بسم الله الرحمن الرحیم

درس تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها

فصل اول

سیگنال: نشانه یا علامت هر کمیت فیزیکی(قابل اندازه گیری) است.

انواع سیگنال :

۱ –سیگنالپیوستهدرزمانکهبهصورت x(t) نشان داده میشود و t یک متغیر مستقل و یک عدد طبیعی است .

مثال) $x(t) = \sin t$

۲ –سیگنالگسستهبهصورت[n] x نشان داده می شود و n یک عدد صحیح است .

$n = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots$

سیگنال های انرژی و توان

مثال) برای مقاومت داریم $\rightarrow \quad P = R.i^2 = \frac{v^2}{R}$

$E = \int P(t)\,dt = \int R.i^2\,dt = \int \frac{v^2}{R}\,dt$

انرژی یک سیگنال در فاصله ی زمانی $[T_1 , T_2]$ به صورت زیر است:

$$E = \int_{T_2}^{T_1} |x(t)|^2\,dt$$

$x(t) = A + jB = |x(t)|\, e^{j\measuredangle x(t)}$

$|x(t)| = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\qquad$ $\measuredangle x(t) = \tan^{-1}\frac{A}{B}$

$Ae^{j\varphi(t)} = \mathrm{A}\cos\varphi(t) + jA\sin\varphi(t)$

مثال) $x(t) = \cos t + j\sin 2t$

$|x(t)| = \sqrt{cos^2 t + sin^2 2t}$

$\measuredangle x(t) = \tan^{-1}\frac{\sin 2t}{\cos t}$

$x^*(t) = A - jB = |x(t)|\, e^{-j\measuredangle x(t)}$

$x(t) \,.\, x(t)^* = A^2 + B^2 = |x(t)|^2$

مثال : انرژی کل سیگنال های زیر را به دست آورید

۱) $x(t) = 3\, e^{2jt}$

$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} 9\, dt = 9t\,|_{-\infty}^{+\infty} = +\infty$

۲) $x(t) = \begin{cases} e^{-3t} & t \geq 0 \\ e^{2t} & t < 0 \end{cases}$

$E_\infty = \int_{-\infty}^{0} e^{4t} + \int_{0}^{+\infty} e^{-6t} = \frac{1}{4}e^{4t}|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{6}e^{-6t}\,|_{0}^{+\infty} = \frac{10}{24}$

انرژی کل یک سیگنال گسسته چنین تعریف می شود

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

مثال) $x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n & n \geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$

$$E_\infty = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{27^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

فرمول های مهم :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \propto^n = \frac{1}{1-\propto} \quad , \quad |\propto| < 1$$

$$2) \sum_{n=0}^{N} \propto^n = \frac{1-\propto^{N+1}}{1-\propto}$$

$$1) \sum_{n=N_1}^{N_2} \propto^n = \frac{\propto^{N_1} - \propto^{N_2+1}}{1-\propto}$$

مثال)

$$x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^n & 5 \leq n \leq 13 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$E_\infty = \frac{(\frac{1}{9})^5 - (\frac{1}{9})^{14}}{1-\frac{1}{9}}$$

اگر انرژی یک سیگنال محدود شود به آن سیگنال انرژی میگویند

توان یک سیگنال در بازه ی زمانی $[T_1 , T_2]$ چنین است :

$$P = \frac{1}{T_1 - T_2} \int_{T_2}^{T_1} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P = \frac{1}{N_2 - N_2 + 1} + \sum_{n=N}^{N_2} |x[n]|^2$$

توان متوسط یک سیگنال به صورت زیر است :

$$P_\infty = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

$$P_\infty = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

مثال) توان متوسط سیگنال های زیر را به دست آورید:

1) x(t)= t

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} T^2 \, dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} * \frac{t^3}{3} \Big|_{-T}^{T} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} * \frac{2T^3}{3} = +\infty$$

2) x(t) = e^{-3t}

$$P_\infty = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-6t} \, dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{-1}{12T} [e^{-6T} - e^{6T}] = \lim_{T \to +\infty} \frac{e^{6T}}{12T} = +\infty$$

$$3)\ \ x(t)=\begin{cases} e^{-3t} & t\geq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$P_\infty=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T e^{-6t}\,dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{12T}(1-e^{-6t})=0$$

$$P_\infty=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}4=\lim_{N\to+\infty}\frac{4(N+1)}{2N+1}=2$$

