاور لختي وشعاع چرخش (شعاع ژیراسیون) قطعه مركب نسبت به محور گذرنده ازمركز سطح مقطع C وموازي با ورق.

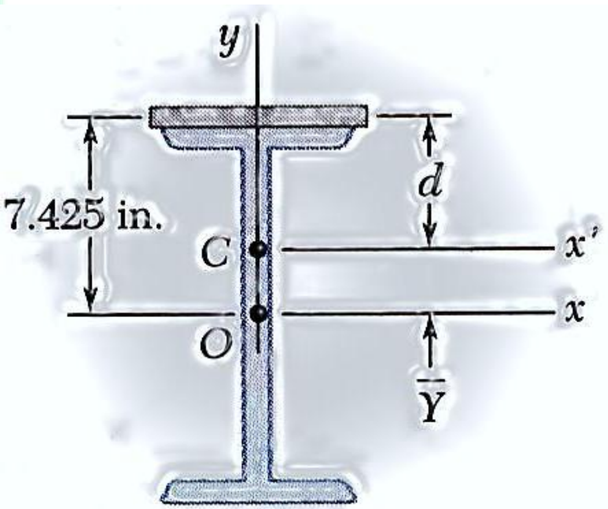


مثال ۳



✓ مساحت و مختصات تار خنثي نسبت به محور Yها :

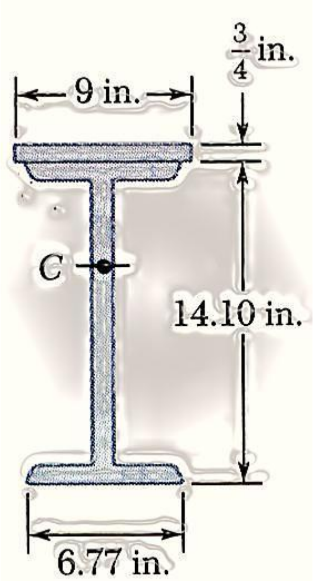
مقطع	A, in^2	$\bar{y}$, in.	$\bar{y}A, \text{in}^3$
ورق	6.75	7.425	50.12
بال پهن	11.20	0	0
	$\sum A = 17.95$		$\sum \bar{y}A = 50.12$



$$\bar{Y}\sum A = \sum \bar{y}A \qquad \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{50.12\ \text{in}^3}{17.95\ \text{in}^2} = 2.792\ \text{in.}$$

✓ مشخصات مقطع I شکل را ازجدول اشتال استخراج نموده ایم.

مثال ۳



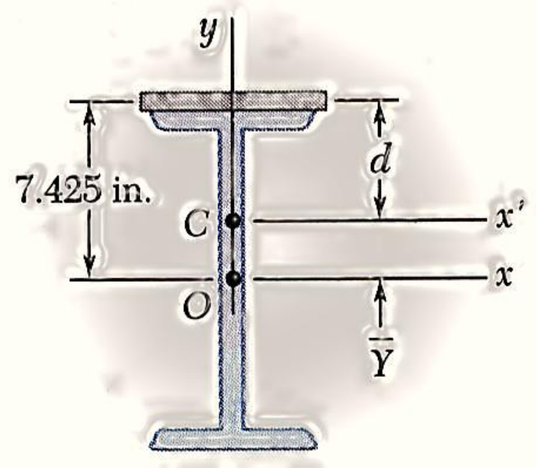
✓ باستفاده از قضيه خطوط موازي :

$$I_{x',\text{beam section}} = \bar{I}_x + A\bar{Y}^2 = 385 + (11.20)(2.792)^2$$

$$= 472.3\ \text{in}^4$$

$$I_{x',\text{plate}} = \bar{I}_x + Ad^2 = \tfrac{1}{12}(9)\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + (6.75)(7.425 - 2.792)^2$$

$$= 145.2\ \text{in}^4$$



$$I_{x'} = I_{x',\text{beam section}} + I_{x',\text{plate}} = 472.3 + 145.2$$

$$\boxed{I_{x'} = 618\ \text{in}^4}$$

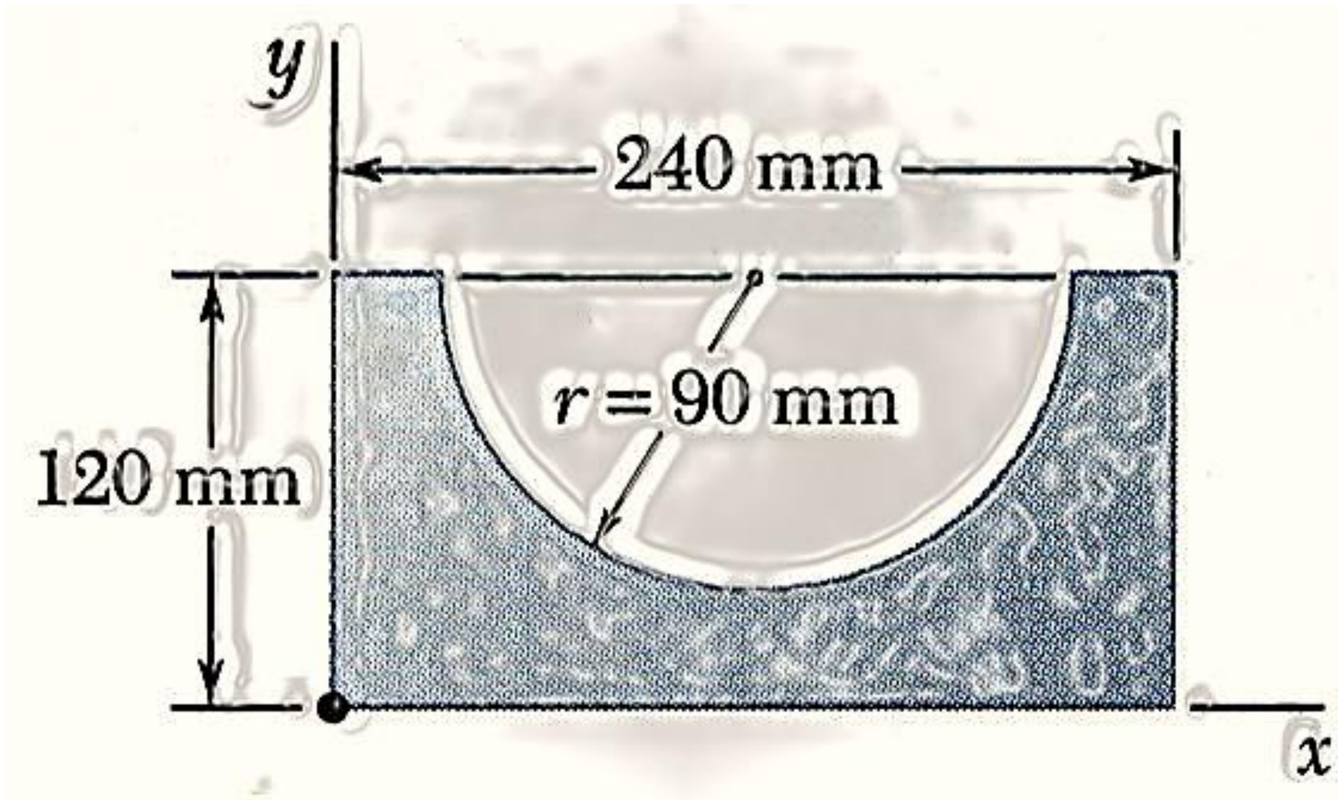
✓ شعاع ژيراسيون:

$$k_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} = \frac{617.5\ \text{in}^4}{17.95\ \text{in}^2}$$

$$\boxed{k_{x'} = 5.87\ \text{in.}}$$

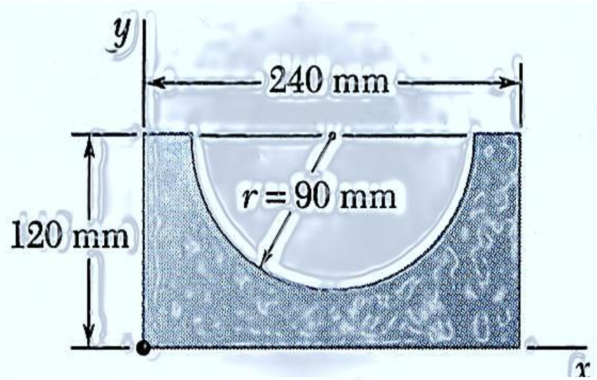
مثال ۴

❑ گشتاور لختي سطح زير را نسبت به محور X محاسبه كنيد.



مثال ۴

✓ مي توان از يك مستطيل منهاي نيم دايره استفاده كرد:

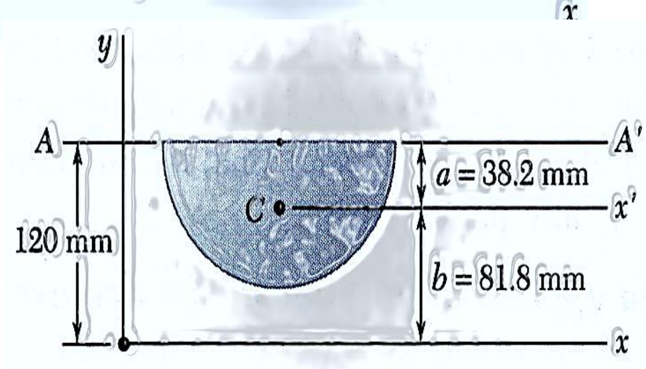


✓ مستطيل:

$$I_x = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}(240)(120) = 138.2\times10^6\,\text{mm}^4$$

✓ نيم دايره :

محل مركز هندسي C نيم دايره را نسبت به قطر AA' بدست مي آوريم:



$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90)}{3\pi} = 38.2\ \text{mm}$$

$$\text{b} = 120 - \text{a} = 81.8\ \text{mm}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi(90)^2 = 12.72\times10^3\,\text{mm}^2$$

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{8}\pi r^4 = \tfrac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76\times10^6\,\text{mm}^4$$

✓ گشتاورلختي نسبت به محور x':

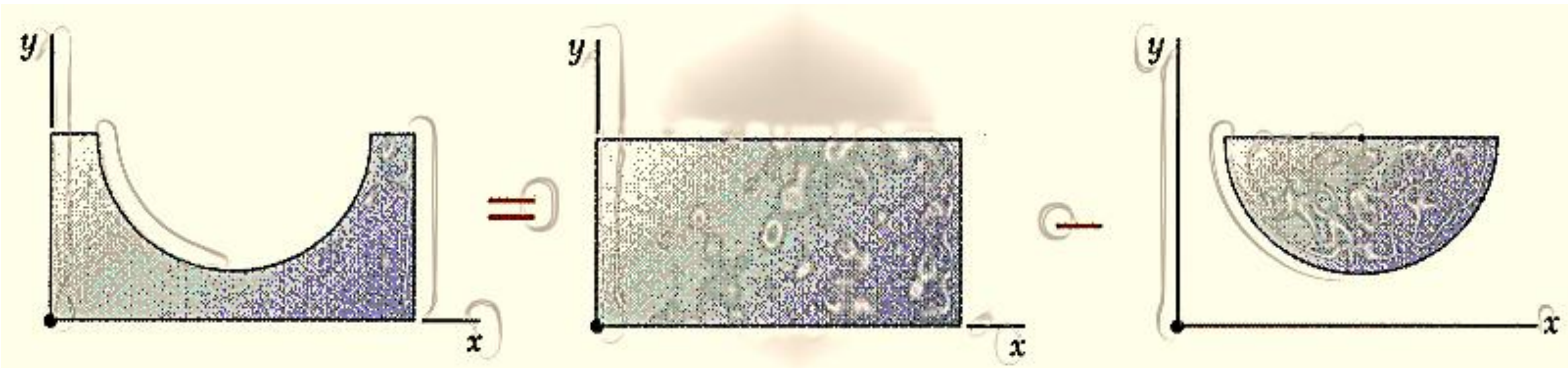
$$\bar{I}_{x'} = I_{AA'} - Aa^2 = \left(25.76\times10^6\right)\left(12.72\times10^3\right) = 7.20\times10^6\,\text{mm}^4$$

✓ گشتاورلختي نسبت به محور x:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20\times10^6 + \left(12.72\times10^3\right)(81.8)^2 = 92.3\times10^6\,\text{mm}^4$$

مثال ۴

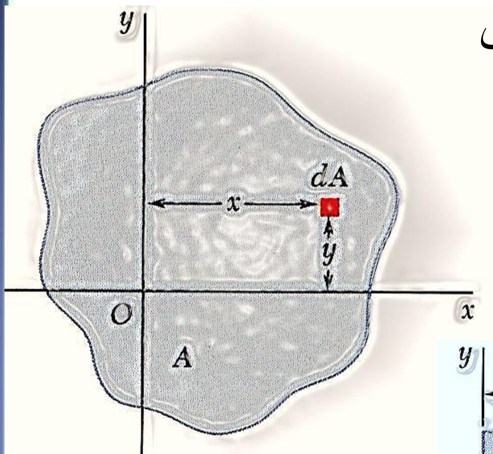
✓ اگر گشتاور لختي نيم دايره رااز گشتاور لختي مستطيل کم کنيم:



$$I_x = 138.2\times10^6\,\text{mm}^4 - 92.3\times10^6\,\text{mm}^4$$

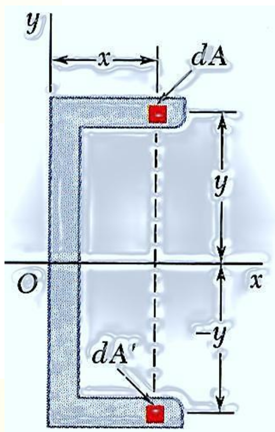
$$\boxed{I_x = 45.9\times10^6\,\text{mm}^4}$$

حاصلضرب لختي

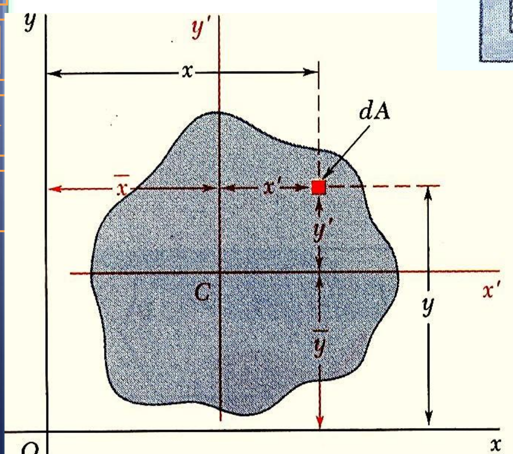


- انتگرال زيرراكه ازضرب كردن هرجزء dA درمختصات x و y آن وانتگرال روي سطح بدست مي آيد را حاصلضرب لختي سطح A نسبت به محورهاي x و y مي نامند.

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$



- اگريكي ازمحورهاي x و y ويا هردوي آنها محور تقارن سطح A باشند حاصلضرب لختي I_{xy} صفر است.



- قضيه محورهاي موازي از حاصلضرب لختي بدست مي آيد:

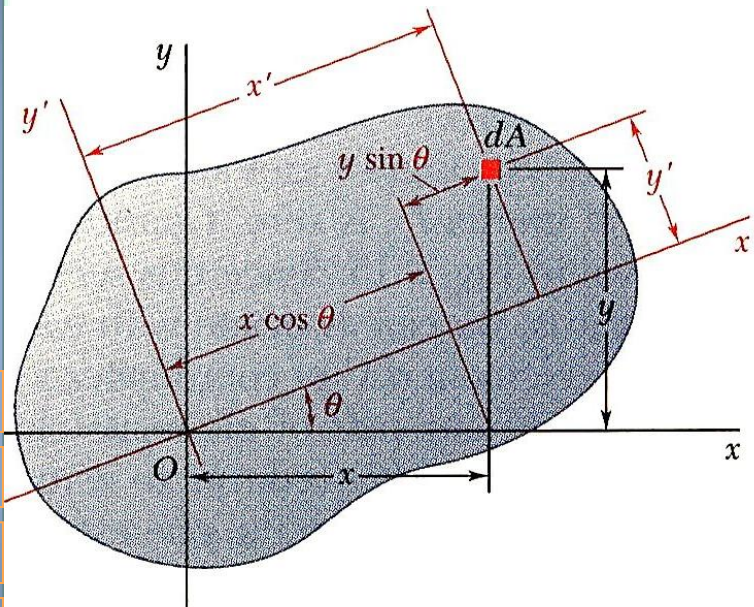
$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

محورهاي اصلي وگشتاورهاي لختي اصلي

- ميخواهيم گشتاورهاوحاصلضربهاي لختي سطح A رانسبت به محورهاي جديد x’ وy’ بدست آوريم:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$



- رابطه ميان اين مختصات:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

- لذا خواهيم داشت:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

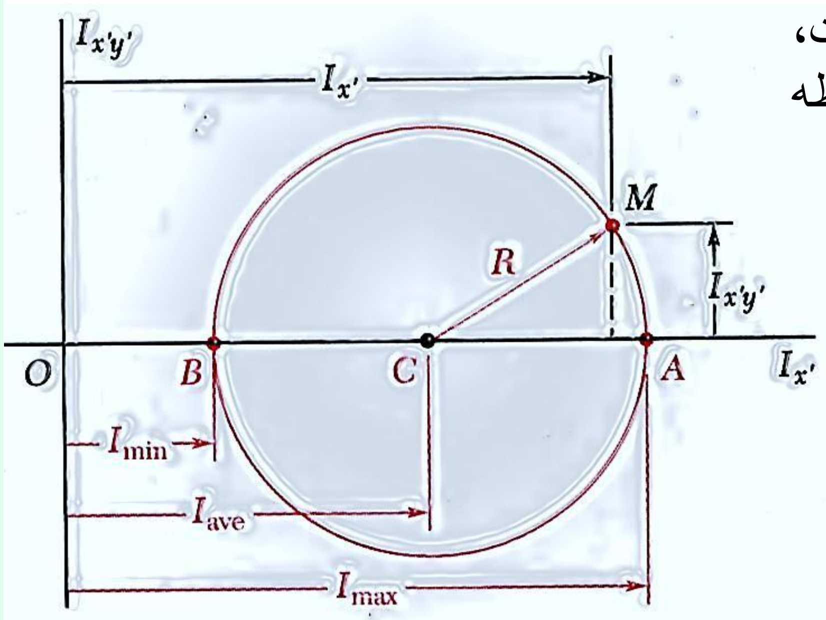
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

محورهاي اصلي وگشتاورهاي لختي اصلي

- معادلات I_x' و I_{xy}' معادله هاي پارامتري دايره اند. يعني نقاطي كه ازآنها بدست مي آيند روي يك دايره اند.

$$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) + I_{xy}^2}$$



- نقطه A متناظرباحداكثرمقدار گشتاور لختي I_x' است، درحاليكه B حداقل مقدار اين گشتاور است.هردونقطه بامقدار صفر حاصلضرب لختي I_{xy}' متناظرند.

محورهاي اصلي وگشتاورهاي لختي اصلي

- اين معادله دومقدار براي $2\theta_m$ بدست مي دهد که $180°$ باهم اختلاف دارند ويا دومقدار براي θ_m ميدهد که باهم $90°$ اختلاف دارند.