سیگنال های متناوب

$x\ (t)$ یک سیگنال پیوسته ی متناوب با دوره تناوب T_0 است اگر :

$x\ (t)= x\ (t+T_0)$, for All t

اگر T_0کوچکترین عددی باشد که رابطه ی فوق برای آن برقرار است T_0را دوره ی تناوب اصلی می نامند

مثال) $x\ (t) = \cos t\ ,\ T_0= \pm 2\pi , \pm 4\pi, \dots$

مثال)$=\frac{2\pi}{\omega_0}$ $x\ (t) = \cos \boldsymbol{\omega}_0\, t$, T_0

مثال)$x\ (t) = cos^2\omega_0 t = 1+\cos 2\omega_0\, t \qquad T_0=\frac{\pi}{\omega_0}$

مثال)$x\ (t) = \cos t + \cos\frac{2t}{3} + \sin\frac{t}{5}$

$T_2=3\pi$, $T_3= 10\pi T_1 =2\pi$,

که T کل از ک.م.م T ها به دست می آید $\qquad T_0 =30\pi$

مثال) $x\ (t) =\cos t . \cos 2t$

$x(t) = \frac{1}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\cos t$

$T_1 = \frac{2\pi}{3}$, $T_2 = 2\pi$ $\qquad\qquad$ $T_0 = 2\pi$

x[n] یک سیگنال متناوب است اگر

$x[n] = x[n+N_0]$ for All n

مثال) $x[n]= \cos\frac{n}{3}$

$N_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

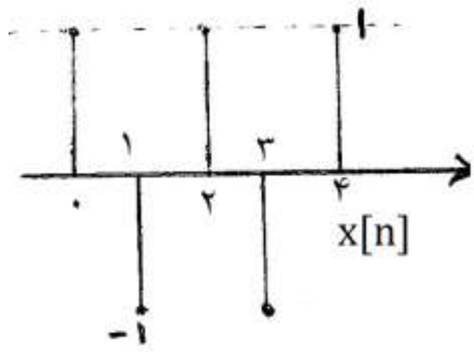
$x[n] = \cos[\pi n^2]$

$x[n]= x[n+N_0] \rightarrow \cos \pi(n+N_0)^2$

$\rightarrow \cos\pi n^2 = \cos(\pi n^2 + 2nN_0\pi + \pi N_0^2 = \cos(\pi n^2 + \pi N_0^2)$

_ $\cos(\boldsymbol{\theta}) = \cos(\boldsymbol{\theta} + 2k\pi)$ $\qquad\qquad$ $\pi N_0^2 = 2k$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$

$N_0 = 2$

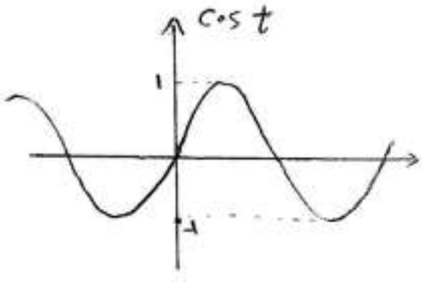


سیگنال های زوج (even) و فرد (odd)

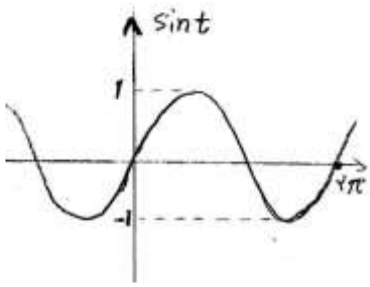
یک سیگنال زوج است اگر :

x (t) = x(-t)

x [t] = x [-n]



و فرد است اگر:



x (t) =- x(-t)

x (-t) = -x(t)

x[n]= -x[-n]

قسمت های زوج و فرد یک سیگنال چنین تعریف میشود :

$$x_e(t) = Ev\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

$$x_o = Odd\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

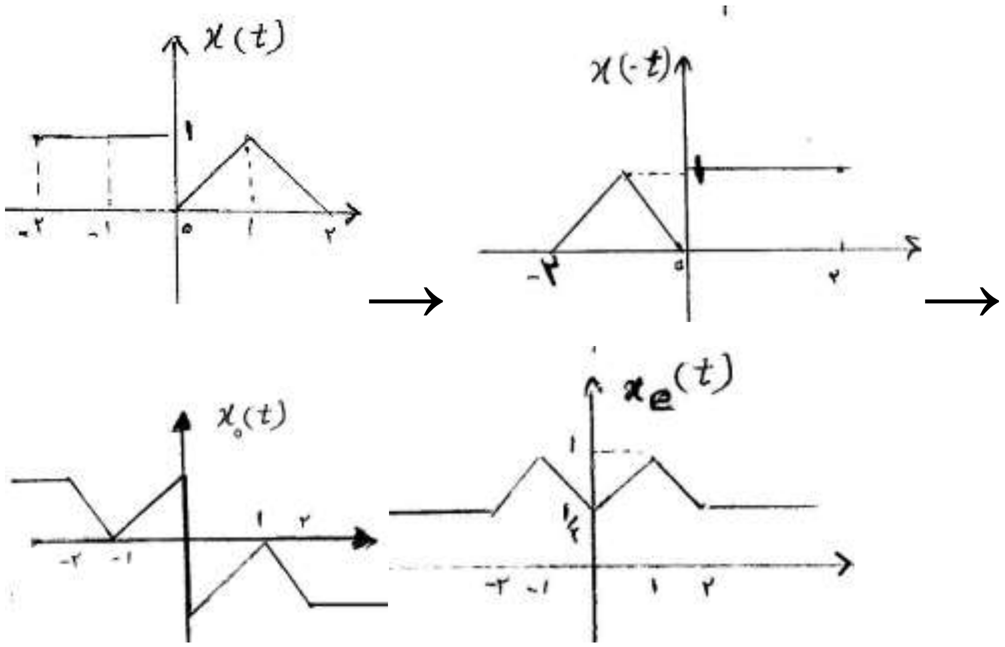
مثال) قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را محاسبه کنید:

1) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

$$x_e(t) = \frac{e^{jt\omega_0} + e^{-jt\omega_0}}{2} = \cos t\omega_0$$

$$x_o(t) = \frac{e^{jt\omega_0} - e^{-jt\omega_0}}{2} = j\sin t\omega_0$$

2)

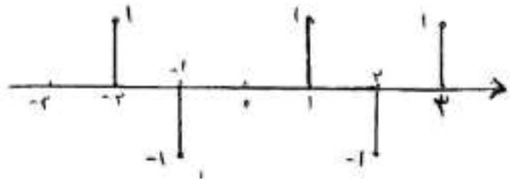


3) $$x(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ t & -1 < t < 0 \\ -t+2 & 2 < t < -1 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

$$x(-t)=\begin{cases} 1 & t<0 \\ -t & -1<t<0 \\ -t+2 & 0<t<1 \\ 0 & t<-2 \end{cases}$$

$$x_e(t)=\begin{cases} \frac{1}{2} & t<-2 \\ \frac{t+3}{2} & -2<t<-1 \\ \frac{1-t}{2} & -1<t<0 \end{cases}$$

مثال) قسمت های زوج و فرد سیگنال های زیر را محاسبه کنید:



n[x]

$$x_e[-3]=\frac{x[-3]+x[3]}{2}=\frac{1}{2}=x_e[3]$$

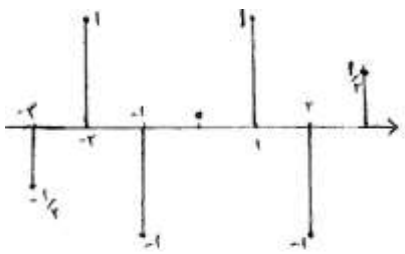
$$x_e[-2]=0=x_e[2]$$

$$x_e[-1]=0=x_e[1]$$

$x_e[0]=0$ $x_e[n]$

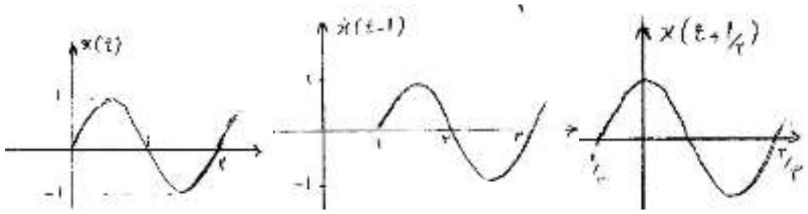
$x_o[-3]=\frac{1}{2}x_o[-2]=1$

$x_o[-1]=-1x_o[0]=0x_o[n]$



تبدیل های متغیر مستقل:

سیگنال $x(t-t_0)$ از انتقال سیگنال $x(t)$ در حوضه ی زمان به اندازه ی $t_0 > 0$ ایجاد میشود اگر $t_0 > 0$ شیفت به راست و اگر $t_0 < 0$ به چپ شیفت پیدا می کند که داریم:

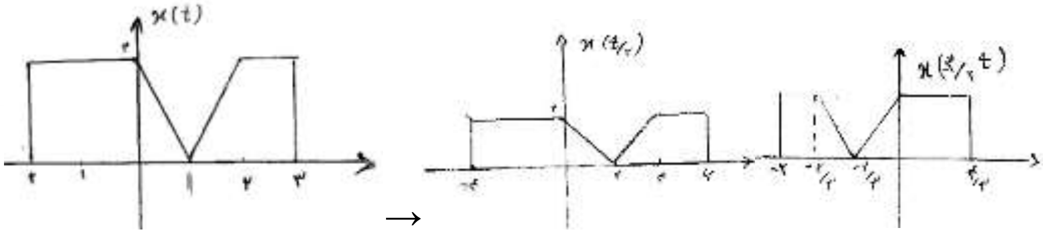


سیگنال $x(\propto t)$ از تغییر مقیاس $x(t)$ در حوضه ی زمان به اندازه ی $\frac{1}{\propto}$ ایجاد میشود.

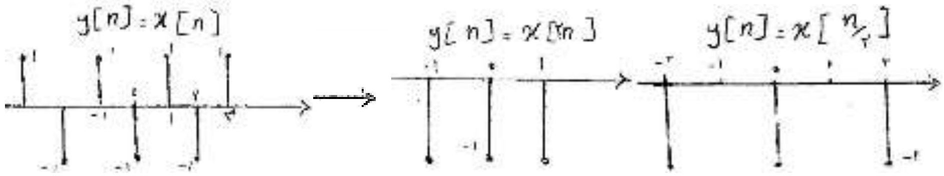
اگر $1 < |\propto|$ باشد سیگنال فشرده و در غیر این صورت باز می شود

مثال)

۱)

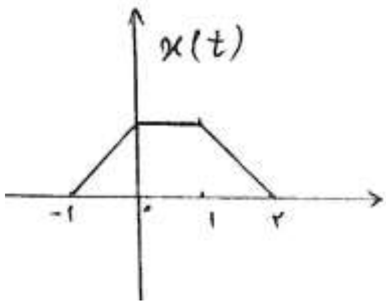
if 

۲)

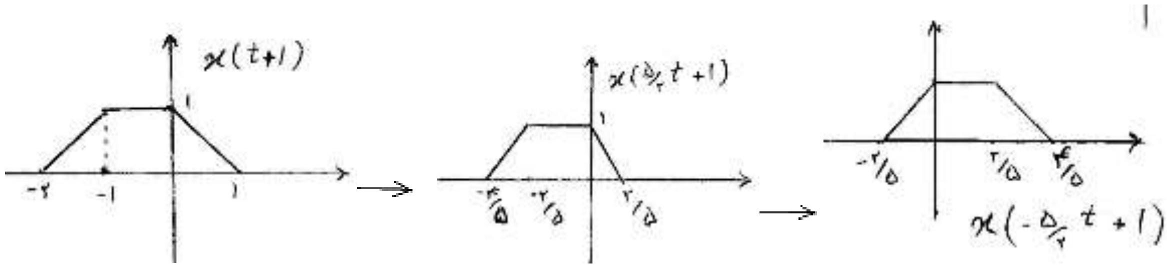
if 

-سیگنال $x(\alpha t+\beta)$ از انتقال سیگنال $x(t)$ به اندازه ی $-\beta$ و تغییر مقیاس عرضی β وتغییر افقی مقیاس سیگنال به اندازه ی $\frac{1}{\alpha}$ حاصل میشود.