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) + I_{xy}^2}$$

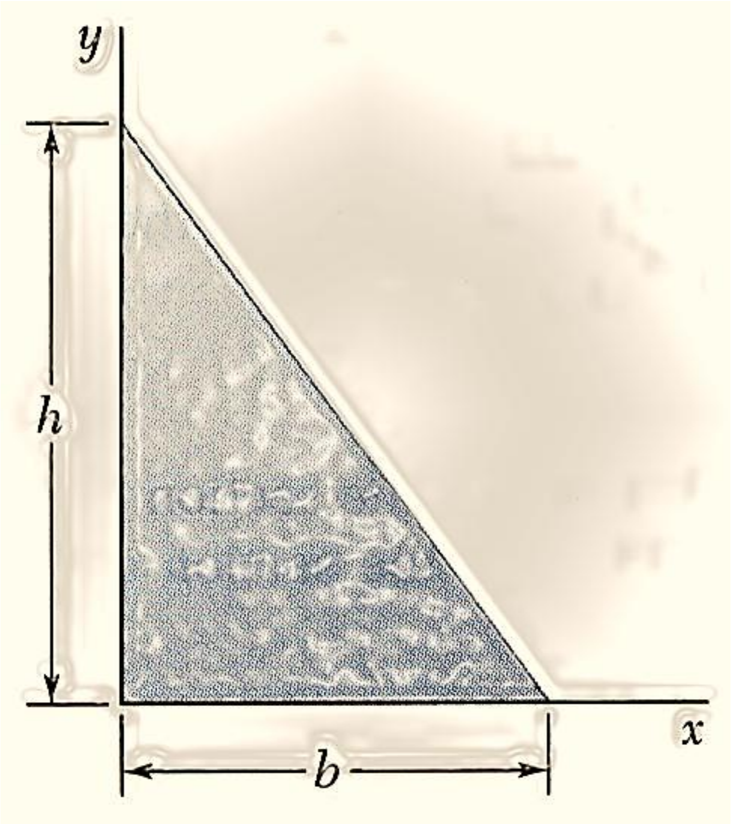
$$\boxed{I_{\max,\min} = I_{ave} \pm R}$$

- I_{max} و I_{min} گشتاورهاي لختي اصلي آن سطح حول نقطه O هستند.

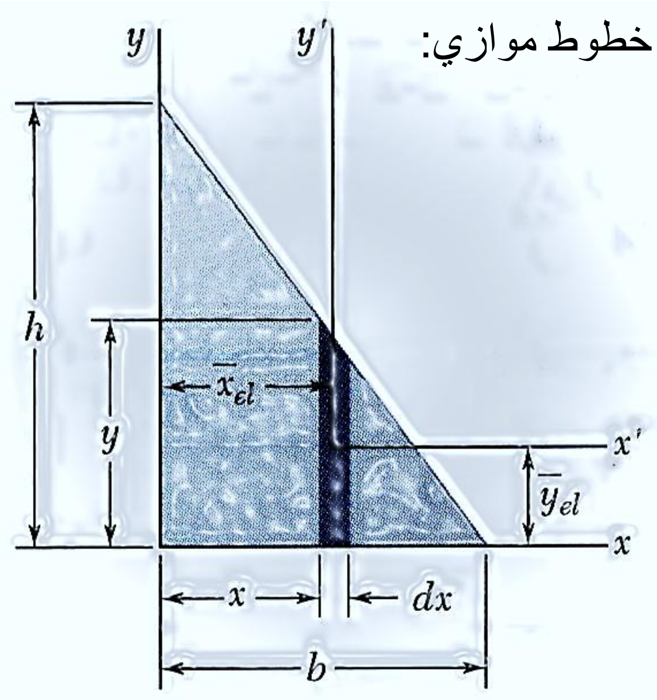
مثال ۵

❑ باتوجه به شکل مطلوبست:

- حاصلضرب لختي نسبت به محورهاي x و y .
- حاصلضرب لختي نسبت به محورهاي مرکز سطحي موازي با محورهاي x و y.



مثال ۵



✓ بادرنظرگرفتن نواراريك قائمي به عنوان جزء سطح وبااستفاده ازقضيه خطوط موازي:

$$y = h\left(1-\frac{x}{b}\right) \qquad dA = y\,dx = h\left(1-\frac{x}{b}\right)dx$$

$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}h\left(1-\frac{x}{b}\right)$$

✓ باانتگرالگيري از $x = 0$ تا $x = b$

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\,dA = \int_0^b x\left(\tfrac{1}{2}\right)h^2\left(1-\frac{x}{b}\right)^2 dx$$

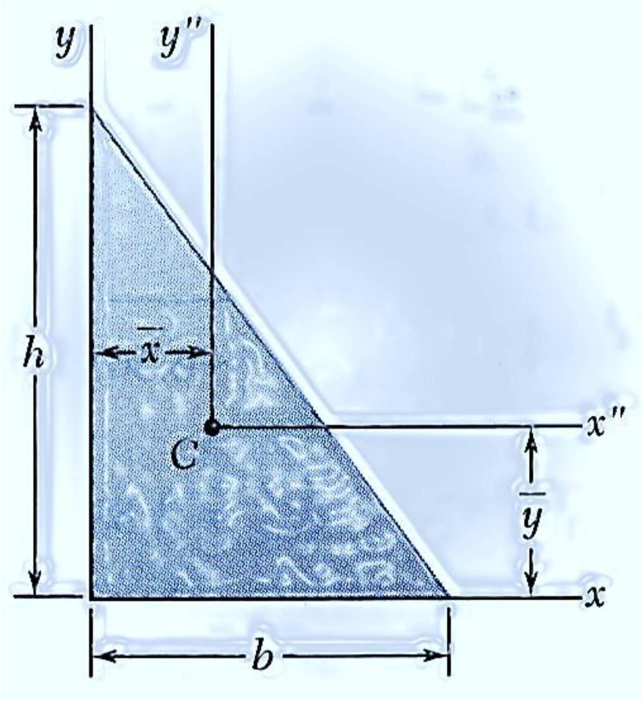
$$= h^2\int_0^b\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{2b^2}\right)dx = h^2\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3b}+\frac{x^4}{8b^2}\right]_0^b$$

$$\boxed{I_{xy} = \frac{1}{24}b^2h^2}$$

مثال ۵

✓ بادرنظرگرفتن مختصات مرکزسطح مثلث نسبت به محورهاي x و y و قضيه محورهاي موازي:

$$\bar{x} = \tfrac{1}{3}b \qquad \bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$



✓ بااستفاده از نتيجه بدست آمده ازقسمت قبل:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\bar{I}_{x''y''} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 - \left(\tfrac{1}{3}b\right)\left(\tfrac{1}{3}h\right)\left(\tfrac{1}{2}bh\right)$$

$$\boxed{\bar{I}_{x''y''} = -\tfrac{1}{72}b^2h^2}$$

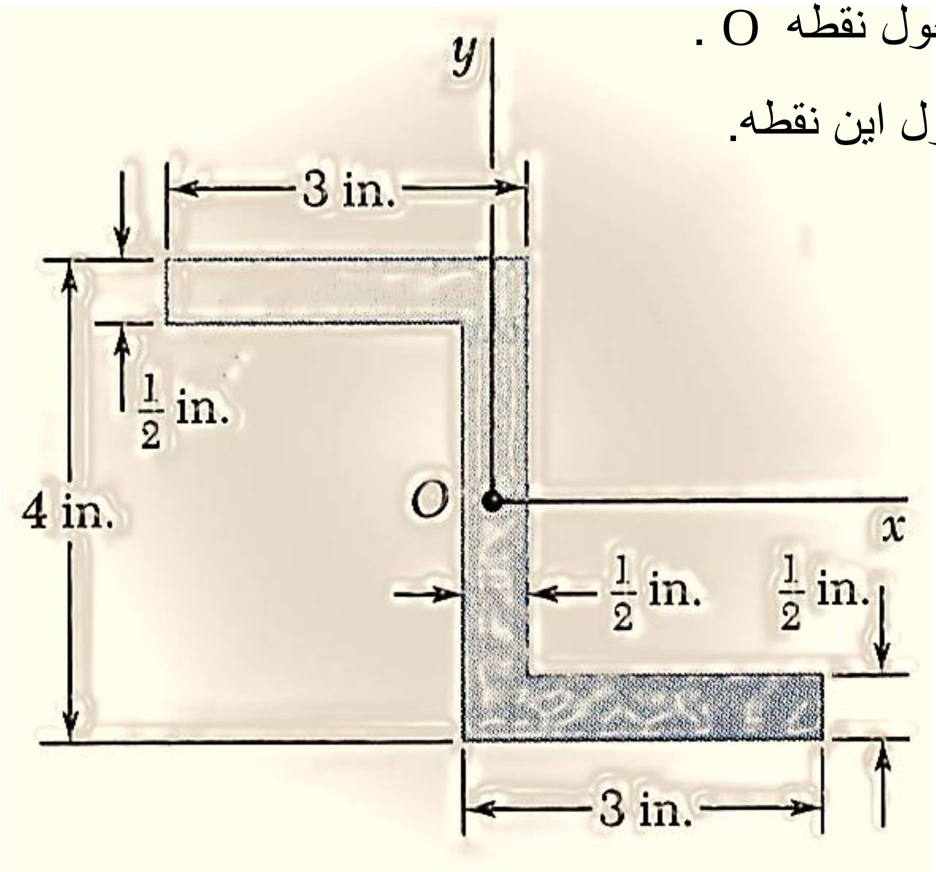
مثال ۶

- گشتاورهاي لختي مقطع نشان داده شده نسبت به محورهاي x و y برابرند با:

$I_y = 6.97\ in^4$ و $I_x = 10.38\ in^4$

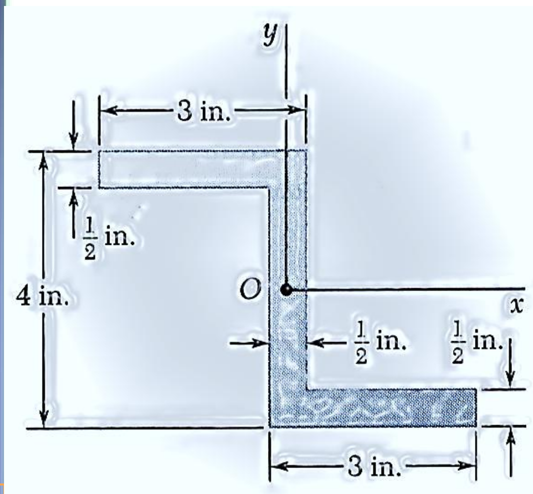
مطلوبست:

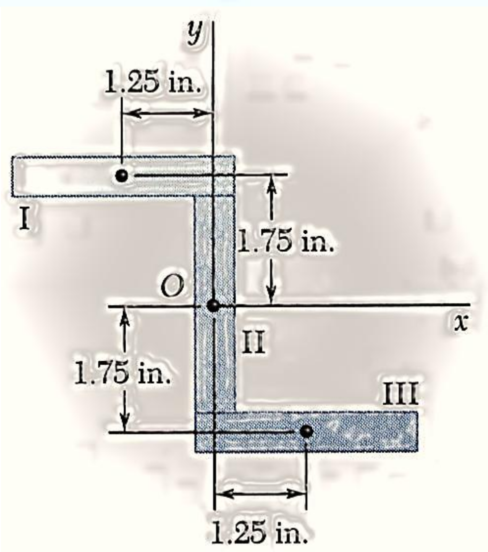
- سمتگيري محورهاي اصلي مقطع حول نقطه O .
- مقادير گشتاورلختي اصلي مقطع حول اين نقطه.



مثال ۶

✓ ابتداحصلضرب لختي رانسبت به محورهاي x و y بدست مي آوريم.سطح رابه ۳مستطيل تقسيم ميكنيم وبراي هر مستطيل داريم:



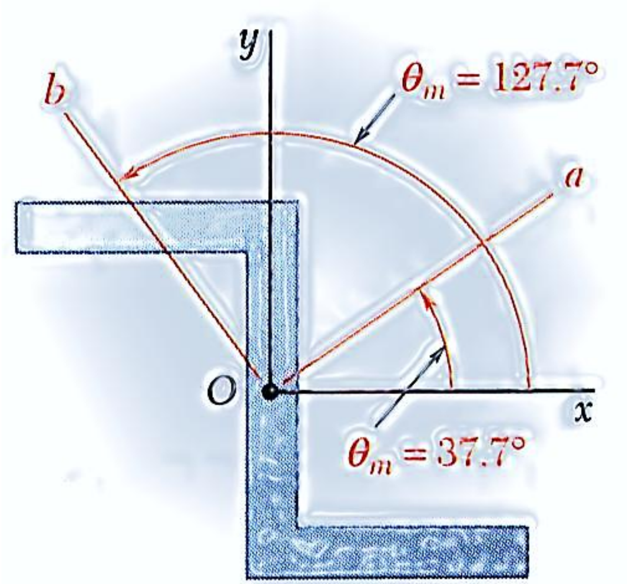


$$I_{xy} = \sum\left(\bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A\right)$$

مستطیل	مساحت, in^2	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}\bar{y}A, \text{in}^4$
I	1.5	−1.25	+1.75	−3.28
II	1.5	0	0	0
III	1.5	+1.25	−1.75	−3.28
				$\sum \bar{x}\bar{y}A = -6.56$

$$\boxed{I_{xy} = \sum \bar{x}\bar{y}A = -6.56\ \text{in}^4}$$

مثال ۶



✓ تعيين گشتاورهاي لختي اصلي ومحورهاي اصلي

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-6.56)}{10.38 - 6.97} = +3.85$$

$$2\theta_m = 75.4° \text{ and } 255.4°$$

$$\boxed{\theta_m = 37.7° \ \text{ and } \ \theta_m = 127.7°}$$

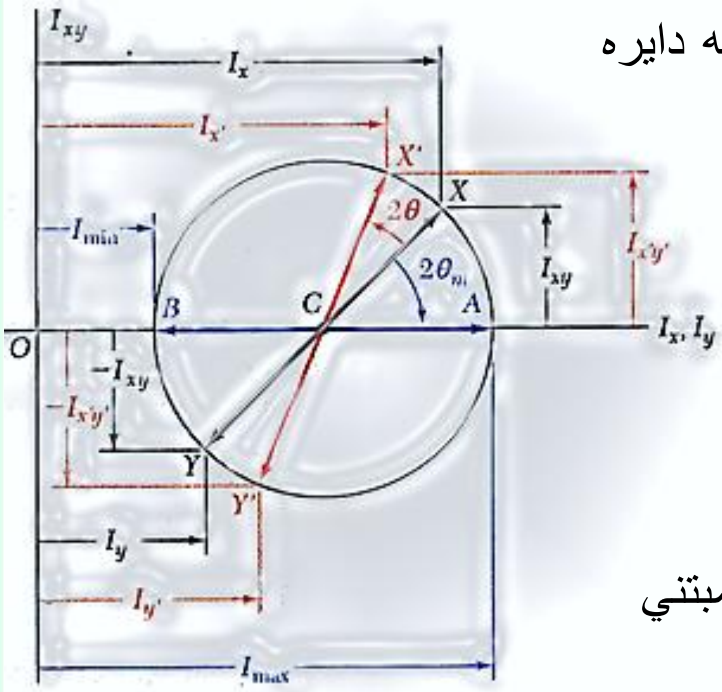
$$I_x = 10.38 \text{ in}^4$$
$$I_y = 6.97 \text{ in}^4$$
$$I_{xy} = -6.56 \text{ in}^4$$

$$I_{\max,\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{10.38 + 6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38 - 6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_a &= I_{\max} = 15.45 \text{ in}^4 \\ I_b &= I_{\min} = 1.897 \text{ in}^4 \end{aligned}}$$

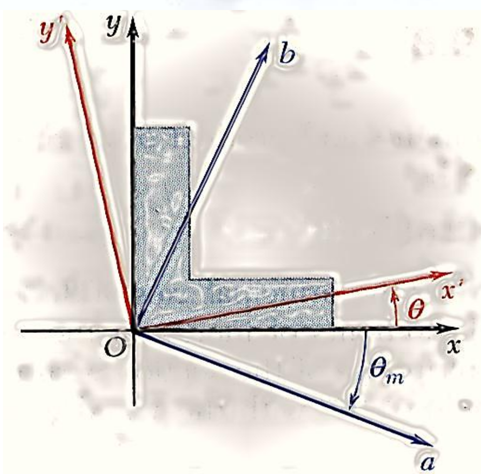
دايره موربراي تعيين گشتاورها و حاصلضربهاي لختي



- گشتاورها و حاصلضربهاي لختي يك سطح را ميتوان بوسيله دايره مور ترسيم كرد.

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) + I_{xy}^2}$$

- استفاده ازدايره مور منحصربه حلهاي ترسيمي يعني حلهاي مبتني بر ترسيم دقيق و اندازه گيري پارامترهاي مختلف نمي شود.



- تنها باترسيم دايره مور و استفاده از رابطه هاي مثلثاتي مي شود بسهولت رابطه هاي مختلف لازم رابراي حل عددي يك مسئله رابدست آورد.

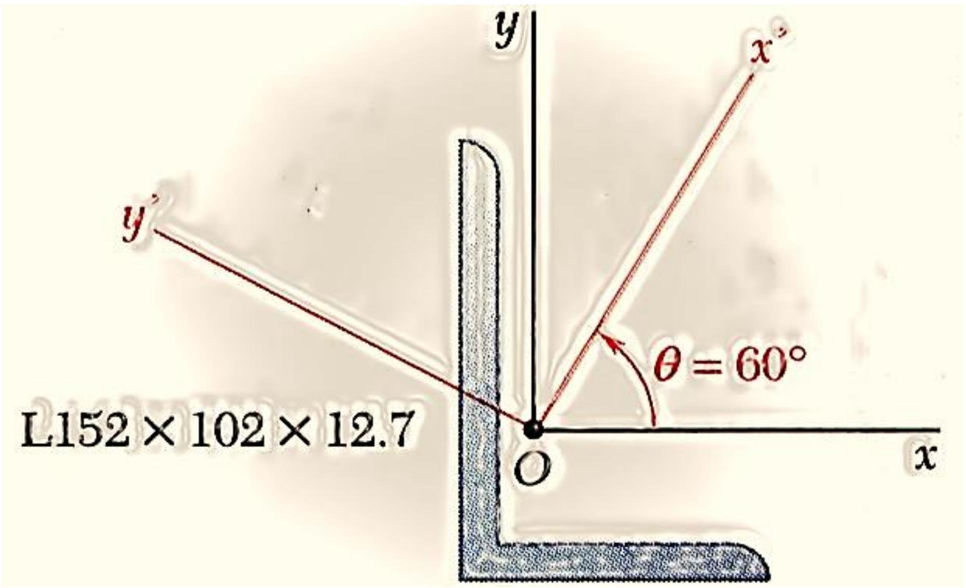
مثال ۷

- ❑ گشتاورها و حاصلضرب لختي مقطع نشان داده شده نسبت به محورهاي xو y برابر هستند با:

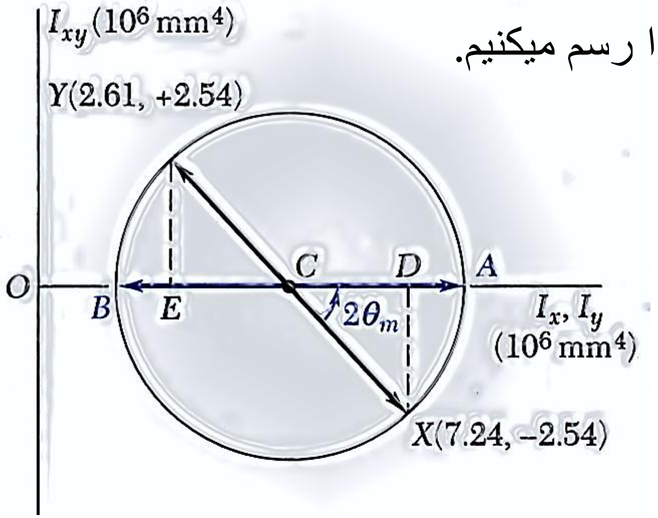
$$I_x = 7.24\times 106 \text{ mm}^4 \quad , I_y = 2.61\times 106 \text{ mm}^4 \quad , I_{xy} = -2.54\times 10^6 \text{ mm}^4$$

مطلوبست تعيين:

- محورهاي اصلي مقطع حول O
- مقادير گشتاورهاي لختي اصلي مقطع حول O
- گشتاورهاوحاصلضرب لختي مقطع نسبت به محورهاي x’ و y’ كه با محورهاي اصلي زاويه 60° دارند.