مثال) اگر $x(t)$ به صورت زیر باشد مطلوب است: $x(-\frac{5}{2}t+1)$



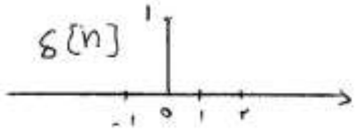
حل)



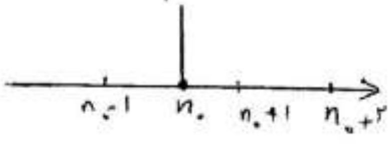
سیگنال های پله ی واحد و ضربه و پله گسسته

یک سیگنال ضربه ی واحد گسسته این چنین تعریف می شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



مثال) $\delta[n - n_0]$

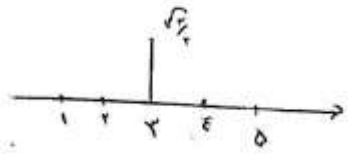


خاصیت غربالی سیگنال ضربه:

$$x[n].\delta[n-n_0]=x[n_0].\delta[n-n_0]=\begin{cases}x[n_0] & n=n_0\\ \\ 0 & n\neq n_0\end{cases}$$

مثال)

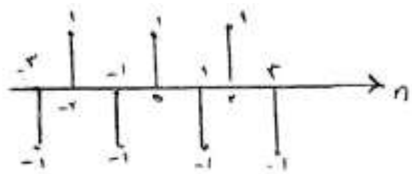
$$\cos\frac{n^2\pi}{4}\delta[n-3]=\cos\frac{9\pi}{4}\delta[n-3]=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta[n-3]$$



مثال)

$$x[n]=\sum_{k-3}^{3}(-1)^k\delta[n-k]=(-1)\delta[n+3]+\delta[n+2]+(-1)\delta[n+1]+\delta[n]+$$

$$+(-1)\delta[n-1]+\delta[n-2]+(-1)\delta[n-3]$$

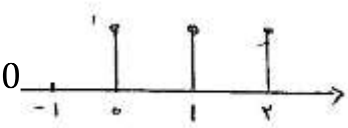


مثال)

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[n-2k]=\cdots+\delta[n+4]+\delta[n+2]+\delta[n]+\cdots$$

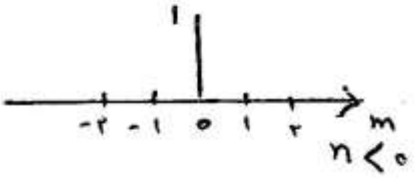
سیگنال پله ی واحد گسسته چنین تعریف می شود:

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



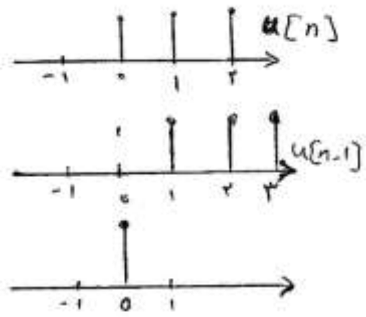
بر حسب ضربه :

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] = \sum_{m=-\infty} \delta[m] \qquad (m = n-k)$$



تابع ضربه ی پله :

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



تمرین : سیگنال های زیر را رسم کنید .

1) $x[n] = u[n+3] - u[n-3]$

2) $x[n] = u[3-n] - u[n+4]$

3) $x[n] = \cos \pi n^2 \sum_{k=-6}^{4} \delta[n-k]$

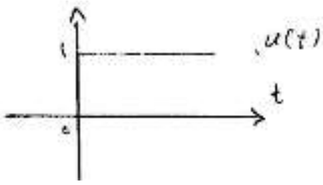
4) $x[n] = u[n+10]\, u[10-n]$

$$5)\ x[n] = \sum_{k=-3}^{3} (-1)^k u[n-k]$$

سیگنال های پله و ضربه ی واحد

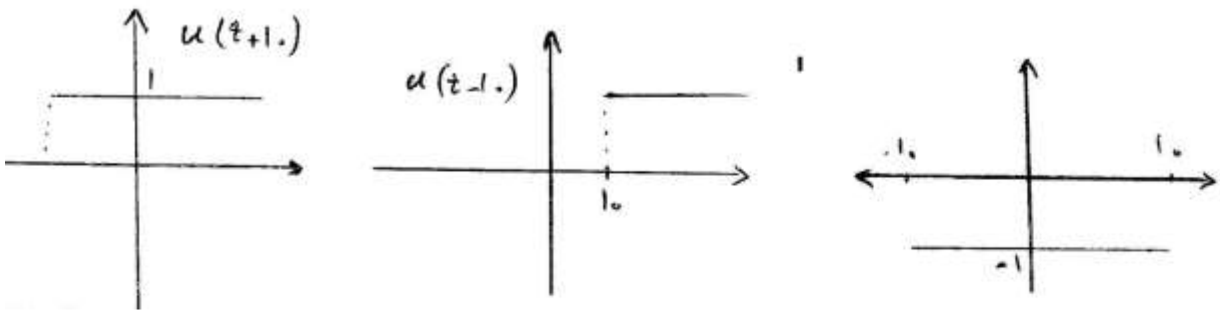
سیگنال واحد پله و ضربه ی واحد چنین تعریف میشود:

$$\mathrm{u(t)} = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

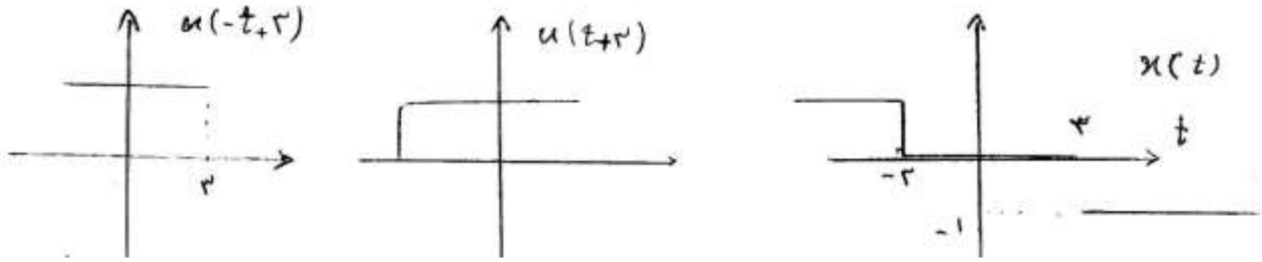


مثال) سیگنال های زیر را رسم کنید :

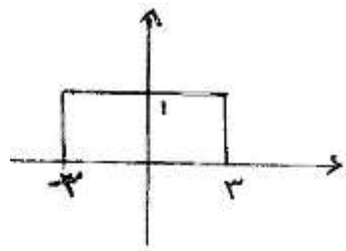
$$1)\ x(t) = u(t-10) - u(t+10)$$



$$2)\ x(t) = u(-t+3) - u(t+3)$$



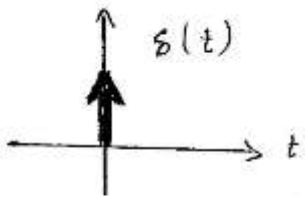
3) $x(t) = u(t-3).u(t+3)$



سیگنال ضربه ی واحد پیوسته

این سیگنال چنین تعریف میشود:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

روابط بین تابع ضربه و تابع پله به این شکل است:

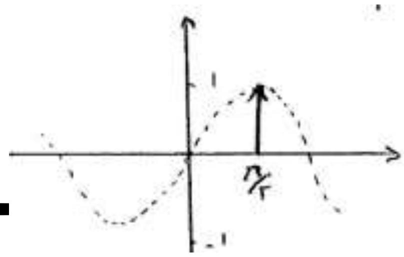
$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')dt' \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

خاصیت غربالی سیگنال ضربه

$$x(t) \times \delta(t-t_0) = x(t_0) \times \delta(t-t_0)$$

مثال)

1) $\sin t . \delta(t) = 0 . \ \delta(t) = 0$



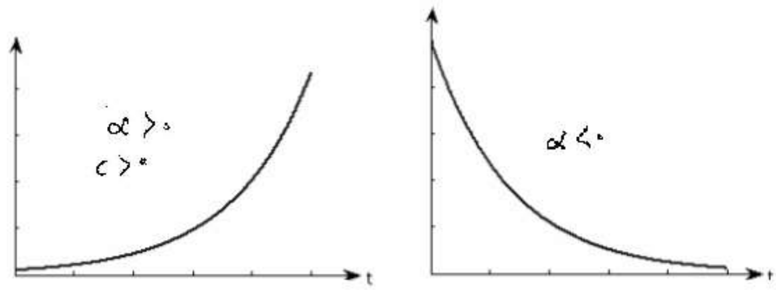
$$2)\ \sin t\ .\ \delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