مثال ۷



✓ باترسيم نقاط (I_x, I_{xy}) و$(I_y, -I_{xy})$ بامختصات مقاديرشان دايره مور را رسم ميكنيم.

$$OC = I_{ave} = \tfrac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) = 4.925 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

$$CD = \tfrac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) = 2.315 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

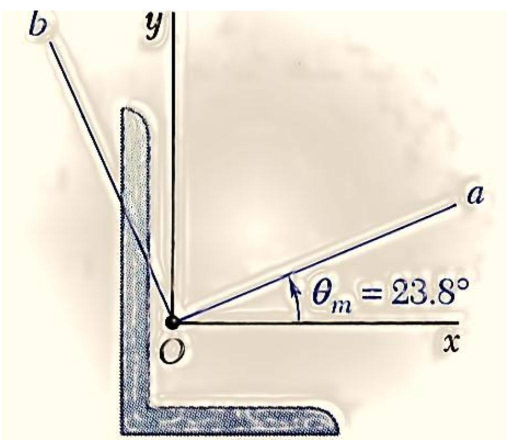
$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = 3.437 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

$$I_x = 7.24 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

$$I_y = 2.61 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

$$I_{xy} = -2.54 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

✓ محورهاي اصلي مقطع با نقطه Aو B متناظرند وزاويه اي كه بايد CX رابه اندازه آن دوران دهيم تابرCA منطبق شود $2\theta_m$ است.

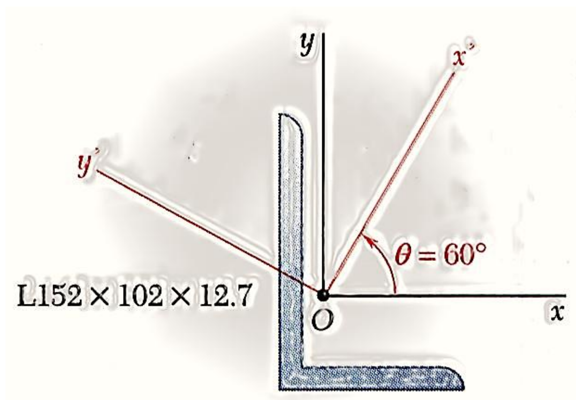


$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = 1.097 \qquad 2\theta_m = 47.6° \longrightarrow \boxed{\theta_m = 23.8°}$$

$$I_{\max} = OA = I_{ave} + R \qquad \boxed{I_{\max} = 8.36 \times 10^6\,\text{mm}^4}$$

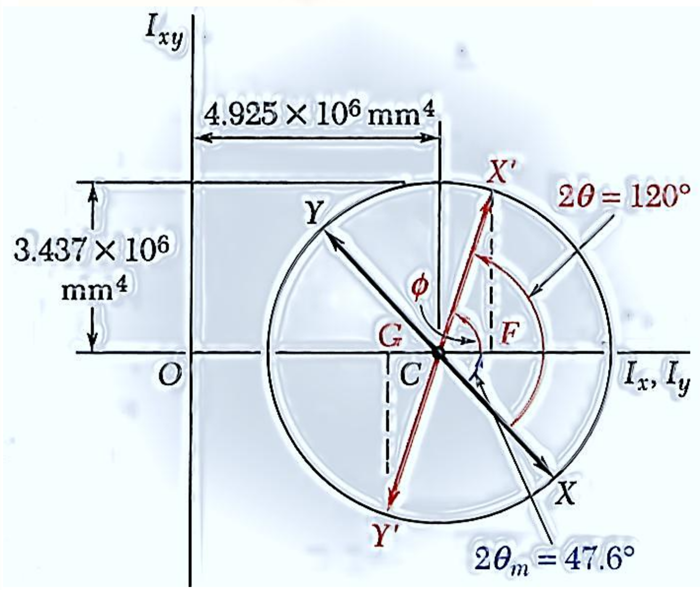
$$I_{\min} = OB = I_{ave} - R \qquad \boxed{I_{\min} = 1.49 \times 10^6\,\text{mm}^4}$$

مثال ۷



- ✓ نقاط x’ وy’ ازدوران پادساعتگرد CX و CY به اندازه 2θ=120 بدست مي آيند.مختصات اين نقاط گشتاورها و حاصلضربهاي مطلوب رابدست مي دهند.

- ✓ CX’ بامحورافقي زاويه (φ=120°- 47.6°=72.4°) راتشكيل مي دهد:



$$OC = I_{ave} = 4.925 \times 10^6 \text{mm}^4$$

$$R = 3.437 \times 10^6 \text{mm}^4$$

$$I_{x'} = OF = OC + CX' \cos\varphi = I_{ave} + R\cos 72.4^o$$

$$\boxed{I_{x'} = 5.96 \times 10^6 \text{mm}^4}$$

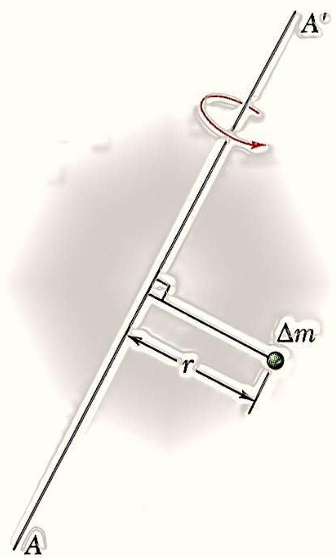
$$I_{y'} = OG = OC - CY' \cos\varphi = I_{ave} - R\cos 72.4^o$$

$$\boxed{I_{y'} = 3.89 \times 10^6 \text{mm}^4}$$

$$I_{x'y'} = FX' = CY' \sin\varphi = R\sin 72.4^o$$

$$\boxed{I_{x'y'} = 3.28 \times 10^6 \text{mm}^4}$$

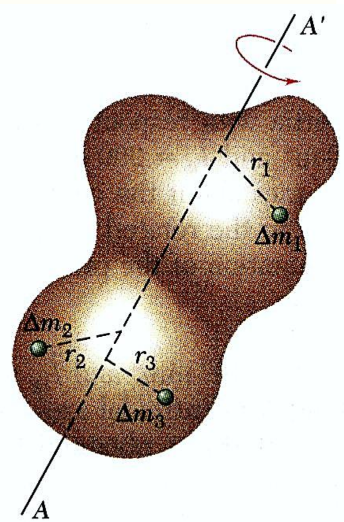
گشتاورلختي يك جرم

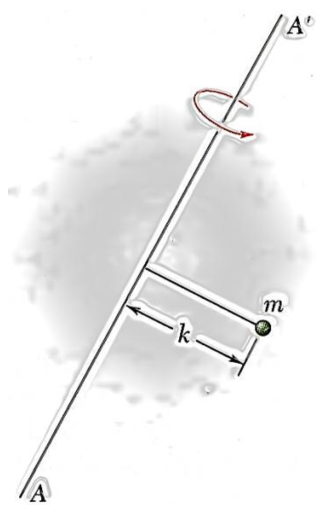


- جسم كوچكي به جرم Δm رادرنظربگيريد كه به ميله اي با جرم ناچيزمتصل است و مي تواند حول محور AA’ دوران كند.اگر كوپلي به اين سيستم وارد شود ميله و جرم حول محور دوران ميكنند.

- لذا حاصلضرب $\Delta m\ r^2$ معياري از لختي سيستم خواهدبود وآن را **گشتاور لختي** جرم موردنظرحول محور مورد نظر مي نامند.

- اگرجرم را به اجزا كوچكتري تقسيم كنيم درميابيم كه مقاومت جسم دربرابر به حركت درآمدن برابر مجموع تمام گشتاورهاي لختي اجزا مي باشد. يعني همان انتگرال :





$$I = r_1^2\Delta m + r_2^2\Delta m + r_3^2\Delta m + \cdots$$

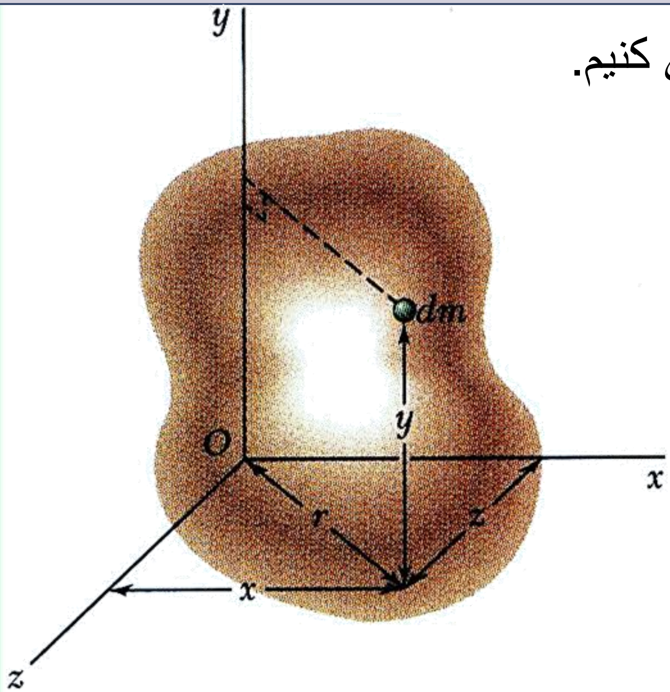
$$= \int r^2 dm = \text{گشتاور لختي جرم}$$

- شعاع ژيراسيون يا شعاع چرخ نيز مطابق زير تعريف مي شود:

$$I = k^2 m \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

- اين اصطلاح نماينده ي فاصله اي است كه بايدكل جرم جسم را درآنجا متمركز كنيم تا گشتاورلختي آن نسبت به محور موردنظر ثابت بماند.

گشتاورلختي يك جرم



- گشتاورلختي يك جسم نسبت به محور y رابه صورت زير بيان مي كنيم.

$$I_y = \int r^2 dm = \int \left(z^2 + x^2\right) dm$$

- همينطور نسبت به ساير محورها داريم:

$$I_x = \int \left(y^2 + z^2\right) dm$$
$$I_z = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$$

- واحد در SI:

$$I = \int r^2 dm = \left(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\right)$$

- واحد در US:

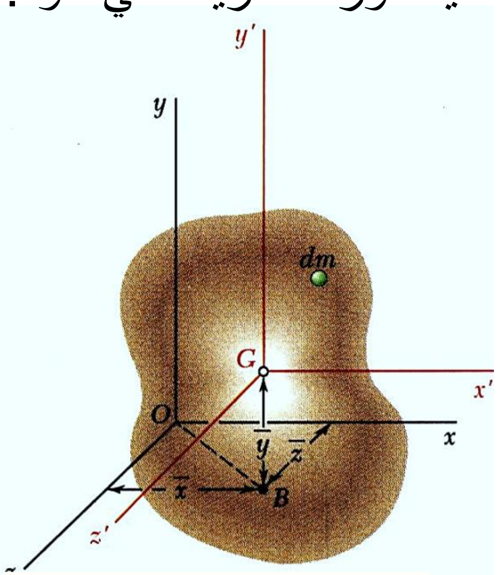
$$I = \left(slug \cdot ft^2\right) = \left(\frac{lb \cdot s^2}{ft} ft^2\right) = \left(lb \cdot ft \cdot s^2\right)$$

$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg.m/s}^2$

$1\ \mathrm{lb.ft.s}^2 = 1.365\ \mathrm{kg.m}^2$

قضيه محورهاي موازي

- گشتاورلختي جسم با مركز G وفاصله آن تامبدا O (GO) نسبت به محور x به اينصورت تعريف مي شود:



$$I_x = \int \left(y^2 + z^2\right)dm = \int \left[\left(y' + \bar{y}\right)^2 + \left(z' + \bar{z}\right)^2\right]dm$$

$$= \int \left(y'^2 + z'^2\right)dm + 2\bar{y}\int y'dm + 2\bar{z}\int z'dm + \left(\bar{y}^2 + \bar{z}^2\right)\int dm$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m\left(\bar{y}^2 + \bar{z}^2\right)$$

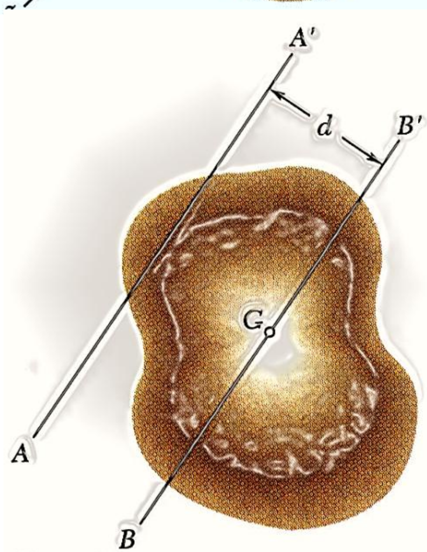
- بطور مشابه نسبت ساير محورها خواهيم داشت:

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m\left(\bar{z}^2 + \bar{x}^2\right)$$

$$I_z = \bar{I}_{z'} + m\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)$$

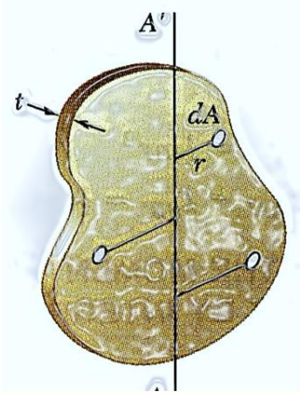
- رابطه كلي اين قضيه:

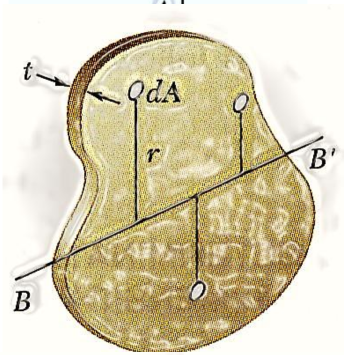
$$\boxed{I = \bar{I} + md^2}$$

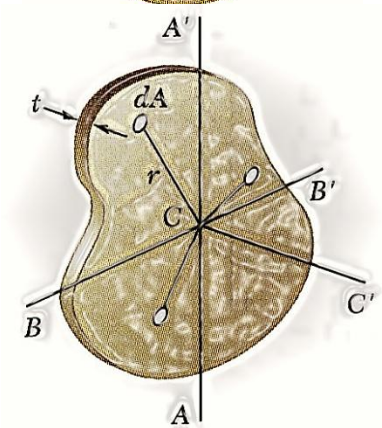


$\bar{I}$ گشتاور لختي جسم نسبت به محور گذرنده از مركز گراني (BB') جسم است.

گشتاورلختي ورقهاي نازك







- ورق نازكي باضخامت يكنواخت t كه ازماده اي باچگالي ρساخته شده است داراي گشتاور لختي زير است:

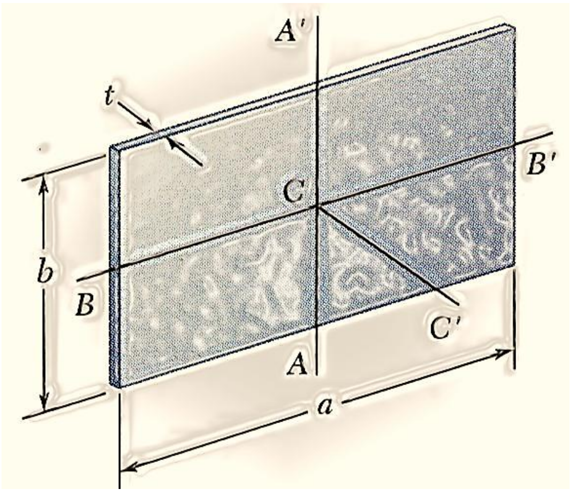
$$I_{AA'} = \int r^2 dm = \rho t \int r^2 dA$$
$$= \rho t \, I_{AA',\text{سطح}}$$

$$I_{BB'} = \rho t \, I_{BB',\text{سطح}}$$

- بادرنظرگرفتن محور CC’ عمود بر صفحه :

$$I_{CC'} = \rho t \, J_{C,\text{سطح}} = \rho t \left(I_{AA',\text{سطح}} + I_{BB',\text{سطح}} \right)$$
$$= I_{AA'} + I_{BB'}$$

گشتاورلختي ورقهاي نازك

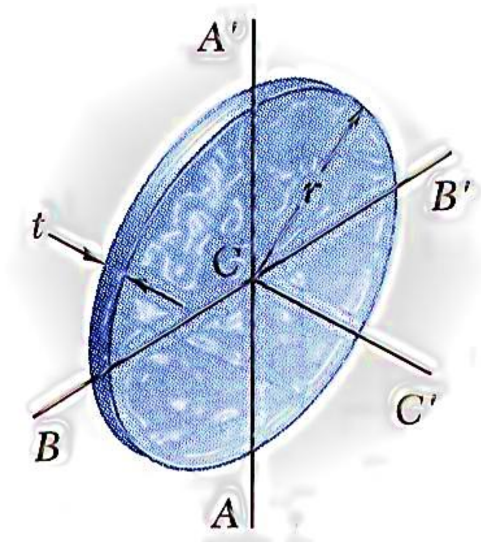


- درمورد ورق مستطيلي بااضلاع معلوم گشتاورهاي لختي نسبت به محورهايي كه ازمركز گراني صفحه ميگذرند:

$$I_{AA'} = \rho t\, I_{AA',area} = \rho t\left(\tfrac{1}{12}a^3 b\right) = \tfrac{1}{12} m a^2$$

$$I_{BB'} = \rho t\, I_{BB',area} = \rho t\left(\tfrac{1}{12}a b^3\right) = \tfrac{1}{12} m b^2$$

$$I_{CC'} = I_{AA',mass} + I_{BB',mass} = \tfrac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right)$$



- براي ورق دايروي:

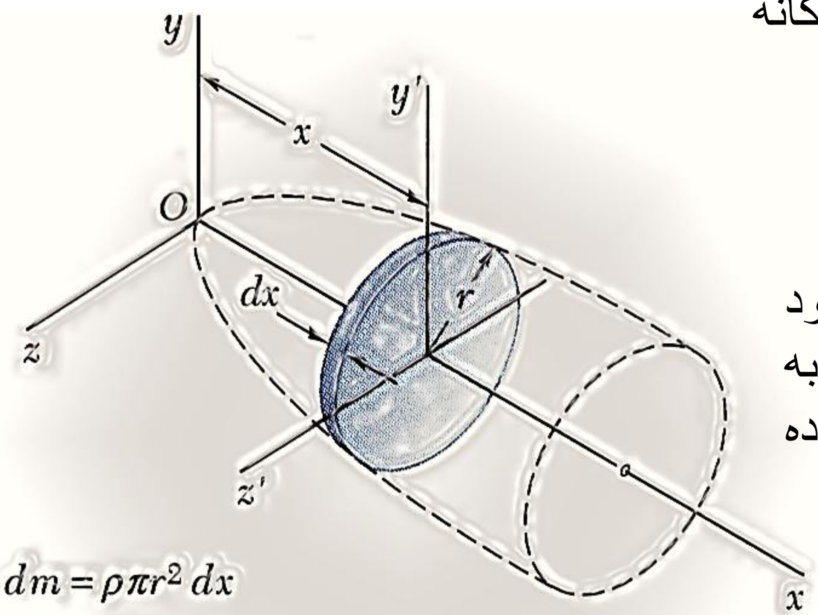
$$I_{AA'} = I_{BB'} = \rho t\, I_{AA',area} = \rho t\left(\tfrac{1}{4}\pi r^4\right) = \tfrac{1}{4} m r^2$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2} m r^2$$

گشتاورلختي جسم سه بعدي با انتگرال گيري

- براي محاسبه گشتاورلختي يك جسم سه بعدي بطور كلي بايد انتگرال سه گانه يا دست كم يك انتگرال دوگانه رامحاسبه كنيم.

$$I = \rho \int r^2 dV$$



$$dm = \rho \pi r^2 \, dx$$

$$dI_x = \frac{1}{2} r^2 \, dm$$

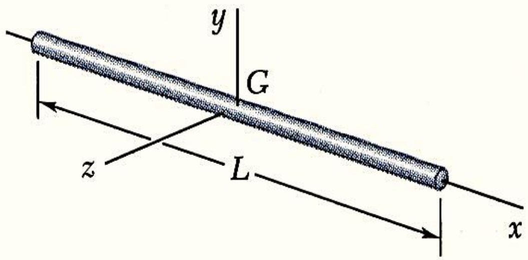
$$dI_y = dI_{y'} + x^2 \, dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$$

$$dI_z = dI_{z'} + x^2 \, dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$$

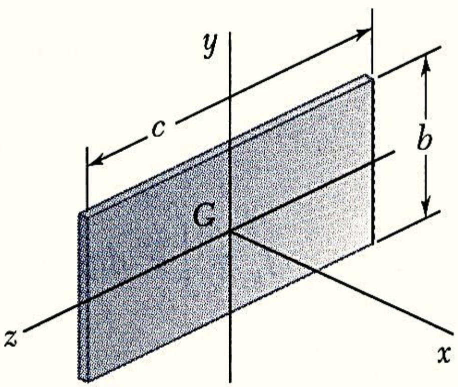
- اگرجسم داراي دو صفحه تقارن باشد معمولا مي شود باانتخاب يك تيغه نازك وعمود برصفحه هاي تقارن به منزله جزء جرم dm گشتاورلختي راباانتگرال گيري ساده بدست آورد.

- براي اجسام مركب كه ازچندشكل تشكيل شده اند مي توان با محاسبه گشتاورهاي لختي اجزاي تشكيل دهنده آن حول محور موردنظر وجمع بستن آنها بدست آورد.

گشتاورلختي چند شكل متداول



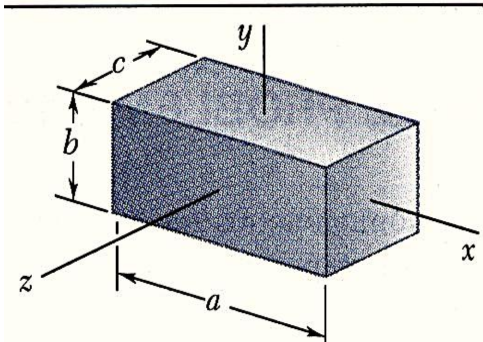
$$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$$



$$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{1}{12} mc^2$$

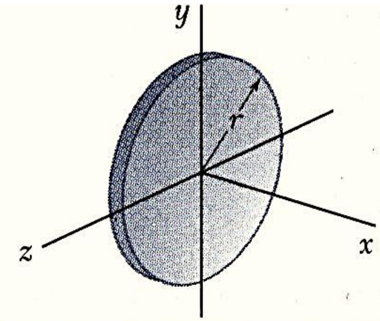
$$I_z = \frac{1}{12} mb^2$$



$$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

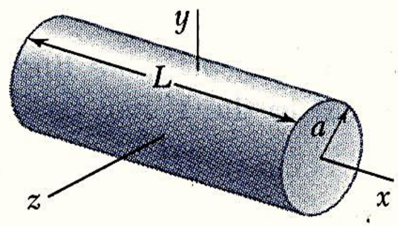
$$I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$$

$$I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$



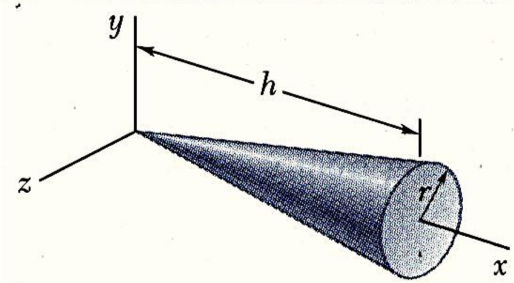
$$I_x = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$$



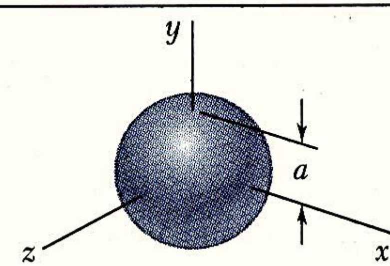
$$I_x = \frac{1}{2} ma^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$$



$$I_x = \frac{3}{10} ma^2$$

$$I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$$

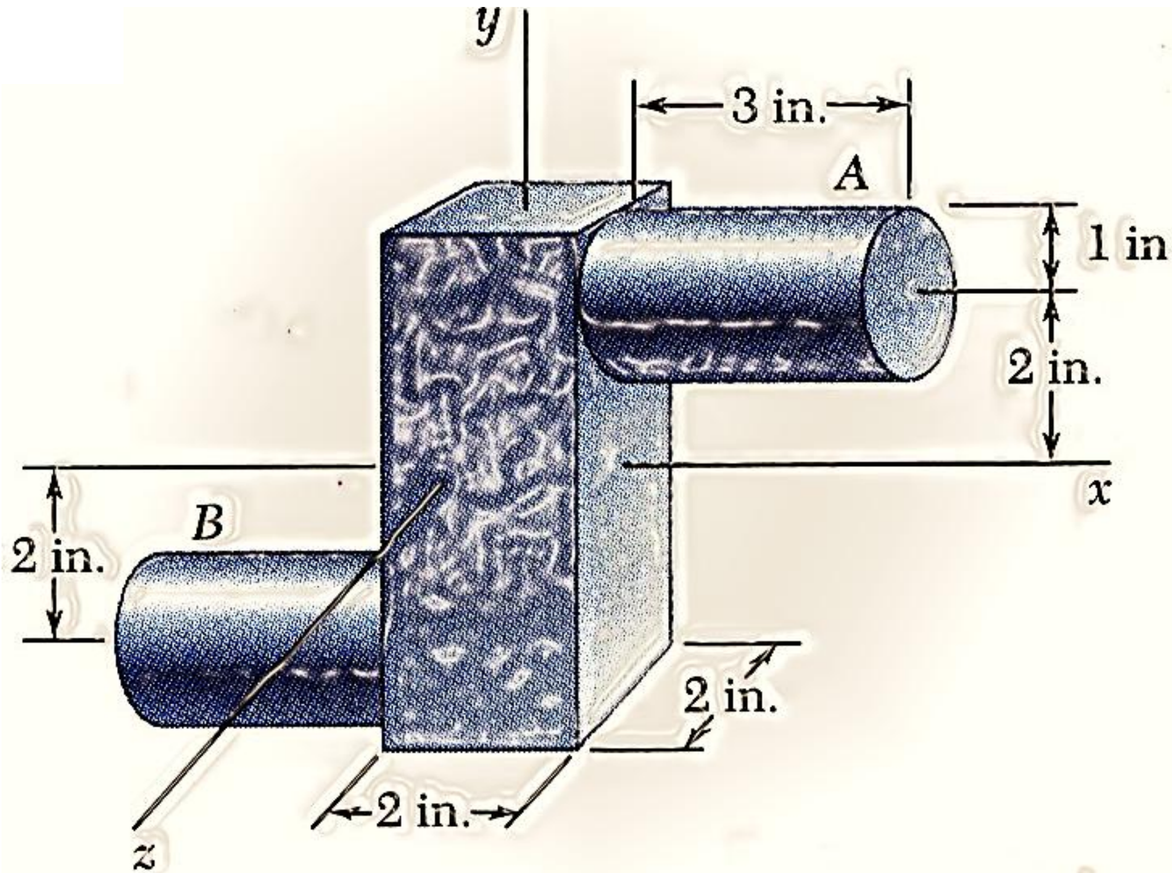


$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$$

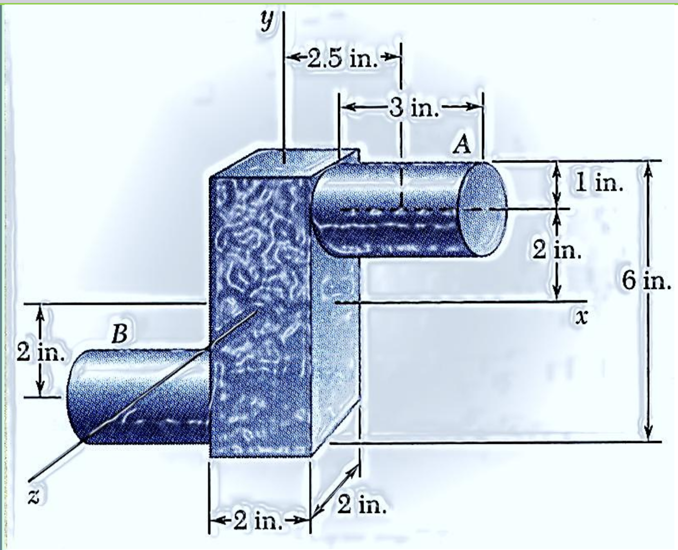
Meysam4366@yahoo.com

مثال ۸

- براي قطعه فولادي زير گشتاورهاي لختي جرم اين قطعه رانسبت به محورهاي مختصات محاسبه كنيد. چگالي فولاد $490\ \mathrm{lb/ft^3}$



مثال ۸



✓ محاسبه جرمها:

هر استوانه :

$$m = \frac{\gamma V}{g} = \frac{\left(490\ \text{lb/ft}^3\right)\left(\pi \times 1^2 \times 3\right)\text{in}^3}{\left(1728\ \text{in}^3/\text{ft}^3\right)\left(32.2\ \text{ft/s}^2\right)}$$

$$m = 0.0829\ \text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$$

منشور :

$$m = \frac{\gamma V}{g} = \frac{\left(490\ \text{lb/ft}^3\right)\left(2 \times 2 \times 6\right)\text{in}^3}{\left(1728\ \text{in}^3/\text{ft}^3\right)\left(32.2\ \text{ft/s}^2\right)}$$

$$m = 0.211\ \text{lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$$

✓ گشتاورهاي لختي :

منشور: (a = 2 in., b = 6 in., c = 2 in.):

$$I_y = \tfrac{1}{12}m\left[c^2 + a^2\right] = \tfrac{1}{12}(0.211)\left[\left(\tfrac{2}{12}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{12}\right)^2\right]$$
$$= 0.977 \times 10^{-3}\ \text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{12}m\left[b^2 + c^2\right] = \tfrac{1}{12}(0.211)\left[\left(\tfrac{6}{12}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{12}\right)^2\right]$$
$$= 4.88 \times 10^{-3}\ \text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2$$

Meysam4366@yahoo.com

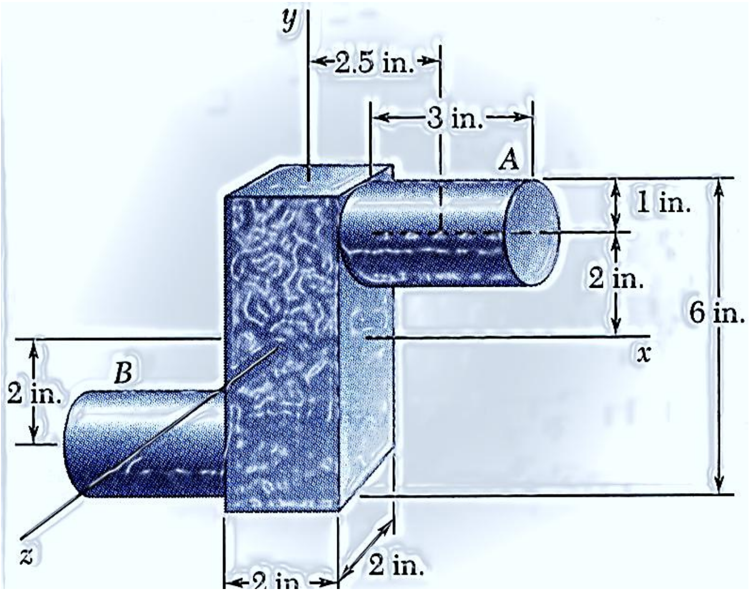
مثال ۸

استوانه ها:

$$\left(a = 1\ \text{in.}, L = 3\ \text{in.}, \bar{x} = 2.5\ \text{in.}, \bar{y} = 2\ \text{in.}\right):$$

$$\begin{aligned} I_x &= \tfrac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(0.0829)\left(\tfrac{1}{12}\right)^2 + (0.0829)\left(\tfrac{2}{12}\right)^2 \\ &= 2.59\times10^{-3}\,\text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \tfrac{1}{12}m\left[3a^2 + L^2\right] + m\bar{x}^2 \\ &= \tfrac{1}{12}(0.0829)\left[3\left(\tfrac{1}{12}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{12}\right)^2\right] + (0.0829)\left(\tfrac{2.5}{12}\right)^2 \\ &= 4.17\times10^{-3}\,\text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} I_z &= \tfrac{1}{12}m\left[3a^2 + L^2\right] + m\left[\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right] \\ &= \tfrac{1}{12}(0.0829)\left[3\left(\tfrac{1}{12}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{12}\right)^2\right] + (0.0829)\left[\left(\tfrac{2.5}{12}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{12}\right)^2\right] \\ &= 6.48\times10^{-3}\,\text{lb}\cdot\text{ft}\cdot\text{s}^2 \end{aligned}$$

مثال ۸

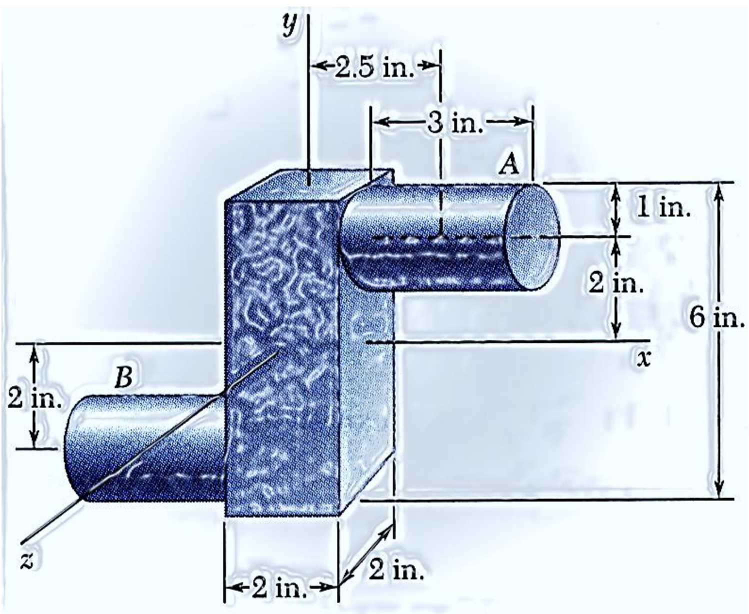
✓ باجمع بستن مقادير بدست آمده براي كل جسم خواهيم داشت:

$$I_x = 4.88\times10^{-3} + 2\left(2.59\times10^{-3}\right)$$

$$\boxed{I_x = 10.06\times10^{-3}\,\mathrm{lb\cdot ft\cdot s^2}}$$

$$I_y = 0.977\times10^{-3} + 2\left(4.17\times10^{-3}\right)$$

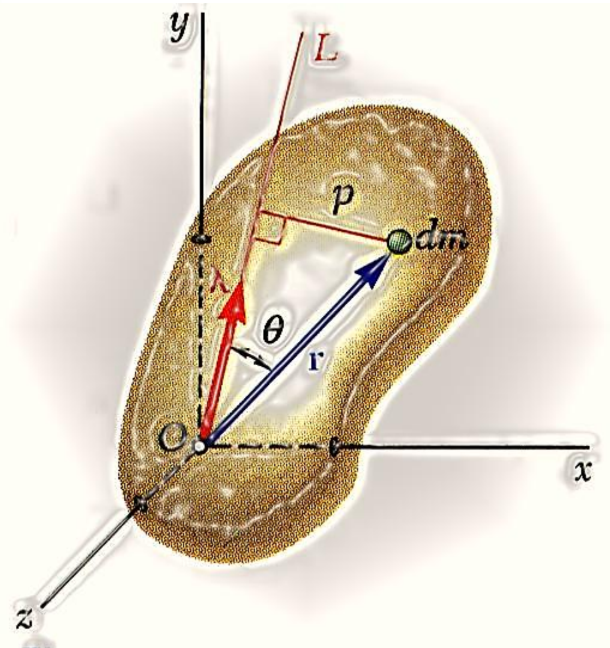
$$\boxed{I_y = 9.32\times10^{-3}\,\mathrm{lb\cdot ft\cdot s^2}}$$



$$I_z = 4.88\times10^{-3} + 2\left(6.48\times10^{-3}\right)$$

$$\boxed{I_z = 17.84\times10^{-3}\,\mathrm{lb\cdot ft\cdot s^2}}$$

گشتاورلختي نسبت به محور دلخواه



- I_{OL} = گشتاورلختي جسم نسبت به OL

$$I_{OL} = \int p^2 dm = \int \left|\vec{\lambda} \times \vec{r}\right|^2 dm$$

- اگربردار یکه درامتداد OL را باλ و بردار مکان جزء جرم dm را با r نشان دهیم:

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

- حاصلضربهاي لختي جرم درهمان شرايط تقارني صفر مي شوند كه حاصلضرب لختي سطح ميشد،و قضيه محورهاي موازي براي حاصلضرب لختي جرم بافرمولهايي مشابه بدست آمده براي حاصلضرب لختي سطح بيان مي شود:

$$I_{xy} = \int xy\, dm = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y}$$