سیگنال های نمایی پیوسته

یک سیگنال نمایی پیوسته به یکی از سه حالت زیر میباشد:

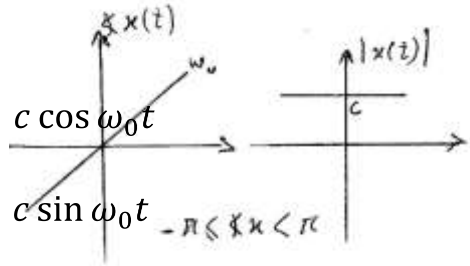
$$1)x(t)=ce^{\alpha t}$$

c,α دوعدد حقیقی اند



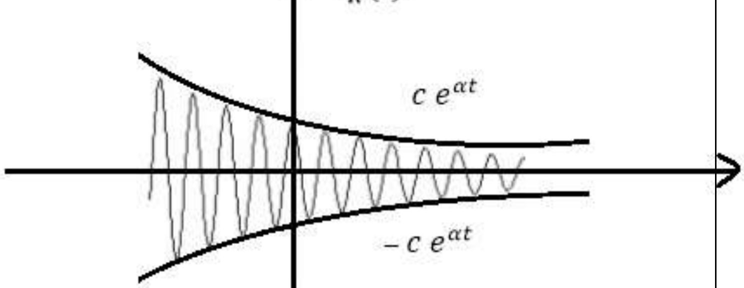
$$2)x(t)=ce^{j\omega_0 t}$$

$$\begin{cases}|x(t)|=c\\ \sphericalangle\, x(t)=\omega_0 t\end{cases}\begin{cases}x_R(t)=c\cos\omega_0 t\\ x_I(t)=c\sin\omega_0 t\end{cases}$$



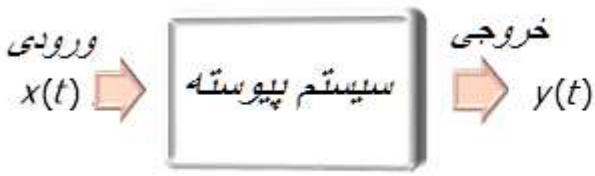
$$3)x(t)=ce^{\alpha T}e^{j\omega_0 t}$$

$$\begin{cases}|x(t)|=c\\ \sphericalangle\, x(t)=\omega_0 t\end{cases}\begin{cases}x_R(t)=c\ e^{\alpha t}\cos\omega_0 t\\ x_I(t)=c\ e^{\alpha t}\sin\omega_0 t\end{cases}$$

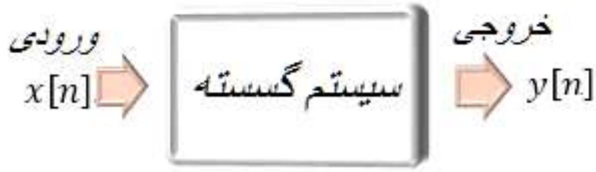


سیستم و خواص آن

یک سیستم فرآیندی است که یک یا چند ورودی را به یک یا چند خروجی تبدیل میکند



$y(t)=T\{x(t)\}$



خواص سیستم ها:

1) حافظه دار بودن: سیستم بودن حافظه سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به مقدار خروجی وابسته باشد (به گذشته وابسته نباشد)

سلف و خازن جزء سیستم های حافظه دارند ولی مقاوت یک سیستم بدون حافظه است

$$\begin{cases} v(t) = Ri(t) \\ y(t) = Rx(t) \end{cases} \text{مقاومت}$$

$$\begin{cases} v(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt' \\ y(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(t')dt' \end{cases} \text{خازن}$$

$$\begin{cases} v(t) = l\frac{di(t)}{dt} \\ y(t) = l\frac{du(t)}{dt} = l\lim_{\Delta\to 0}\frac{x(t)-x(t-\Delta)}{\Delta} \end{cases} \text{سلف}$$

مثال یک سیستم حافظه دار:

$$y[n]=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}[n-k]=\frac{1}{m+1}(x[n]+x[n-1]+\cdots+x[n-m])$$

*اگر داخل پرانتز ها ویا کروشه ها عملیات ریاضی انجام شده باشد سیستم حافظه دار است .

۲) علّی بودن: سیستم علی سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه فقط وابسته به مقادیر حال و گذشته ی ورودی باشد و به آینده وابسته نباشد (در واقعیت هیچ سیستمی به آینده وابسته نیست)

کلیه ی سیستم های بدون حافظه علی اند

مثال برای سیستم غیر علی:

$$y[n]=\frac{1}{2m+1}\sum^{m}x[n-k]=\frac{1}{2m+1}(x[n+m]+\cdots)$$

۳) وارون پذیری : سیستمی که بتوان از خروجی آن ورودی را به طور یکتا تعیین کرد.

مثال)

$$1)\ y(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}x(t')d'\overset{\text{وارون}}{\Longrightarrow}x(t')=c\frac{dy(t)}{dt}$$

$2)\ y(t) = l\dfrac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} y(t')dt'$ وارون پذیر

$x(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} y(t')dt' + C$ وارون پذیر نیست

$3) y[n] = x^2[n] \rightarrow x[n] = \pm\sqrt{y[n]}$

مثال نقض :

$x_1[n] = 1 \ \rightarrow \ y_1[n] = 1$

$x_2[n] = -1 \ \rightarrow \ y_2[n] = 1$

$4)\ y(t) = \sin x(t)$

$x(t) = sin^{-1}y(t) + 2k\pi$ $\qquad y(t) = 0 \rightarrow x(t) = 0 \pm \pi\ , \pm 2\pi$

۴) پایدار بودن: سیستمی پایدار است که از ورودی ها با دامنه ی محدود ، خروجی با دامنه ی محدود تولید کند .

$$|x(t)| < B_x \rightarrow |y(t)| < B_y$$

B_x و B_y دو عدد محدود

مثال)

$1) y(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$

مثال نقض $x(t) = 1 \rightarrow y(t) = \dfrac{1}{c}\int_{-\infty}^{t} dt' \rightarrow +\infty$

$2)\ y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ مثال نقض $x(t) = u(t) \rightarrow y(t) = \delta(t)$

۵) تغییر پذیری با زمان: سیستمی است که به ازای ورودی های یکسان در زمان های مختلف خروجی های یکسان در زمان های مختلف تولید کند.

$x(t) \rightarrow y(t)$

$x_2(t) = x(t - t_0 \rightarrow y_2(t) = y(t - t_0)$

مثال) تغییر پذیری یا نا پذیری سیستم های زیر را بررسی کنید .

$$1)\ y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(t')dt'$$

$$x_2(t) = x(t - t_0) \rightarrow y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_2(t')dt' = \int_{-\infty}^{t} x_2(t' - t_0)dt'$$

$$y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t')dt' = \int_{-\infty}^{t} x(\,t" - t_0)dt" = y_2(t)$$

$$t" = t' + t_0$$

$$2)\ y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$x_2(t) = x(t - t_0)y_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dx(t - t_0)}{dt}$$

$$y(t - t_0) = \frac{dx(t - t_0)}{dt} = y_2(t)$$

تمرین) تغییر پذیری یا ناپذیری سیستم زیر را بررسی کنید .

$$y(t) = x(2t)$$

۶) خطی بودن : یک سیستم خطی است اگر سیستم همگن و جمع پذیر باشد:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$ax_1(t) \rightarrow ay_1(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

مثال) خطی بودن سیستم های زیر را بررسی کنید:

1) $y[n] = n^2x[n]$

$x_1[n] \rightarrow y_1 = n^2x_1[n]$

$$x_2[n] \rightarrow y_1 = n^2x_2[n]$$

$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow y_3 = n^2x_3[n]$

خطی است

2) $y(t) = x^2(t)$

$x_1(t) = 1 \rightarrow y_1(t) = 1$

$x_2(t) = 3x_{\,1}(t) \rightarrow y_2(t) = 9$ همگن نیست

3) $y(t) = Re\{x(t)\}$ $x(t) = 1 \rightarrow y(t) = 1$

$x_2(t) = j.x(t) \rightarrow y_2(t) = 0$ همگن نیست

تمرین) خطی بودن سیستم های زیر را بررسی کنید:

$1) y(t) = x(t) + 1$

$2) y(t) = \log_{10} x(t)$