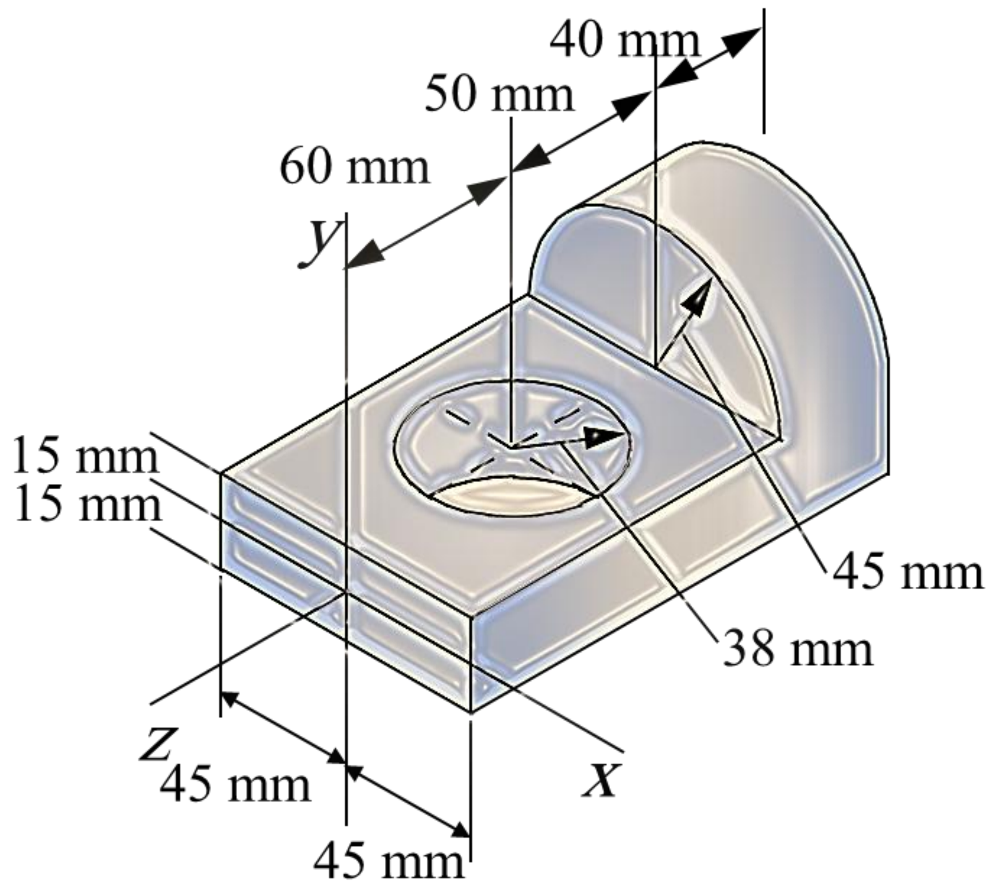
$$I_{yz} = \int yz\, dm = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z}$$

$$I_{zx} = \int zx\, dm = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x}$$

مثال ۸

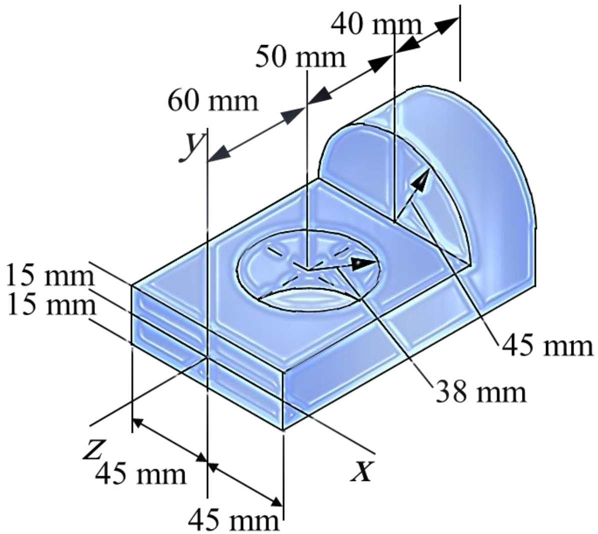
❑ براي قطعه فولادي زير گشتاور لختي جرم وشعاع ژيراسيون رانسبت به محور x محاسبه كنيد.

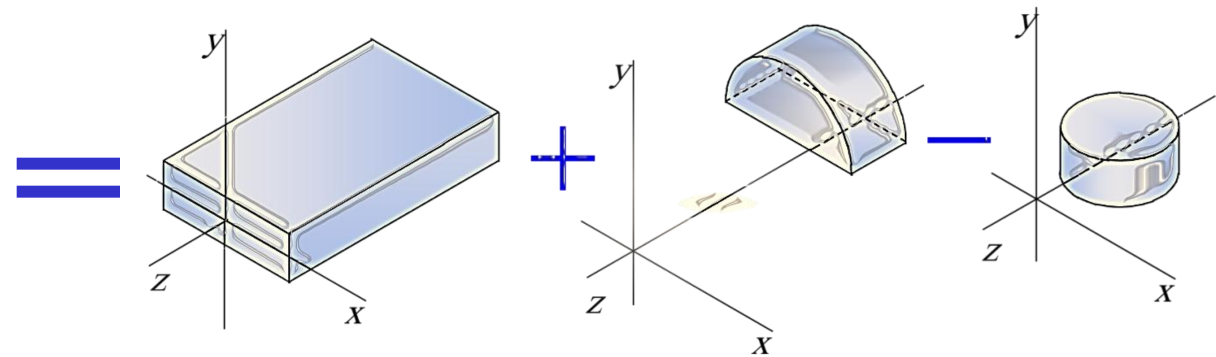
چگالي فولاد $7850\ \mathrm{kg/m^3}$



مثال ۸

✓ باتقسیم قطعه مرکب به قطعات ساده خواهیم داشت:





براي منشور مستطيلي:

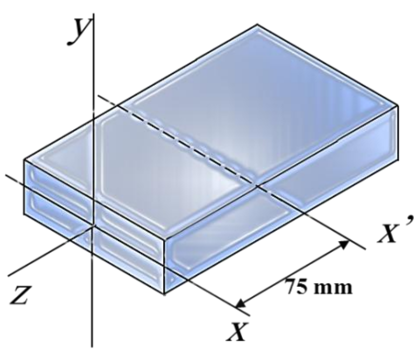
$$m = \rho V$$

$$V = (0.15\text{ m})(0.09\text{ m})(0.03\text{ m})$$

$$V = 4.05 \times 10^{-4}\text{ m}^3$$

$$m = (7850\text{ kg/m}^3)(4.05\times10^{-4}\text{ m}^3)$$

$$m = 3.18\text{ kg}$$



$$(I_x) = (\bar{I}_{x'}) + m d^2$$

$$(I_x) = \frac{1}{12}(3.18\text{ kg})[(0.15\text{ m})^2+(0.03\text{ m})^2] + (3.18\text{ kg})(0.075\text{ m})^2$$

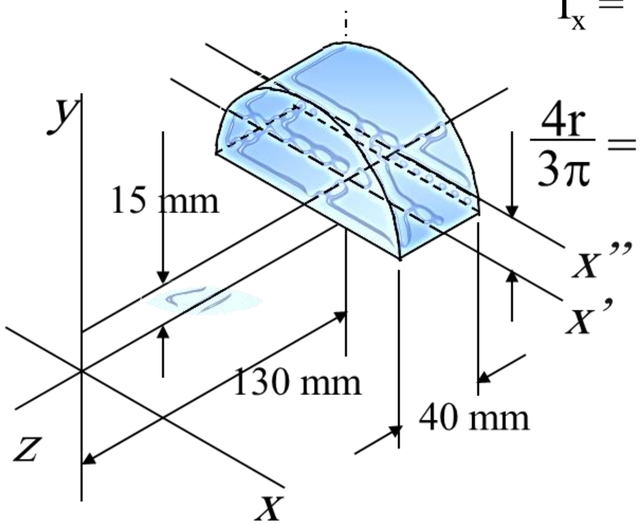
$$(I_x) = 2.408 \times 10^{-2}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

مثال ۸

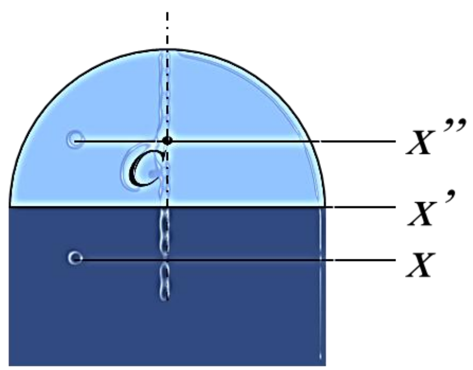
براي نيم دايره منشوري:

$$m = \rho\ V$$
$$V = \frac{1}{2}\pi\,(0.045\text{ m})^2\,(0.04\text{ m})$$
$$V = 1.27 \times 10^{-4}\text{ m}^3$$
$$m = (7850\text{ kg/m}^3)(1.27\times10^{-4}\text{ m}^3)$$
$$m = 1.0\text{ kg}$$

$$I_{x'} = \bar{I}_{x''} + m\,d^2$$
$$\frac{1}{12}(1.0\text{ kg})\,[3\,(0.045\text{ m})^2 + (0.04\text{ m})^2] = \bar{I}_{x''} + (1.0\text{ kg})(0.0191\text{ m})^2$$
$$\bar{I}_{x''} = 27.477 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_x = (\bar{I}_{x''}) + m\,d^2 = 27.477 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + (1.0\text{ kg})[(0.13\text{ m})^2 + (0.015\text{ m} + 0.0191\text{ m})^2]$$
$$I_x = 18.34 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$



$$\frac{4r}{3\pi} = \frac{4\cdot 45}{3\pi} = 19.1\text{ mm}$$

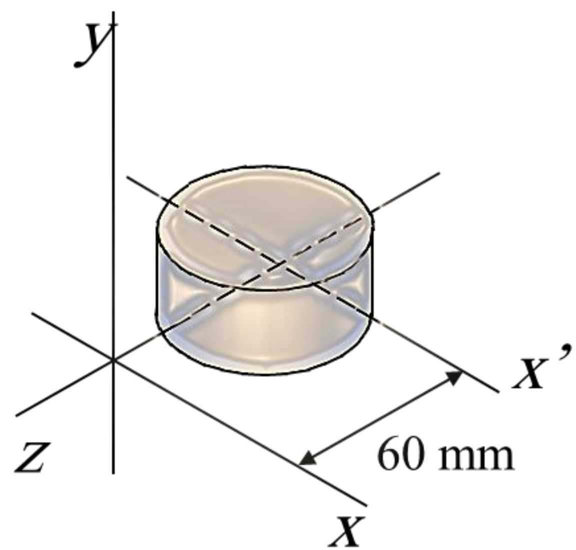


مثال ۸

براي قسمت خالي دايروي شكل:

$$m = \rho\ V$$
$$V = \pi\,(0.038\ \text{m})^2\,(0.03\ \text{m})$$
$$V = 1.361 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$
$$m = (7850\ \text{kg/m}^3)(1.36\text{x}10^{-4}\ \text{m}^3)$$
$$m = 1.068\ \text{kg}$$

$$(I_x) = (\,\bar{I}_{x'}) + m\,d^2$$
$$(I_x) = \frac{1}{12}\,(1.07\ \text{kg})\,[\,3\,(0.038\ \text{m})^2 + (0.03\ \text{m})^2\,] + (1.07\ \text{kg})\,(0.06\ \text{m})^2$$
$$(I_x) = 4.31 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$



مثال ۸

براي كل قطعه:

$$I_x = 2.408 \times 10^{-2} + 1.834 \times 10^{-2} - 4.31 \times 10^{-3}$$

$$\boxed{I_x} = 3.81 \times 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

✓ محاسبه شعاع ژیراسیون:

وزن کل: $m = 3.18 + 1.0 - 1.07 = 3.11\ \text{kg}$

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{3.81 \times 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}{3.11\ \text{kg}}}$$

$$\boxed{k = 0.1107\ \text{m}}$$

10

STATICS : مکانیک برداری برای مهندسان

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.SC.

روش کار مجازي

- اصل كارمجازي بطور رسمي توسط جان برنولي رياضيدان سوئيسي درقرن ۱۸ بكارگرفته شد.

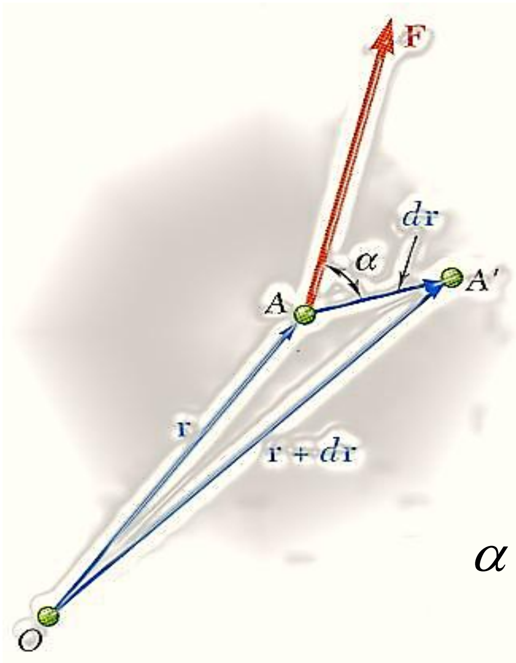
- اصل تغيير مكانهاي مجازي بيان مي دارد :
  - چنانچه جسم صلبي كه تحت تاثير مجموعه اي ازنيروها درحالت تعادل قرار دارد دچار يك تغيير مكان مجازي كوچك شود كارمجازي انجام شده توسط نيروهاي خارجي صفر است.

- اصطلاح **مجازي** بطور ساده به مفهوم تصوري است نه واقعي.

- اصل نيروهاي مجازي براي اجسام تغييرشكل پذير بيان ميدارد:
  - چنانچه سازه تغييرشكل پذيري كه تحت تاثير مجموعه اي از نيروه وكوپل درتعادل است دچاريك تغييرشكل كوچك واقعي سازگار باشرايط تكيه گاهي وپيوستگي شود كارمجازي خارجي انجام شده توسط نيروها وكوپل مجازي خارجي موثر درضمن تغييرمكان ويا چرخش واقعي خارجي برابر است با كارمجازي داخلي انجام شده توسط نيروها وكوپلهاي مجازي داخلي موثر درضمن تغيير مكانها وچرخشهاي واقعي داخلي.

- اصطلاح **مجازي** درارتباط بانيروها نشانگر آنست كه مجموعه نيروها حالت دلخواه دارد وبه عامل ايجاد تغييرشكل واقعي بستگي ندارد..

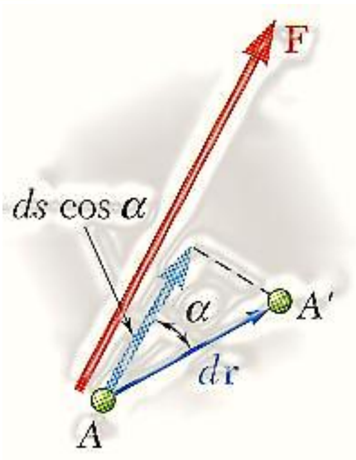
کار يك نيرو

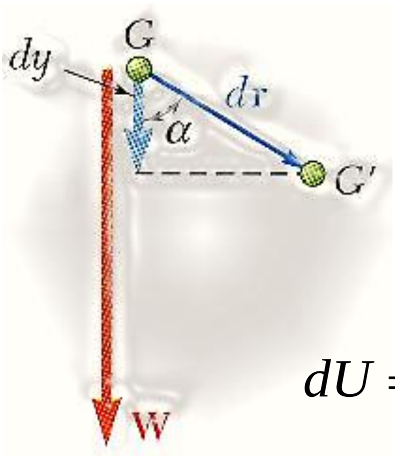


- کار نيروي $\vec{F}$ متناسب با جابجايي $d\vec{r}$ ← $dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$dU = F\,ds\cos\alpha$$

$$\alpha = 0,\ dU = +F\,ds \qquad \alpha = \pi,\ dU = -F\,ds \qquad \alpha = \frac{\pi}{2},\ dU = 0$$

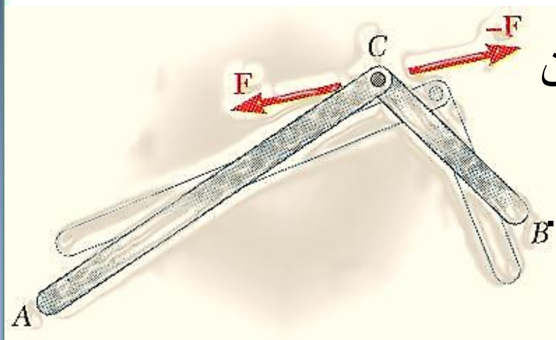


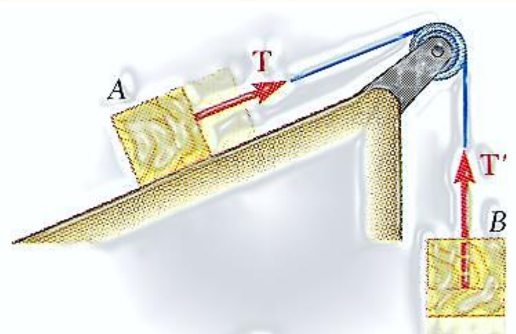


$$dU = W\,dy$$

كار يك نيرو

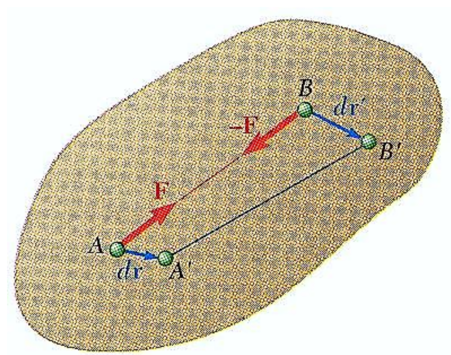
- تعدادي از نيروهايي كه دراستاتيك باآنها سروكارداريم كارانجام نميدهند:
  - عكس العمل درپين بدون اصطكاك وقتي كه جسم حول پين نگهدارنده آن دوران ميكند.
  - عكس العمل درسطح بدون اصطكاك وقتي جسم برروي آن حركت ميكند.
  - عكس العمل درغلتكي كه درامتداد مسيرش حركت مي كند .
  - وزن جسم وقتي مركز گراني آن درامتداد افقي حركت مي كند .
  - نيروي اصطكاك وا برچرخي كه بون لغزش مي غلتد.





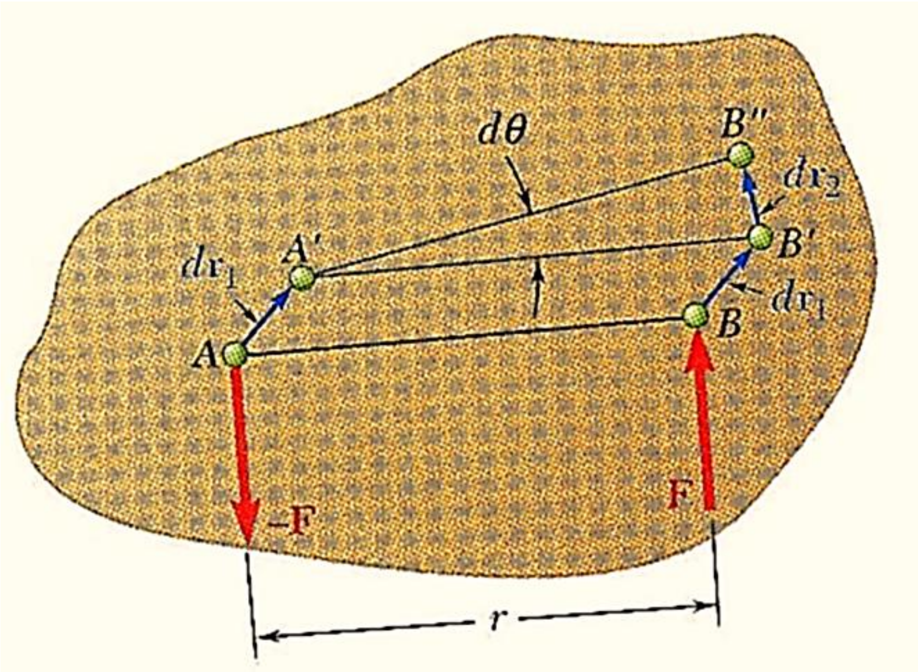
(b)

- دربعضي موارد مجموع كارانجام شده توسط چند نيرو صفر است:
  - اجسام متصل شده توسط پينهاي بدون اصطكاك.
  - اجسام متصل شده توسط سيم ناكشايند (سيم بدون كش آمدن).
  - كل كار نيروهاي داخلي اي كه ذره هاي يك جسم صلب را بهم متصل نگه ميدارند.



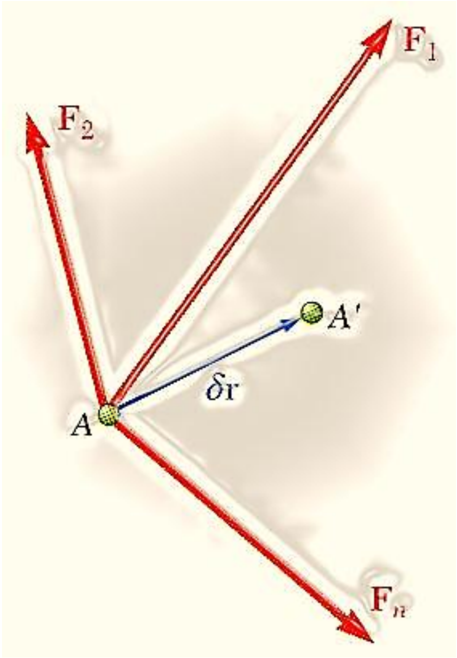
كار يك كوپل

- گاهي بهتراست كار نيروهاي خارجي وارد برجسم صلب رابدون درنظر گرفتن كار هريك از نيروهاي تشكيل دهنده يك كوپل محاسبه كنيم:



$$W = -\vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}\cdot\left(d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2\right)$$
$$= \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = F\,ds_2 = F\,r d\theta$$
$$= M\,d\theta$$

اصل كار مجازي



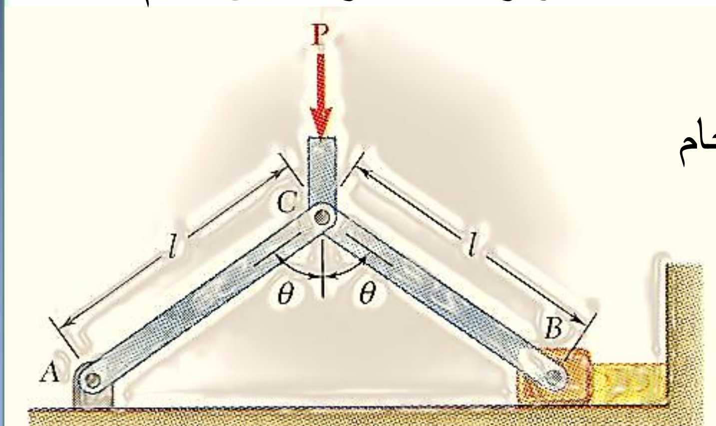
- ذره اي را تحت اثر چند نيرو درنظر بگيريد،
- ازآنجا كه جابجايي مورد نظر واقعا اتفاق نميفتد آن را مجازي مي نامند وبا δr نشان ميدهيم:

$$\delta U = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \delta\vec{r} = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right) \cdot \delta\vec{r}$$
$$= \vec{R} \cdot \delta\vec{r}$$

- اگر ذره اي درحال تعادل باشد، كل كارمجازي نيروهاي وارد برذره براي هرجابجايي مجازي ذره صفر است.
- اگر جسم صلبي درحال تعادل باشد،كل كار مجازي نيروهاي خارجي وارد برآن براي هرجابجايي مجازي جسم صفر است.
- اگر سيستم درحين جابجايي مجازي متصل بهم بماند فقط لازم است كار نيروهاي خارجي بر سيستم رادرنظر بگيريم چون كاركل نيروهاي داخلي در اتصالهاي مختلف صفر است.

کاربردهاي اصل كار مجازي

- مي خواهيم نيرويي راكه گيره درنتيجه اعمال نيروي معين P به نقطه B وارد ميكند را تعيين كنيم:

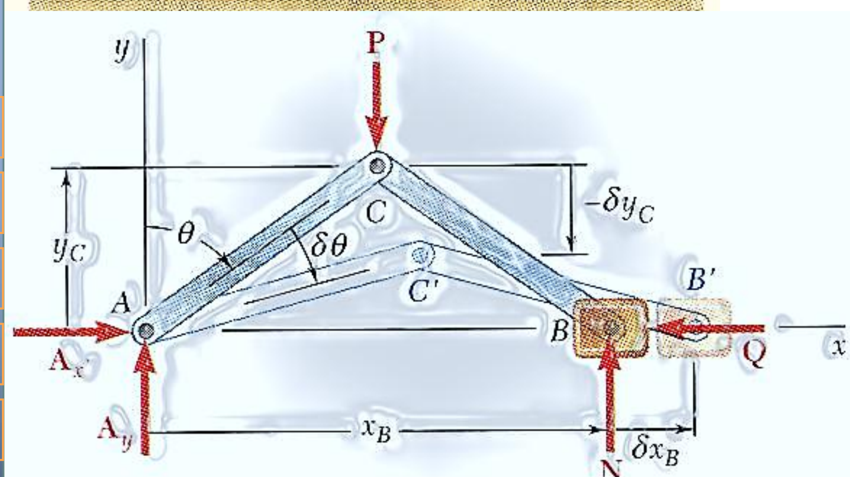


- عکس العملهاي A_x و A_y و N طي اين جابجايي مجازي كارانجام نميدهند وتنها بايد P و عكس العمل چوب Qراتعيين كنيم.

$$\delta U = 0 = \delta U_Q + \delta U_P = -Q\,\delta x_B - P\,\delta y_C$$

$$x_B = 2l\sin\theta \qquad y_C = l\cos\theta$$

$$\delta x_B = 2l\cos\theta\,\delta\theta \qquad \delta y_C = -l\sin\theta\,\delta\theta$$

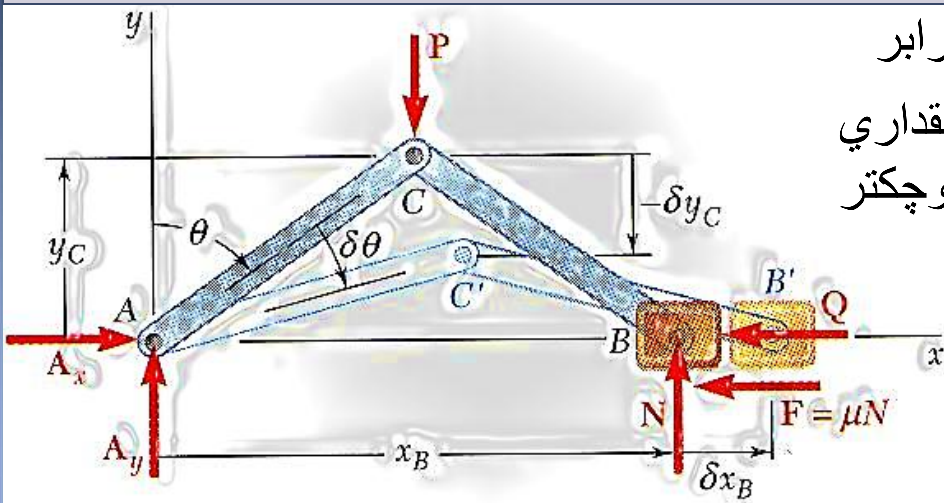


$$0 = -2Ql\cos\theta\,\delta\theta + Pl\sin\theta\,\delta\theta$$

$$Q = \tfrac{1}{2}P\tan\theta$$

- اگرجابجايي مجازي اي كه درنظر ميگيريم باقيدهاي اعمال شده توسط تكيه گاهها واتصالات سازگار باشد همه عكس العملها ونيروهاي داخلي حذف مي شوند وفقط بايد كار مربوط به بارها،نيروهاي اعمال شده ونيروهاي اصطكاك رادرنظر بگيريم.

ماشينهاي واقعي. بازده مكانيكي



- درماشينهايي كه كار ورودي با كار كار خروجي برابر است، ماشين ايده‌آل است
- دريك ماشين واقعي نيروهاي اصطكاك هميشه مقداري كارانجام ميدهند وكار خروجي از كار ورودي كوچكتر مي شود.

$$\delta U = -Q\delta x_B - P\delta y_C - F\delta x_B = 0$$

$$0 = -2Ql\cos\theta\delta\theta + Pl\sin\theta\delta\theta - \mu Pl\cos\theta\delta\theta$$

$$Q = \tfrac{1}{2}P(\tan\theta - \mu)$$

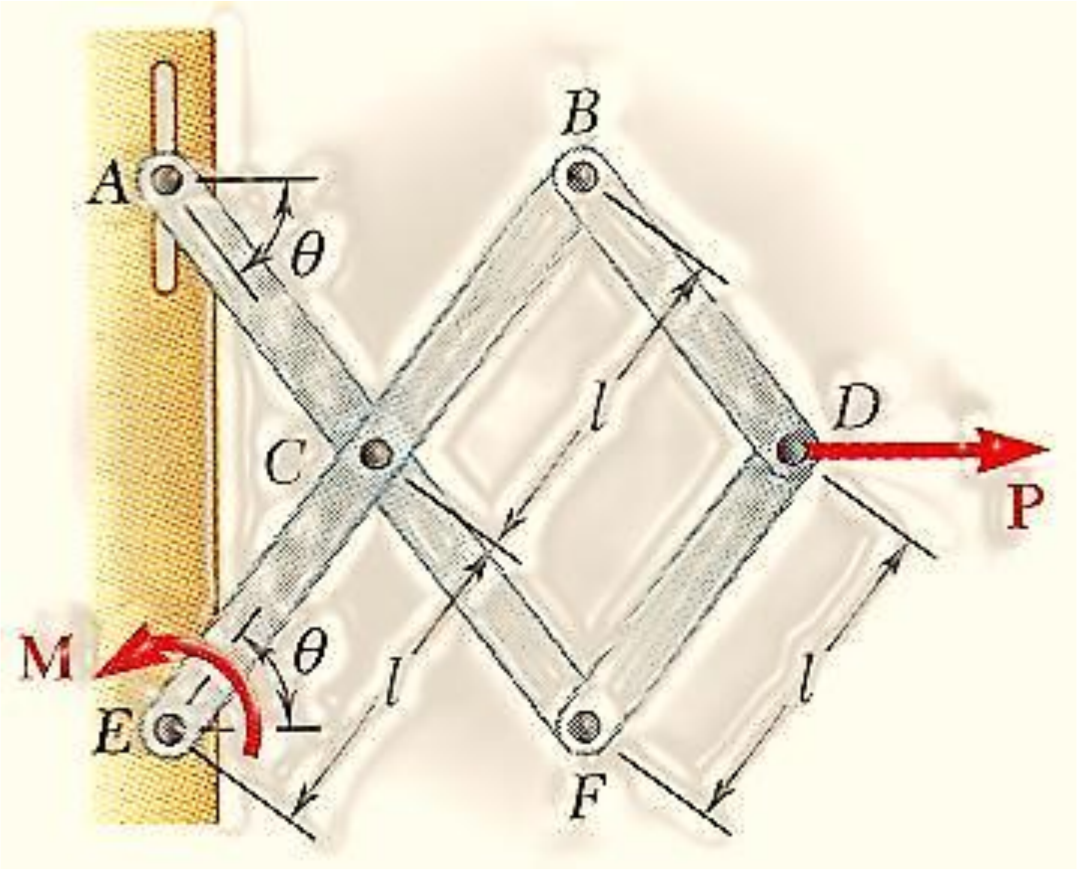
$$\eta = \frac{\text{كارخروجي}}{\text{كارورودي}} = \frac{2Ql\cos\theta\delta\theta}{Pl\sin\theta\delta\theta} = 1 - \mu\cot\theta$$

$\eta =$ بازده ماشين

$$= \frac{\text{كارخروجي توسط ماشين واقعي}}{\text{كارخروجي توسط ماشين ايدآل}}$$

مثال ۱

❑ بااستفاده از روش کارمجازي بزرگي کوپل M لازم براي حفظ تعادل مکانيسم نشان داده شده راتعيين کنيد.



مثال ۱

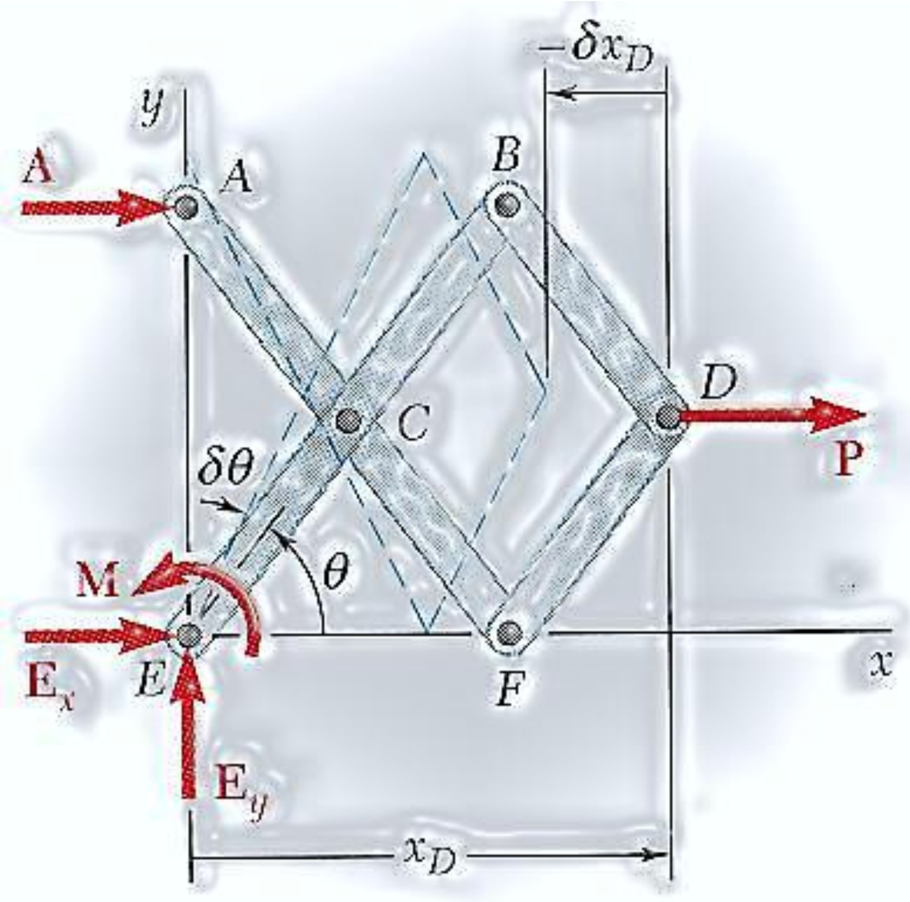
✓ با انتخاب سیستم مختصات به مبدا E خواهیم داشت:

$$\delta U = 0 = \delta U_M + \delta U_P$$
$$0 = M\delta\theta + P\,\delta x_D$$

$$x_D = 3l\cos\theta$$
$$\delta x_D = -3l\sin\theta\delta\theta$$

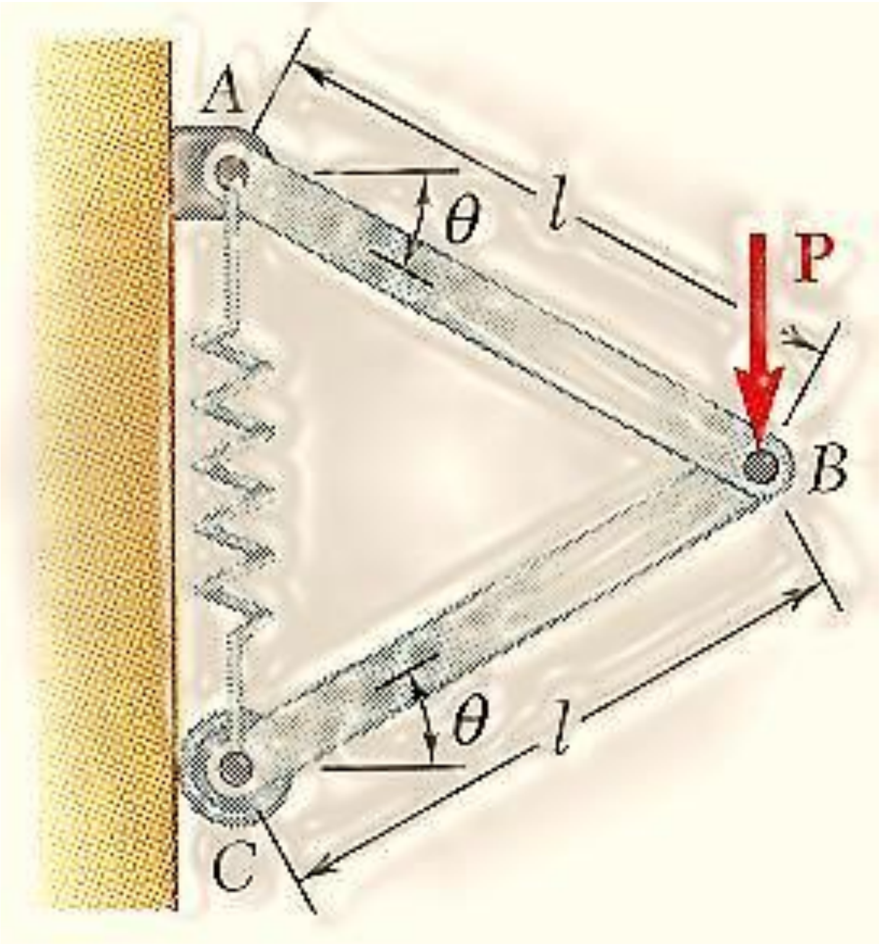
$$0 = M\delta\theta + P(-3l\sin\theta\delta\theta)$$

$$\boxed{M = 3Pl\sin\theta}$$



مثال ۲

❑ براي شكل زير عبارتهايي براي θ وكشش فنر بدست آوريد كه باوضعيت تعادل مكانيسم متناظر باشند.طول آزاد فنر h وثابك فنر K است.ازوزن صرف نظركنيد.



مثال ۲

✓ با استفاده از اصل کار مجازي داريم:

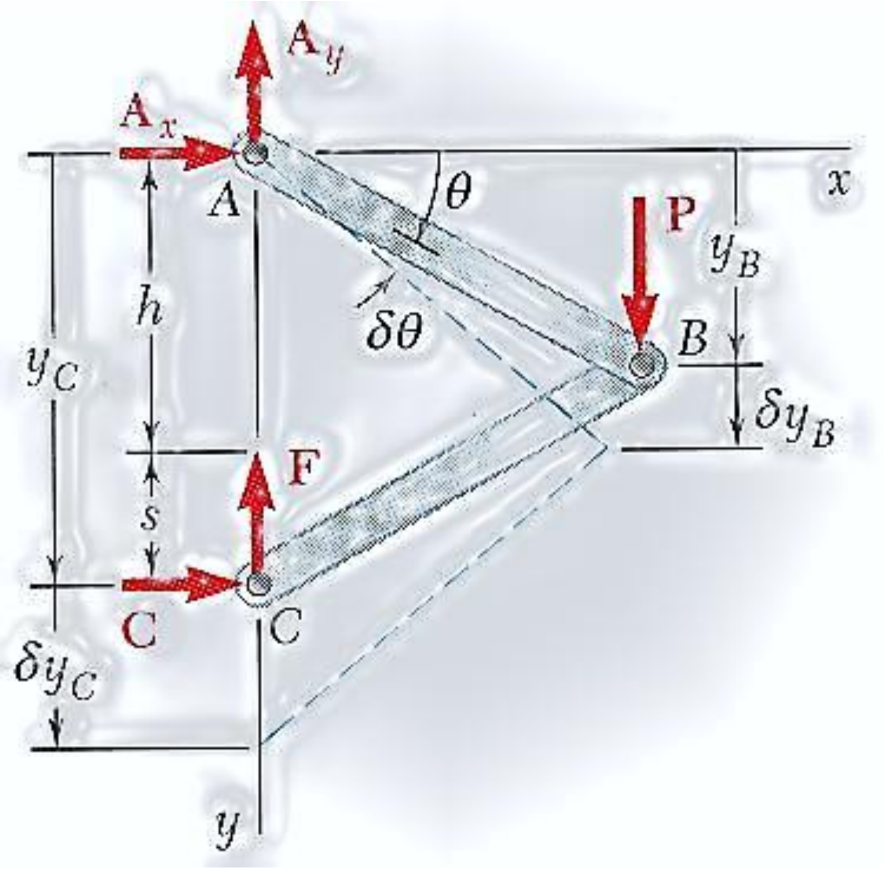
$$\delta U = \delta U_B + \delta U_F = 0$$
$$0 = P\,\delta y_B - F\,\delta y_C$$

$$y_B = l\sin\theta \qquad y_C = 2l\sin\theta$$
$$\delta y_B = l\cos\theta\,\delta\theta \qquad \delta y_C = 2l\cos\theta\,\delta\theta$$

$$F = ks$$
$$= k(y_C - h)$$
$$= k(2l\sin\theta - h)$$

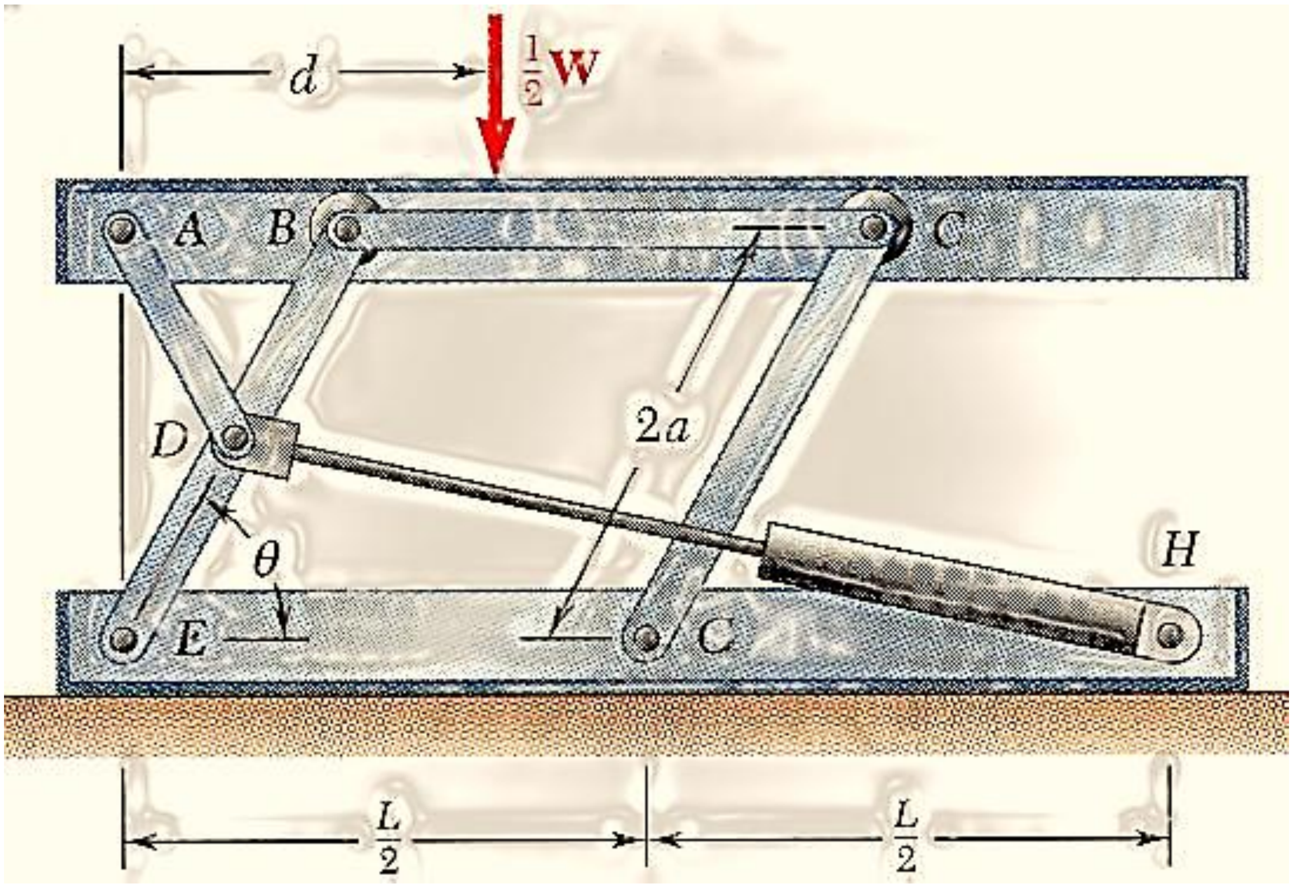
$$0 = P(l\cos\theta\,\delta\theta) - k(2l\sin\theta - h)(2l\cos\theta\,\delta\theta)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{P+2kh}{4kl}\\ F &= \tfrac{1}{2}P\end{aligned}}$$



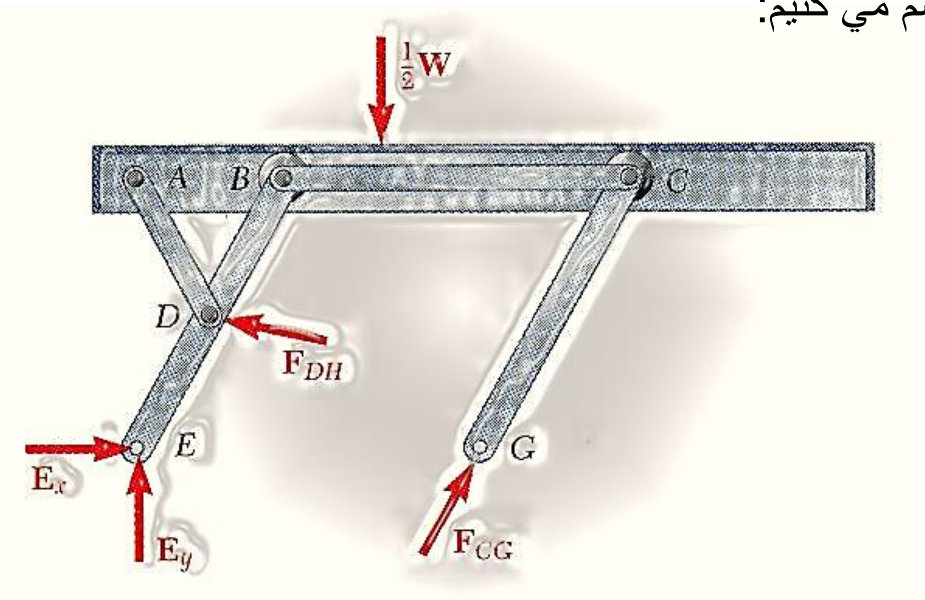
مثال ۳

- مي خواهيم باكمك يك ميزبالابر هيدروليكي صندوقي به جرم 1000kg راابالا ببريم.اگر صندوق طوري روي سيستم قرارداده شود كه نصف وزنش توسط آن تحمل شود.مطلوبست نيروي وارده به هر سيلندر طوريكه $\theta=60^\circ$ به ازاي $a=0.7m$ و $L=3.2m$



مثال ۳

✓ ابتدا دیاگرام جسم آزاد سکو را رسم مي کنيم:



✓ براي تغيير مكان مجازي $\delta\theta$ اصل كارمجازي را بكار مي بريم.

$$\delta U = 0 = \delta Q_W + \delta Q_{F_{DH}}$$

$$\delta U = 0 = \delta Q_W + \delta Q_{F_{DH}}$$

$$0 = -\tfrac{1}{2} W \delta y + F_{DH} \delta s$$

مثال ۳

✓ باستفاده از قانون کسينوسها ومشتق گيري:

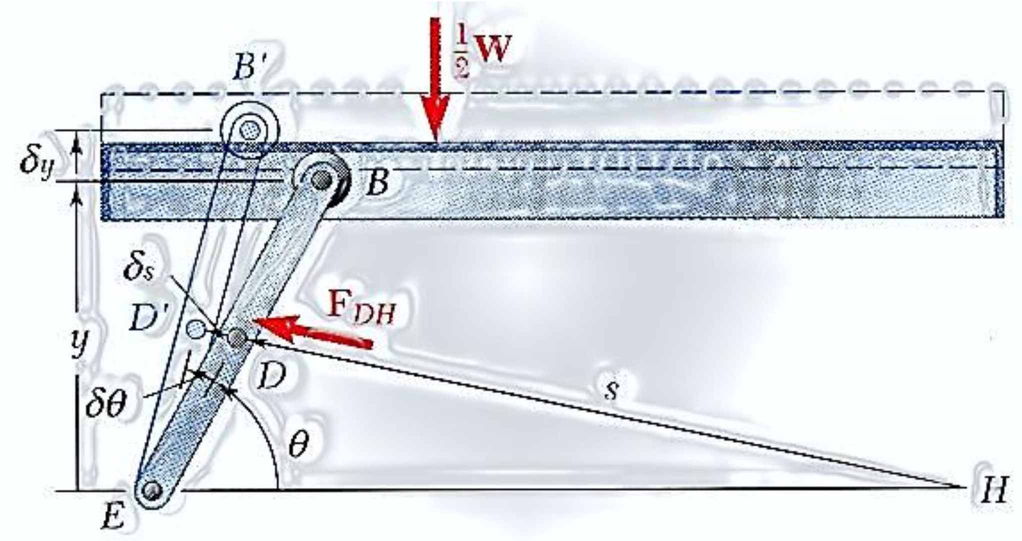
$$y = 2a\sin\theta$$

$$\delta y = 2a\cos\theta\,\delta\theta$$

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL\cos\theta$$

$$2s\,\delta s = -2aL(-\sin\theta)\delta\theta$$

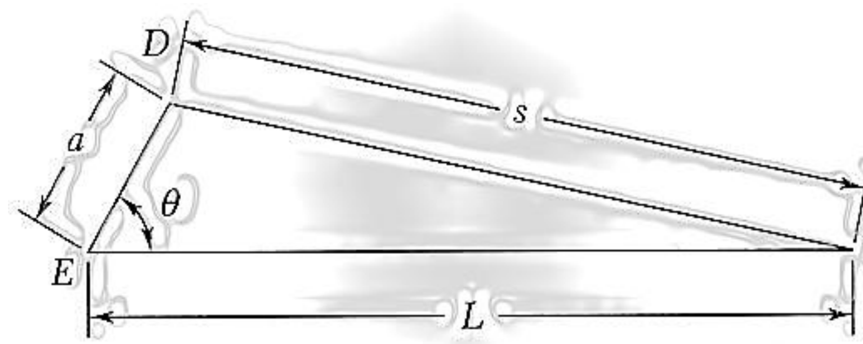
$$\delta s = \frac{aL\sin\theta}{s}\delta\theta$$



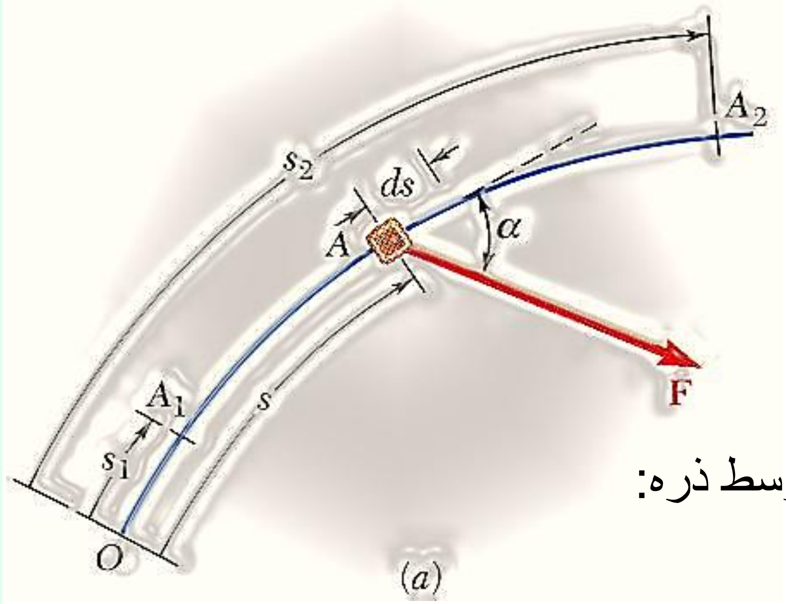
$$0 = \left(-\tfrac{1}{2}W\right)2a\cos\theta\,\delta\theta + F_{DH}\frac{aL\sin\theta}{s}\delta\theta$$

$$F_{DH} = W\frac{s}{L}\cot\theta$$

$$\boxed{F_{DH} = 5.15\,\mathrm{kN}}$$



كاريك نيرو درحين يك جابجايي محدود

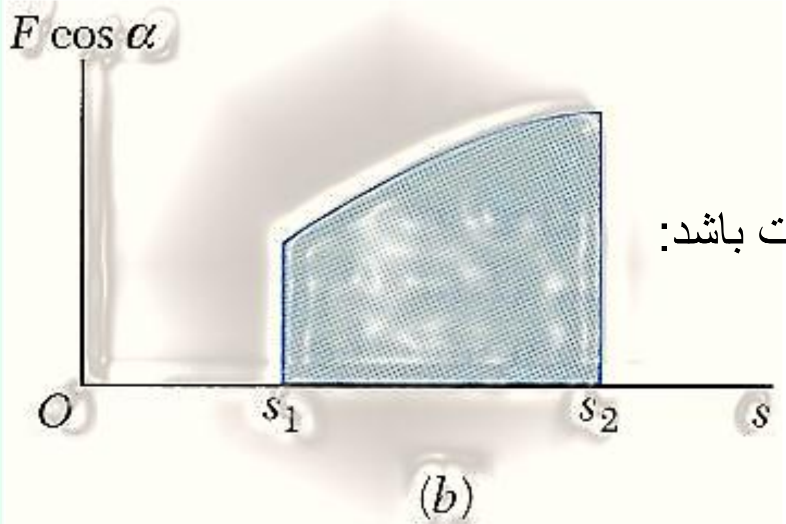


- كار نيرو متناظر با جابجايي بسيار كوچك dr ذره:

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$= F\, ds \cos\alpha$$

- با انتگرال گيري از رابطه فوق در طول منحني طي شده توسط ذره:

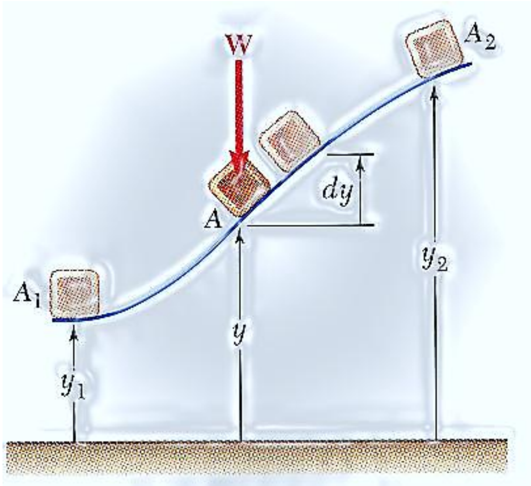
$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)ds$$

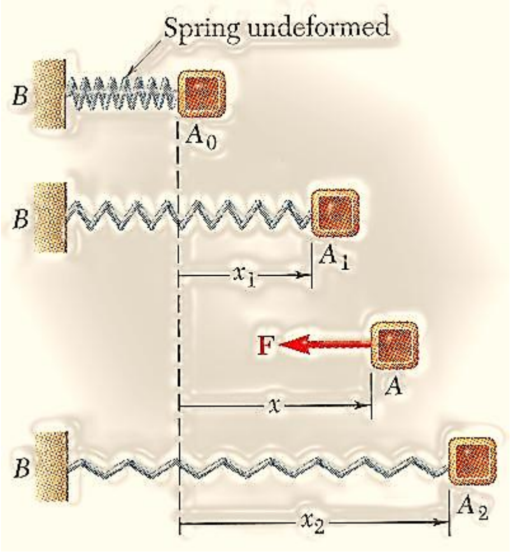


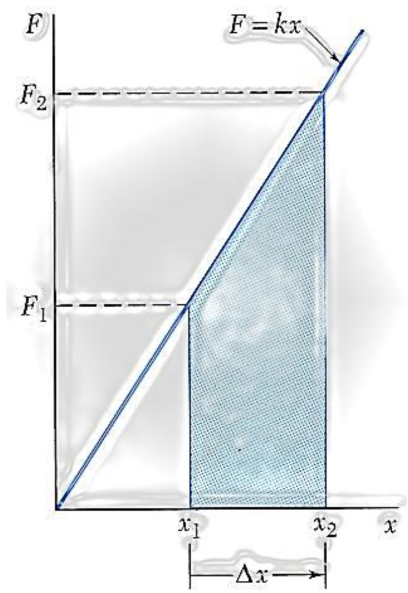
- كار يك كوپل درحين يك دوران محدود جسم وقتي كوپل ثابت باشد:

$$dU = M d\theta$$
$$U_{1\to 2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

كاريك نيرو درحين يك جابجايي محدود







- كار نيروي وزن

$$dU = -W dy$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W dy$$

$$= W y_1 - W y_2$$

$$= -W \Delta y$$

- كارنيروي وارد از فنر

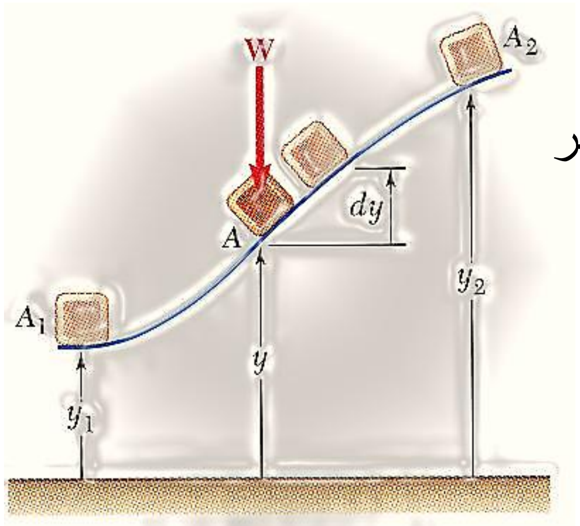
$$dU = -F dx = -(kx) dx$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} k x_1^2 - \tfrac{1}{2} k x_2^2$$

$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\Delta x$$

انرژي پتانسيل

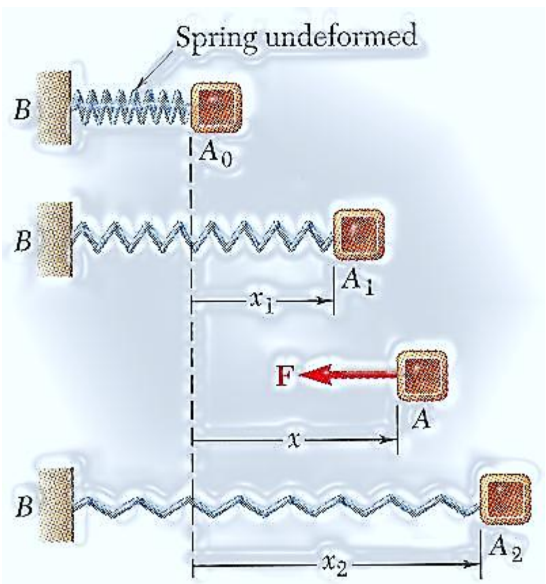


- كارنيروي وزن: $U_{1\to 2} = Wy_1 - Wy_2$

كاروزن درحين يك جابجايي محدود ازكم كردن مقدار تابع W_y متناظر بامكان دوم جسم ازمقدار متناظر بامكان اول جسم بدست مي آيد.

$Wy = V_g =$ تابع انرژي پتانسيل جسم نسبت به نيروي گراني $\vec{W}$

$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2$$



- كار يك فنر:

$$U_{1\to 2} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2$$
$$= (V_e)_1 - (V_e)_2$$

$V_e =$ تابع انرژي پتانسيل جسم نسبت به نيروي كشسان $\vec{F}$

انرژي پتانسيل

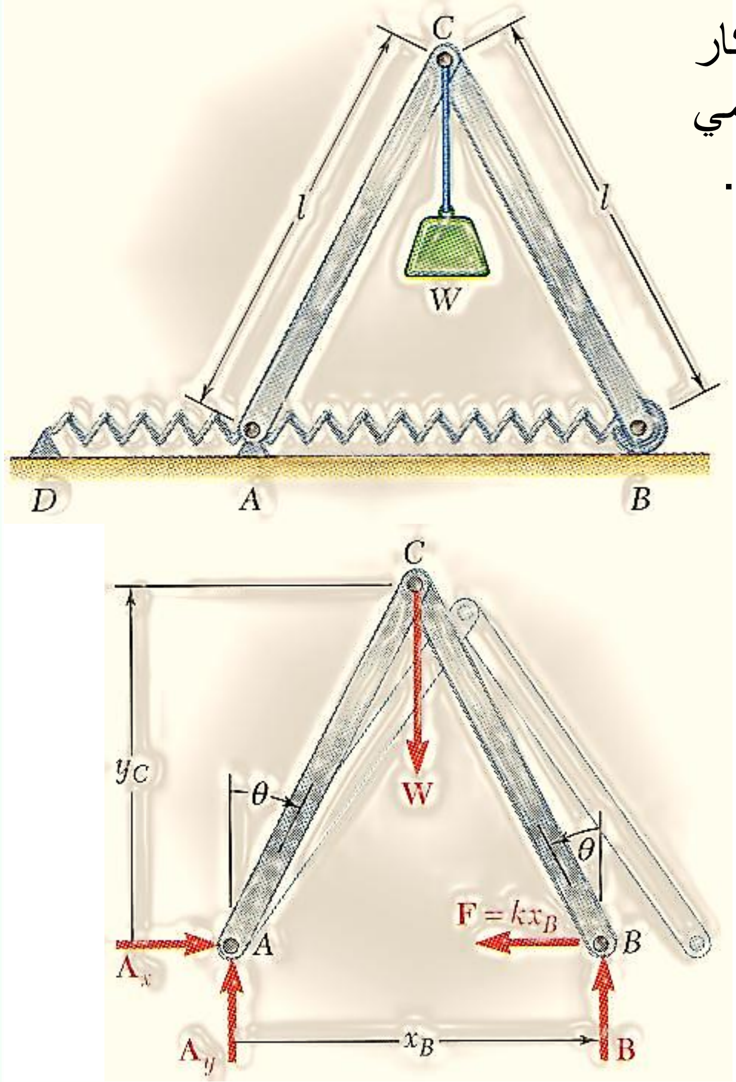
- مفهوم انرژي پتانسيل رابراي نيروهاي ديگري غير از نيروهاي گراني وكشسان هم مي شود بكاربرد واين مفهوم تاوقتي كه جزء كار dU مربوط به نيروي مورد نظر ديفرانسيل كامل باشد معتبر است.

$$dU = -dV$$

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2$$

- كار نيرو مستقل از مسير طي شده وبرابر با منهاي تغيير انرژي پتانسيل است.نيرويي را كه در معادله فوق صدق كند **نيروي پايستار** است.

انرژي پتانسيل وحالت تعادل



- وقتي انرژي پتانسيل يك سيستم معلوم باشد كاربرد اصل كار مجازي بطور قابل ملاحظه اي ساده مي شود.لذا اگر سيستمي درحال تعادل باشد مشتق انرژي پتانسيل كل آن صفر مي شود.

$$\delta U = 0 = -\delta V = -\frac{dV}{d\theta}\delta\theta$$

$$0 = \frac{dV}{d\theta}$$

- براي سيستم نشان داده شده:

$$V = V_e + V_g = \tfrac{1}{2}kx_B^2 + Wy_C$$

$$= \tfrac{1}{2}k(2l\sin\theta)^2 + W(l\cos\theta)$$

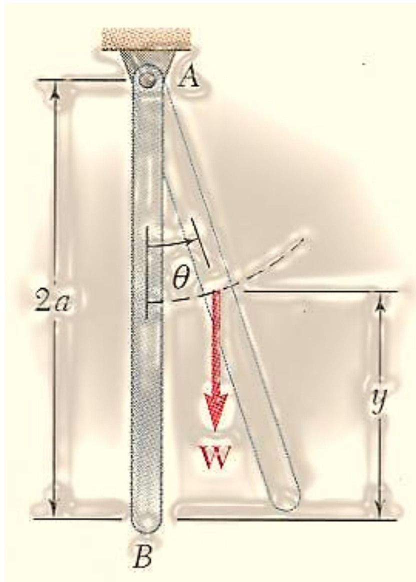
- درموقعيت تعادل:

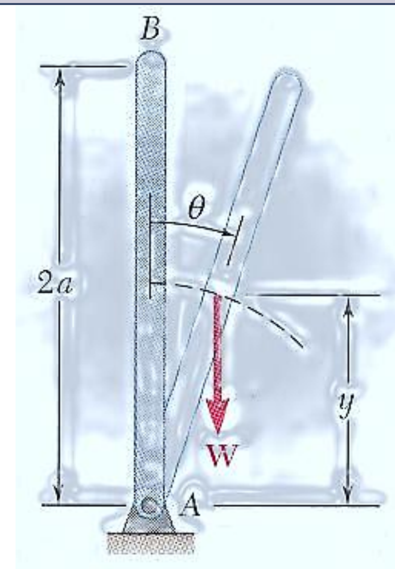
$$\frac{dV}{d\theta} = 0 = l\sin\theta(4kl\cos\theta - W)$$

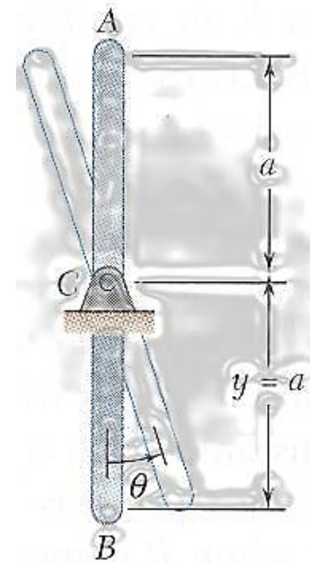
لذا دو وضع تعادل براي سيستم وجود دارد.

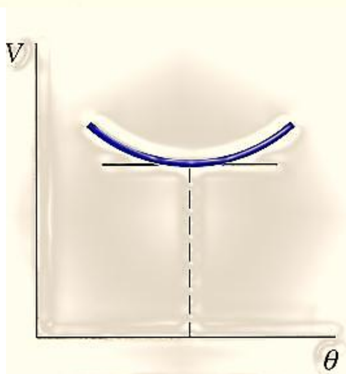
پايداري تعادل

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$



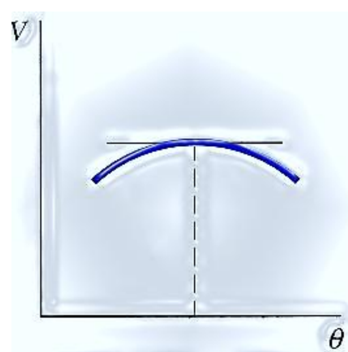






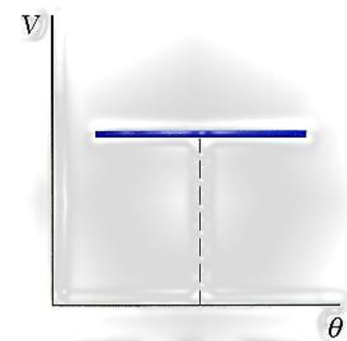
تعادل پايدار

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$$



تعادل ناپايدار

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$$

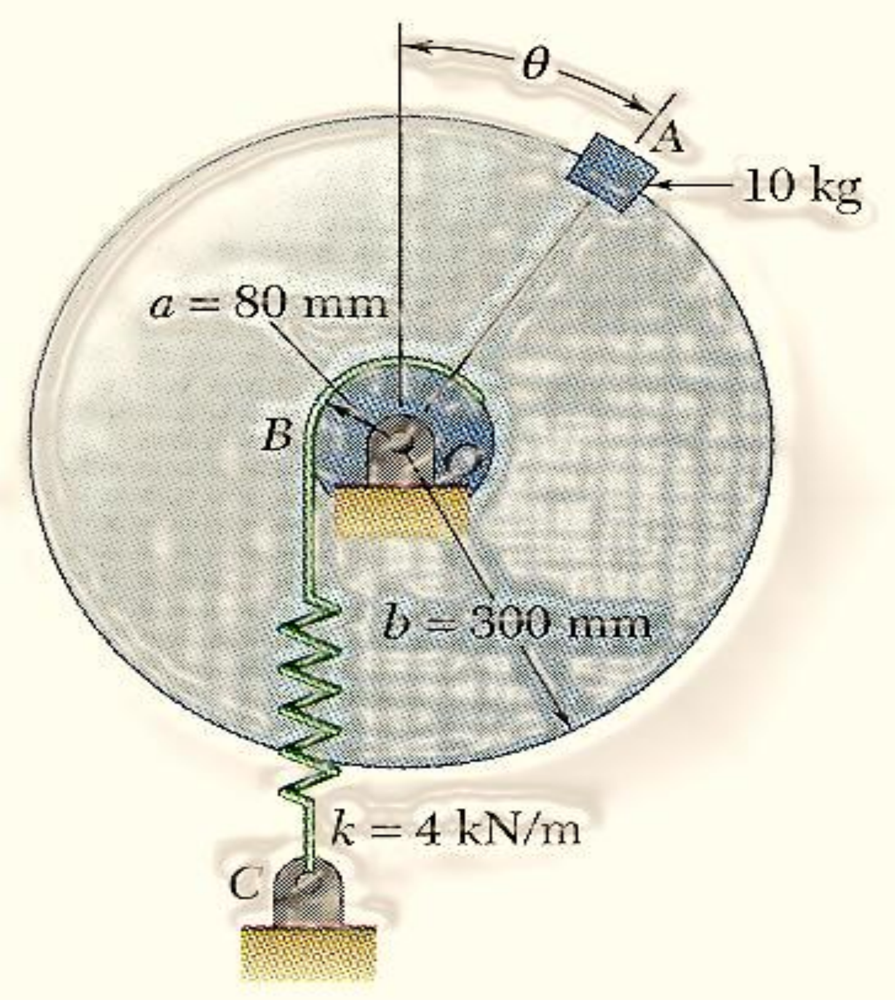


تعادل خنثي

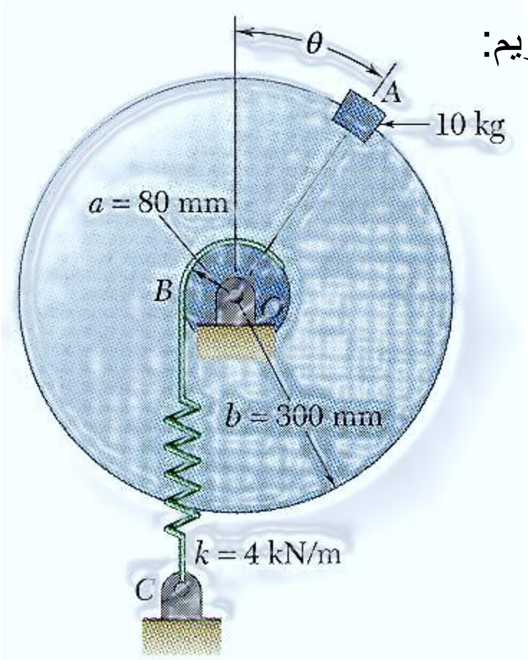
Meysam4366@yahoo.com

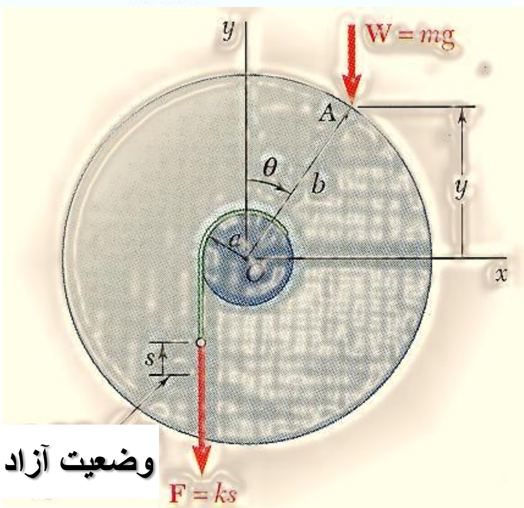
مثال ۴

- قطعه اي به جرم 10kg مطابق شكل به محيط ديسكي به شعاع معلوم متصل است.به ازاي $\theta=0$ فنر BC آزاد است.وضعيت تعادل راتعيين كنيد ومشخص كنيد اين وضعيت (يا وضعيتها) پايدارند يا ناپايدار.



مثال ۴





- تغییر طول فنر راازحالت آزاد با s نشان میدهیم ومبدا مختصات را نقطه O میگیریم:

$$V = V_e + V_g$$
$$= \tfrac{1}{2}ks^2 + mgy$$
$$= \tfrac{1}{2}k(a\theta)^2 + mg(b\cos\theta)$$

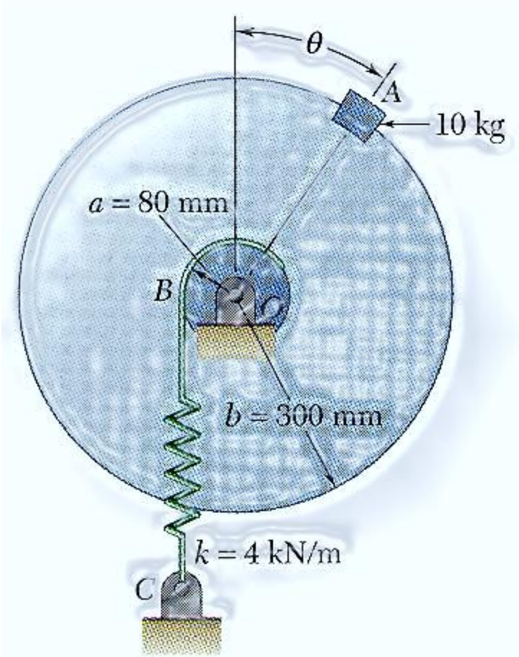
- با مساوي صفر قراردادن مشتق :

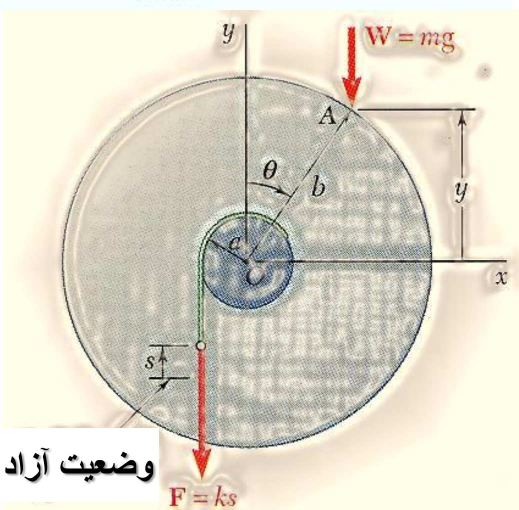
$$\frac{dV}{d\theta} = 0 = ka^2\theta - mgb\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{ka^2}{mgb}\theta = \frac{(4\,\mathrm{kN/m})(0.08\mathrm{m})^2}{(10\mathrm{kg})(9.81\mathrm{m/s^2})(0.3\mathrm{m})}\theta$$
$$= 0.8699\,\theta$$

$$\boxed{\theta = 0 \qquad \theta = 0.902\,\mathrm{rad} = 51.7^\circ}$$

مثال ۴





وضعیت آزاد

- مشتق دوم انرژي پتانسيل V نسبت به θ برابر است با:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb\cos\theta$$

$$= (4\,\mathrm{kN/m})(0.08\mathrm{m})^2 - (10\mathrm{kg})\left(9.81\mathrm{m/s^2}\right)(0.3\mathrm{m})\cos\theta$$

$$= 25.6 - 29.43\cos\theta$$

at $\theta = 0$: $\frac{d^2V}{d\theta^2} = -3.83 < 0$ $\boxed{\text{ناپایدار}}$

at $\theta = 51.7^{o}$: $\frac{d^2V}{d\theta^2} = +7.36 > 0$ $\boxed{\text{پایدار}}$

Vector Mechanics for Engineers

STATICS

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

By : M. Barzegar,M.Sc.